MŰSZAKI MATEMATIKAI GYAKORLATOK

SZERKESZTI:
DR. FAZEKAS FERENC

C. VII.

MATEMATIKAI PROGRAMOZÁS

ÍRTA:
DR. FAZEKAS FERENC

MÁSODIK, BŐVÍTETT KIADÁS

TANKÖNYVKIADÓ, BUDAPEST
1967

MŰSZAKI MATEMATIKAI GYAKORLATOK

SZERKESZTI:
DR. FAZEKAS FERENC
EGYETEMI DOCENS

BELSŐ MUNKATÁRSAK:

DR. FREY TAMÁS
EGYETEMI DOCENS,
KANDIDÁTUS

DR. BAJCSAY PÁL
EGYETEMI DOCENS,
KANDIDÁTUS

★

SZEMLÉLTETÉS:
GYURCSY ENDRE
OKL. VILLAMOSMÉRNÖK

TANKÖNYVKIADÓ, BUDAPEST
1967

A

MŰSZAKI MATEMATIKAI GYAKORLATOK

SOROZAT KÖTETEI

A.

A. I. **Középiskolai matematika** (Negyedik kiadás)
A. II. **Egyváltozós elemi függvények** (Harmadik kiadás)
A. III. **Differenciálszámítás** (Harmadik kiadás)
A. IV. **Határozatlan integrál** (Harmadik kiadás)
A. V.* **Határozott integrál (Első rész)** (Második kiadás)
A. V.** **Határozott integrál (Második rész)** (Második kiadás)
A. VI. **Többváltozós függvények és differenciálásuk** (Második kiadás)
A. VII. **Többváltozós függvények integrálása** (Második kiadás)
A. VIII. **Taylor-sorok** (Harmadik kiadás)
A. IX. **Vektoralgebra. Lineáris egyenletrendszerek** (Harmadik kiadás)
A. X. **A logarléc** (Negyedik kiadás)

B.

B. I., II., III. **Vektoranalízis (Térgörbék és felületek differenciálgeometriája Skalár-, vektor- és tenzormezők)** (Harmadik kiadás)
B. IV. **Komplex függvénytan** (Harmadik kiadás)
B. V. **Numerikus és grafikus közelítő módszerek** (Második kiadás)
B. VI. **Végtelen sorozatok, sorok és szorzatok** (Második kiadás)
B. VII.* **Közönséges differenciálegyenletek (Első rész)** (Harmadik kiadás)
B. VII.** **Közönséges differenciálegyenletek (Második rész)**
B. VIII. **Parciális differenciálegyenletek** (Második kiadás)

C.

C. I. **Operátorszámítás. Speciális függvények** (Második kiadás)
C. II. **Variációszámítás** (Második kiadás)
C. III. **Integrálegyenletek** (Második kiadás)
C. IV. **Mátrixszámítás** (Harmadik kiadás)
C. V. **Valószínűségszámítás** (Második kiadás)
C. VI. **Matematikai összefoglaló** (Harmadik kiadás)
C. VII. **Matematikai programozás** (Második kiadás)

(A szövegben az egyes kötetekre a fenti betű- és számjelzéssel hivatkozunk.)

C. VII.

MATEMATIKAI PROGRAMOZÁS

MATRIXALGORITMIKUS MÓDSZEREKKEL (MAM)

ÍRTA

DR. FAZEKAS FERENC
EGYETEMI DOCENS

MÁSODIK, BŐVÍTETT KIADÁS

EGYETEMI SEGÉDKÖNYV

Kiadását a művelődésügyi miniszter rendelte el

A KÖTET KÉZIRATÁT ÁTNÉZTE:

DR. KÁDAS KÁLMÁN
EGYETEMI TANÁR, KANDIDÁTUS

DR. SEITZ KÁROLY
EGYETEMI ADJUNKTUS

A SOROZAT ELSŐ KIADÁSÁNAK ELŐSZAVÁBÓL

A műegyetemi oktatás és mérnöki továbbképzés évtizedek óta nehezen nélkülöz egy a műszaki igényeknek megfelelő magyar matematikai példagyűjteményt. E hiányt felismerve, matematikai tanszékeink lelkes fiataljai az utolsó 2—3 évben több jegyzetet állítottak össze a matematikai gyakorlatok anyagából. Tovább enyhítette a hiányt *Gjunter—Kuzmin* időközben magyarul megjelent kiváló felsőbb matematikai példatára, bár ezt — magas színvonalára való tekintettel — elsősorban nem a műegyetemi, hanem a tudományegyetemi hallgatók részére adatta ki a minisztérium. A probléma viszont teljes megoldást kívánt a hallgatók és a kezdő tanszemélyzet létszámának nagymérvű megnövekedése miatt. Ez utóbbi körülmény azt az újabb igényt támasztotta egy leendő példatárral szemben, hogy az a feladatokon és végeredményeiken kívül még bő megoldási útmutatásokat is tartalmazzon. Ugyanakkor több matematikai értekezleten szorgalmazták, a legmeggyőzőbben *dr. Alexits* akadémikus professzor, hogy műszaki egyetemeinken *alkalmazott műszaki matematikát* oktassunk, és gyűjtsünk össze megfelelő műszaki, alkalmazott anyagot.

A minisztérium figyelmét ekkor felhívták néhány lelkes hallgató társaságában már korábban s hasonló szempontok szerint elindított gyűjtő munkámra. A minisztérium azonnal felkarolta kezdeményezésemet, megbízott egy *Műszaki Matematikai Gyakorlatok* című példagyűjtemény terveinek, szerkesztési elveinek kidolgozásával, majd rövidesen a mű szerkesztésével — egyúttal biztosítva több matematikai tanszék néhány tapasztaltabb adjunktusának, illetve tanársegédjének közreműködését.

*Munkánk A. és B.** része jórészt a matematikának a műszaki felsőoktatásban világszerte szokásossá vált fejezeteit tárgyalja, de a megszokott keretekhez képest egyeseket kibővítve, főleg a *B.* részben, a klasszikus műszaki matematika érintett fejezeteit. A sorozat *C.* része a modern műszaki matematika néhány olyan nagy jelentőségű fejezetébe nyújt bevezetést, amelyek bevonulása műszaki felsőoktatásunkba az utóbbi években megkezdődött.

Munkánk első célja: a szokásos tananyaggal kapcsolatban mindazt előadni, aminek műszaki egyetemeinken a helyesen, korszerűen, a műszaki igényeknek megfelelően vezetett matematikai gyakorlatokon szerepelnie kell. Esti és levelező oktatásunkban idevágó füzeteink estleg még szélesebb körű felhasználásra is kerülhetnek.

Munkánk második (de nem mellékes) *célja:* gyakorlati és műszaki anyagot nyújtani a különböző tagozatokon a felsőbb éves nappali és esti hallgatók speciális matematikai oktatásához, a szakmérnöki továbbképző tanfolyamok és a *Mérnöki Továbbképző Intézet* rendszeres matematikai oktatásához, továbbá az igényesebb hallgatók, a fiatal matematikai és műszaki tanszemélyzet, a kutató és üzemi mérnökök és aspiránsok egyéni vagy csoportos továbbtanulásához.

E példagyűjteménynél viszonylag újszerűnek mondható célkitűzések megvalósítása szintén *újszerű szerkesztési elveket* kívánt. Ennek megfelelően nem szorítkozunk, mint a

---

* A sorozat köteteinek címjegyzékét lásd a 2. oldalon!

legtöbb példatár, csupán feladatok és végeredményeik közlésére. Ellenkezőleg, megkíséreltük fejezetről fejezetre végigvezetni a következő rendszert: *a)* elméleti összefoglaló; *b)* bő magyarázat kíséretében részletesen megoldott, kisszámú jellegzetes mintapélda; *c)* az előbbiek alapján könnyen megoldható, csak végeredménnyel ellátott, nagyszámú gyakorló feladat; *d)* esetleg rövid útmutatással ellátott és csak vázlatosan megoldott különleges (csillagos) példák; *e)* esetleg egyes bizonyítások vázlatos közlése a különleges példák között; *f)* végül műszaki alkalmazások bemutatása. E láncszemek véleményünk szerint jól szolgálhatják a matematikai elmélet és a műszaki gyakorlat összekapcsolásának ügyét. E szerkesztési elvek legtapasztaltabb professzoraink helyeslésével találkoztak, továbbá egészen új szovjet példatárakban észleltünk többé-kevésbé hasonló szerkesztési elveket. Megjegyzendő, hogy bizonyára nem mindenütt sikerült e rendszert teljes egészében megvalósítanunk; olykor e sorrendtől is eltértünk.

Az *A. rész füzeteiben,* professzorainkkal egyetértésben, eléggé óvatosan méreteztük a műszaki alkalmazások számát a többi példákhoz képest. Erre késztetett az elsőéves hallgatók műszaki ismereteinek hiányossága, valamint az e füzetekben közölt matematikai apparátus elégtelensége komolyabb műszaki problémák megoldásához. Még így is lényegesen bővebb műszaki példaanyagunk, mint az ismert példatáraké.

A *B.* és *C. rész füzeteiben* — az olvasó egyre növekvő matematikai és műszaki ismereteire támaszkodva — nagy bőségben tárgyalunk problémákat a klasszikus és modern műszaki matematika legkülönbözőbb területeiről, amelyekben kézzelfoghatóan jelentkezik a matematika és a technika egysége.

Közismert tény, hogy a híressé vált külföldi példatárak legtöbbje évtizedek alatt számos kiadás folyamán forrt ki, tökéletesedett. E viszonylag újszerű célkitűzésekkel készülő példatár fiatal szerzői tehát érthetően sok-sok *észrevételt,* megjegyzést, tanácsot várnak és kérnek ezúton is az olvasóktól, hogy e sorozat kitűzött céljának minél hamarabb és minél teljesebb mértékben megfeleljen.

A minisztérium és professzoraink tanácsát követve, bátran merítettünk a legkülönbözőbb jó *forrásokból,* sokkal inkább törekedve az anyag gazdagságára és megbízhatóságára, mintsem — példatárnál amúgy is szegényes sikert ígérő — eredetiségre. Természetesen szépszámú új feladatot is készítettünk.

A szemléltető anyag gondos szerkesztése és megrajzolása *Gyurcsy Endre* okl. vill. m. kolléga érdeme.

E sorozat megszületését megkönnyítette az a körülmény, hogy a minisztérium egyetemi tankönyvosztálya egy ilyen mű szükségességét, jelentőségét és elvi vonatkozásait igen világosan látta, és másokkal is meg tudta értetni.

Ki kell emelnem *Egerváry* akadémikus professzor számos szakmai megjegyzését és műegyetemi előadásait, amelyekből merített tanulságok nagymértékben emelik munkánk értékét. Állandó érdeklődésével és gazdag pedagógiai és módszertani útmutatásokkal volt segítségünkre *Gallai* professzor. Meg kell emlékeznem az *Alkalmazott Matematikai Intézetről,* mely modern könyvtárával és alkotó légkörével a gyűjtés legelejétől mindvégig támogatta munkánkat.

Köszönettel tartozom a *Tankönyvkiadó Vállalatnak,* különösképpen a *műszaki szerkesztőségnek,* amely értékes segítséget nyújtott nekünk e nyomdailag nagy követelményeket támasztó sorozat műszaki munkálataival kapcsolatban.

Végezetül *munkánkat műszaki egyetemeink tanszemélyzetének és hallgatóinak ajánljuk.* Használják fel e füzeteket a maguk, illetve a leendő mérnökök ezreinek képzésére! Észrevételeikkel segítsék elő e gyűjtemény mielőbbi tökéletesedését!

Budapest, 1952. szeptember 1.

A SZERKESZTŐ

ELŐSZÓ A SOROZAT MÁSODIK KIADÁSÁHOZ

Közel nyolc év munkájával — néhány kisebb jelentőségű módosítástól eltekintve az eredeti terv szerint — sikerült befejeznünk a *Műszaki Matematikai Gyakorlatok* c. sorozatot 23 kötetben. Munkaközösségünk céltudatossága és munkakedve, a *Minisztérium* és a *Tankönyvkiadó* kitartó támogatása, bírálóink értékes segítsége és nem utolsósorban egyre növekvő olvasótáborunk lelkes érdeklődése lehetővé tette az összes nehézségek leküzdését. Noha távolról sem tekintjük tökéletesnek, véglegesnek könyveinket, mégis az első kiadás befejezésekor a magyar műszaki matematikai felsőoktatás érdekében végzett odaadó munka jó érzése tölti el munkaközösségünket.

Könyveinket a hazai szakemberek és szaklapok kedvezően fogadták, és számos hasznos észrevétellel, tanáccsal voltak segítségünkre. Köteteink az évek során több keleti és nyugati államba is eljutottak. Ez év nyarán pedig abban a megtiszteltetésben részesültünk, hogy a *belgiumi Nemzetközi Mérnöki Matematikai Kongresszus* vezetősége kiállította és idegen nyelvű, vetített képes előadásban is bemutatta a teljes sorozatot, figyelemre méltó érdeklődés és elismerés mellett.

Most, a második kiadás során a sorozat fejlesztésének, korszerűsítésének — a megalkotásánál semmivel sem könnyebb — munkája vár ránk. Természetesen, az első kiadás munkálatai során szerzett gazdag tapasztalataink, az újabb hazai és külföldi szakirodalom tanulmányozása, továbbá a könyveinkről kapott hazai és külföldi észrevételek jelentős segítségünkre lesznek. Remélhetőleg, módunk lesz a műszaki matematikának néhány újabb diszciplínáját is feldolgozni a sorozatban.

Amikor munkaközösségünk változatlan céltudatosságáról és munkakedvéről biztosíthatom a magyar műszaki matematika híveit, egyben ismét kérem bírálóink, olvasóink, valamint a *Minisztérium* és a *Tankönyvkiadó* további szakmai, erkölcsi és anyagi támogatását, nemkülönben az *Egyetemi Nyomda* ismert színvonalú munkáját.

Budapest, 1958. szeptember 1.

A SZERKESZTŐ

ELŐSZÓ A SOROZAT HARMADIK KIADÁSÁHOZ

1963-ban szükségessé vált a sorozat harmadik kiadásának megindítása, a második kiadás lendületes folytatása mellett. A harmadik kiadás egyrészt olyan hagyományos, de széles körben érdekes tárgyú kötetekkel kezdődött meg, mint az A. I. és A. X., másrészt olyan modern alkalmazási területű és emiatt mind inkább keresetté vált kötetekkel, mint az A. IX., B. IV., B. I—II—III., B.VII..

Az utóbbi második kiadások egy éven belüli elfogyása — éppen a matematikai programozás lineáris algebrai segédeszközeivel, síkbeli rugalmasságtan korszerű, komplex függvénytani módszerével, a héjelmélet modern, tenzorszámítási tárgyalásmódjával kapcsolatos bővítés után — kézzel foghatóan bizonyítja a sorozat második kiadásának előszavával kitűzött fejlesztési tervek és a megvalósításukra kifejtett erőfeszítés helyességét.

E körülmény buzdítás munkaközösségünk részére és megnyugtatás a Kiadó számára is, látván, hogy újabb áldozatai hasznos célt és reális igényeket szolgálnak.

Említésre méltó, hogy sorozatunk vagy egyes kötetei 1958 óta több újabb külországban (pl. a Szovjetunióban, NDK-ban, Jugoszláviában, Egyiptomban, USA-ban, Angliában,

NSZK-ban) és nemzetközi fórumokon (pl. az NDK Matematikai Társulatának 1963. évi nemzetközi ülésszakán) tudtak helytállni, és versengeni a hasonló rendeltetésű külföldi munkákkal.

Ilyen kedvező adottságok között természetes, hogy lelkesen folytatjuk a sorozat fejlesztésének, korszerűsítésének nagy munkáját, továbbra is kérve ehhez a Minisztérium, a Kiadó és nem utolsósorban műszaki olvasótáborunk áldozatkész, buzdító támogatását.

Budapest, 1964. júl. 15.

A SZERKESZTŐ

ELŐSZÓ A KÖTET ELSŐ KIADÁSÁHOZ

A matrixszámítás hazai történetében az utolsó évtized az elméleti kutatások fellendülésének, valamint a műszaki és egyéb alkalmazások széles kibontakozásának időszaka volt. Ezalatt sok-sok mérnökünk barátkozott meg a matrixszámítással és győződött meg jelentékeny előnyeiről, főleg a bonyolult elektromos és mechanikai rendszerek vizsgálatánál. A matematikai programozási módszerek és az elektronikus számítógépek bevonulása tudományos-műszaki életünkbe, újabb lökést adott a matrixszámítás iránti érdeklődésnek. Néhai *Egerváry* professzor és egykori iskolájának tagjai ambicionálták, hogy — szóban és írásban — megkönnyítsék a mérnököknek e szép diszciplína minél szélesebb körű alkalmazását. Hogy ezt nem minden eredmény nélkül tették, bizonyítja többek közt az is, hogy sorozatunk *C. IV. Mátrixszámítás* c. kötetének második kiadása *Matematikai programozás* c. függelékkel bővült. Ez egyelőre a lineáris programozás matematikai alapjaira, a közönséges és módosított szimplex módszerre, valamint az integer és a kvadratikus programozás alapkérdéseire tudott kiterjeszkedni. A matematikai programozás sok nagyfontosságú speciális problémájáról teljes körkép felvázolása előbb-utóbb önálló és bizonyára többször bővítendő kötetet fog igényelni.

Hálás köszönetet mondok e helyen is a függelék lektorainak, *dr. Kádas Kálmán* egyetem tanár, dékán úrnak, valamint *dr. Seitz Károly* adjunktus kollégának, értékes észrevételeikért.

Szeretném remélni, hogy munkám — e szerény terjedelmében is — hasznosan fogja szolgálni műszaki felsőoktatásunk korszerűsítésének ügyét. Egyidejűleg szabadjon az egész munkán átvonuló ún. *matrixalgoritmikus módszeremet*, mellyel néhai mesterem, *Egerváry* akadémikus nyomdokain igyekeztem továbbhaladni, szakkollégáim szíves figyelmébe ajánlanom.

Budapest, 1964. márc. 1.

DR. FAZEKAS FERENC

ELŐSZÓ A KÖTET MÁSODIK KIADÁSÁHOZ

Könyvem új kiadása, melyet most az olvasó szíves figyelmébe ajánlok, jó két évvel, kb. háromszoros terjedelemben és önálló kötetként követi az előzőt.

Maga e körülmény is sokat sejtető. Érzékelteti a téma viharos fejlődését és kiemelkedő jelentőségét a korszerű nagyüzemi vezetés tudományossága szempontjából. Jelzi továbbá a reformmozgalom által felpezsdített műszaki felsőoktatásunk s ezen belül már harmadik kiadásban futó könyvsorozatunk gyors reagálását általában a műszaki gyakorlat és tudomány igényeire, különösen pedig a heteken belül bevezetendő új gazdasági mechanizmus szükségleteire.

Buzdítólag hatottak rám e komoly igények és kielégítésükhöz igyekeztem könyvemmel a legjobb tudásom szerint hozzájárulni. A tájékozott olvasó, aki e modern téma súlyosságát is ismeri, megítélheti, mennyiben járt sikerrel e törekvésem.

A kötet 1. §-a a téma lineáris algebrai segédeszközeit vonultatja fel, mégpedig jelentősen kibővítve, főleg a különféle lineáris algebrai vizsgálatokra (TMA, R-NMA), a lineáris egyenletrendszerek megoldására (MMA) alkalmas matrixalgoritmusokkal. Ez az anyag egyrészt hasznos hazai hagyományokat folytat, másrészt alaposan előkészíti a továbbiakban alkalmazott sajátos módszereket.

A 2. § a matematikai programozás (MP) helyének kijelölése, fejlődésének vázolása után — a lineáris programozást (LP) és szimplex módszerét vezeti be. Ezután részletesen tárgyalja a LP-nak a szerző által kialakított szimplex-matrixalgoritmusát (SMA), kitérve normál- és nem normál-feladatokra egyaránt. Megadja ezt módosított alakban is (SmMA), kiterjeszti ún. variánsfeladatokra, szállítási és integer lineáris programozásra (StMA, SiMA), sőt az újabban ismét előtérbe került CSEBISEV-approximációra (ScMA) is. Megmutatja az SMA változatos műszaki-gazdasági alkalmazásait és nem utolsósorban — elektronikus számítógépi felhasználásához — elvi tömbvázlatát és ALGOL-60-as programját.

A 3. § — hazai eredetű szakkönyvben először — a nemlineáris programozás (NP) vektoranalitikus segédeszközeit, általános és konvex feladatát, elméleti alapjait (LAGRANGE-multiplikátor, KUHN—TUCKER-tétel) és egyes megoldási módszereit (pl. gradiens-) tárgyalja. Konkrét NP-problémaként a kvadratikus programozást és a centrumtelepítést ismerteti, ezeket is matrix-, ill. vektoralgoritmikus módszerrel (SqMA, CVA) és számítógépi vonatkozással.

Az egész köteten végigvonuló matrixalgoritmikus módszerek (MAM), melyek itt a korábbinál sokkal bővebben és elmélyültebben kifejtve, jóval szélesebb körűen alkalmazva és gépi vonatkozásokkal is ellátva olvashatók, sajátos, más szerzőkétől eltérő tárgyalásmódot képviselnek. Ezek a közelmúltban számos hazai előadássorozatomban (a nappali, a szakmérnöki oktatásban, a Mérnöki Továbbképző Intézetben, a MTESz Operációkutatási Tanfolyamán stb.) és közleményben nyertek bemutatást, sőt jó néhány nemzetközi fórum, szaklap és referáló folyóirat (Berlin, Drezda, Prága, Bécs, Darmstadt; ZAMM, Ref. Zsurnal), legutóbb a moszkvai matematikai világkongresszus nyilvánosságát is kiállták. Ezért úgy érzem, hogy a MAM-mal sikerült az idevágó értékes hazai hagyományokat és eredményeket gyarapítani. Egyébként a MAM több irányú továbbfejlesztésére és kiszélesítésére látszik még lehetőség (pl. geometriai és nemlineáris vonatkozásban) és remélem, hogy később ezekre is kitérhetek.

Nagy elismeréssel kell megemlékeznem a Tankönyvkiadó V. munkatársainak magas fokú szakmai megértéséről (a legfrissebb külföldi, pl. moszkvai tapasztalatokat szedés közben engedték bedolgozni!), nemkülönben az Egyetemi Nyomda szedőinek kiemelkedő színvonalú munkájáról; öröm volt együttdolgoznom velük. Lektoraimnak a kötet többirányú fejlesztését támogató hasznos észrevételeikért, Feleségemnek a nagyigényű kéziratrendezési munkálatokért, kollégáimnak pedig buzdító érdeklődésükért mondok őszinte köszönetet.

Budapest, 1966. nov. 15.

DR. FAZEKAS FERENC

MATEMATIKAI PROGRAMOZÁS
MATRIXALGORITMIKUS MÓDSZEREKKEL
(MAM)

Néhai Mesterem,

Dr. Egerváry Jenő (1891–1958)

kétszeres Kossuth-díjas akadémikus,
egyetemi tanár

e m l é k é r e,

egyes vizsgálatainak folytatásával

TARTALOMJEGYZÉK

1. §. A LINEÁRIS ALGEBRA ÉS MATRIXALGORITMIKUS MÓDSZEREI (LA—MAM)

Könyvünk dús és nem éppen könnyű fajsúlyú programja, és vele szemben a könyv erősen korlátozott terjedelme arra késztette a szerzőt, hogy a lineáris algebrai *alapfogalmakról csupán rövid összefoglalót* közöljön*, és *bővebben csak* a lineáris algebrai vizsgálatoknak és a lineáris egyenletrendszer megoldásnak *matrixalgoritmikus módszereit* fejtse ki. Ezek természetes *előkészítést* nyújtanak könyvünk főtémájához, a lineáris programozás matrixalgoritmikus módszeréhez.

A szerző reméli, hogy a lineáris algebra és programozás eme újszerű, irodalmi nyomokból és hazai előzményekből *egyéni vizsgálatokkal* kifejlesztett, matrixalgoritmikus módszerei (MAM) — a kedvező kezdeti tapasztalatok után — tartósan elnyerik a hazai és külföldi szakkörök szimpátiáját.

a) Vektor- és matrixalgebrai alapismeretek

α) Halmazelméleti segédeszközök

I°. A halmazokról általában. Ezek bővebben a szerző [34] munkájának a) α) II° pontjában olvashatók. Emeljük ki onnan az alábbiakat!

1'. A *halmaz* (sokaság, összesség, rendszer stb.) a matematika egyik *alapfogalma*, amely tehát egyszerűbb fogalmakra vissza nem vezethető.**

Ez az alapfogalom igen *általános* s ezért a matematika számos területén használható korszerű segédeszközül, másrészt *egyszerű* is s ezért a mindennapi élet kézzel fogható tényeivel példázható.

1. Pl. Halmazt képeznek pl. *1.* Egyetemünk évfolyamai; *2.* egy évfolyam hallgatói; *3.* egyetemünk sportolói; *4.* egy könyvtár könyvei; *5.* egy könyv lapjai; *6.* egy lap betűi; *7.* a naprendszer bolygói; *8.* egy test molekulái; *9.* egy raktárban felhalmozott árucikkek; *10.* az összes egész számok; *11.* a nemnegatív egész számok; *12.* egy (nyílt) egyenesszakasz pontjai; *13.* a sík egy adott ponttól előírt távolságra levő pontjai; *14.* az összes rendezett valós szám-n-esek;

2'. Azokat a „dolgokat" (objektumokat), amelyekből egy halmaz felépül, az illető *halmaz elemeinek* nevezzük. Láttuk, hogy egy halmaz elemei a legkülönfélébb „dolgok" lehetnek, de bizonyos szempontból összetartoznak.

* Részletek tekintetében könnyen hozzáférhető hazai könyvekre [34, 39] és jegyzetekre [31, 32] utalhatunk.

** L. pl. *Grebencsa—Novoszjolov:* Mat. analízis I. kt.

II°. **Főbb fogalmak, jelölések** *1'.* Lássuk a leghasználatosabbakat!

Halmaz	$H, K, L, E, \ldots$	alaphalmaz	$X = \{x\}$,
elemeik	$h, k, l, e, \ldots$	feltételes halmaz	$X = \{x; \alpha(x)\}$,
h eleme H-nak	$h \in H$,	véges halmaz	$\{x_1, x_2, \ldots, x_n\}$,
k nem eleme H-nak	$k \notin H$,	megszámlálhatóan végtelen halmaz	$\{x_1, x_2, \ldots, x_n, \ldots\}$
K részhalmaza H-nak	$K \subset H$,	kontimuum (egy. dim.)	$\{x; a < x < b\}$.
K egyenlő H-val	$K = H$,		
üres halmaz	Θ,		

2'. Említsük meg továbbá az alábbi ún. *halmazműveleteket:*

H_1 és H_2 egyesítése (uniója)	$H_1 \cup H_2$	H_1 és H_2 diszjunkt	$H_1 - H_2 = \Theta$
H_1 és H_2 közös része (metszete)	$H_1 \cap H_2$	H komplementuma	$CH = X - H$
H_1 és H_2 különbsége	$H_1 - H_2$	(A fentieket célszerű *síkbeli ponthalmazokon* szemléltetni!)	

Lássunk most ezekre néhány példát!

2. Pl. Legyen az $X = \{x\}$ alaphalmaz a kar egész hallgatósága, a H_i, H_{ij}, L_i, S_i, P_i, K_i, Z_i pedig rendre az i-edik ($i = 1, 2, \ldots, 6$) évfolyam teljes hallgatósága, ill. j-ed rendű ($j = 1, 2, \ldots, 5$), leány, sportoló, pesti, kollégista, zeneértő részhallgatósága. Akkor pl.

$H_i \subset X$: az i-edik évfolyam része az egész kari hallgatóságnak;

$h_{23} \notin H_4$: közepes rendű másodéves nem tartozik a negyedik évfolyamhoz ($h_{23} \in H_{23}$);

$H_{51} = \Theta$: az ötödik évfolyamban nincs elégtelen hallgató;

$Z_3 \subset H_{34}$: a harmadéves zenekedvelők mind jó rendűek;

$X_{25} = \{x; \alpha(x) > 25\}$: a kari hallgatóságnak $\alpha = 25$ évnél idősebb része.

$\{L_1, L_2, \ldots, L_6\}$: a leány-részhallgatóságok halmaza. —

3. Pl. Legyen X, H_i, H_{ij}, L_i, S_i, P_i, K_i, Z_i jelentése ugyanaz, mint az előző példában. Akkor pl.

$H_1 \cup H_2$: a két alsó évfolyam hallgatósága;

$H_2 - (H_{25} \cup H_{24})$: a második évfolyam közepesnél nem jobb rendű hallgatósága;

$C\left(\bigcup_{i=1}^{6} L_i\right)$: a kar egész fiúhallgatósága;

$(H_{45} \cup H_{44}) \subset K_4$: a jeles és jó rendű negyedévesek mind kollégisták;

$S_2 \cap Z_2 = P_2$: a második évfolyam zeneértő sportolói éppen a pestiek.

$\left[\bigcup_{i=3}^{6} (K_i \cap S_i)\right] \cap \left(\bigcup_{i=3}^{6} H_{i1}\right) = \Theta$: a négy felső évfolyam kollégista sportolói között egy elégtelen rendű sincs. —

Tegyünk még említést a

$$H_i \in T, \quad \bigcup_{i=1}^{n} H_i \in T, \quad \bigcap_{i=1}^{n} H_i \in T \qquad (H_i \subset X,\ i = 1, 2, \ldots, n)$$

tulajdonságú T *halmaztestről*, amelyet $n \to \infty$ esetén *Borel*-féle halmaztestnek nevezünk.*

3'. Vizsgálatainkban csak olyan halmazokról lesz szó, amelyeknek elemeire (!) valamilyen *algebrát* (vagyis bizonyos törvényszerűségeknek eleget tevő műveleteket) értelmezünk és

---

* A valószínűségszámítás megalapozásánál fontos szerepe van.

amelyeket rendszerint névvel is ellátunk. Ilyen „műveletes" halmaz pl. a (most következő) számtest, továbbá a (későbbiekben ismertetendő) lineáris* tér és euklideszi tér stb.

A *(szám-)test* olyan $K = \{\alpha, \beta, \gamma, \ldots\}$ (szám-)halmaz, amelynek elemeire 2 egyenes (és 2 fordított) művelet van értelmezve, az alábbi ún. *testaxiómák* teljesülése mellett:

A) $\alpha + \beta \in K, \ \alpha\beta \in K;$ *B)* $\alpha + \beta = \beta + \alpha, \ \alpha\beta = \beta\alpha;$

C) $(\alpha + \beta) + \gamma = \alpha + (\beta + \gamma), \ (\alpha\beta)\gamma = \alpha(\beta\gamma);$ *D)* $(\alpha + \beta)\gamma = \alpha\gamma + \beta\gamma;$

E) $\beta + \xi = \alpha, \ \xi \equiv \alpha - \beta;$ *F)* $\beta\eta = \alpha, \ \eta \equiv \frac{\alpha}{\beta} \ (\beta \neq 0).$

Nyilván testet képez a racionális, a *valós* és a *komplex számok* halmaza; itt csak a valós számtest (K_v) érdekes.

A (szám-)test egyébként egyike az ún. *algebrai struktúráknak;* a többiekről l. a [34] idézett helyét.

β) Vektoralgebra. Determinánsok

I°. A lineáris tér és sajátságai. Bővebb tárgyalása a szerző [34] munkájának a) β) helyén olvasható. Emeljük ki onnan az alábbiakat!

1'. Definíció: Az **a**, **b**, **c**, ... elemeket *vektoroknak,* $L = \{\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}, \ldots\}$ halmazukat pedig *lineáris térnek* nevezzük, ha értelmezve van benne az *összeadás* ($\mathbf{a} + \mathbf{b} \in L$) és a *számmal való szorzás* ($\alpha\mathbf{a} \in L, \ \alpha \in K$), az alábbi *axiómák* teljesülése mellett:

A) $\mathbf{a} + \mathbf{b} = \mathbf{b} + \mathbf{a},$ *B)* $(\mathbf{a} + \mathbf{b}) + \mathbf{c} = \mathbf{a} + (\mathbf{b} + \mathbf{c}),$ *C)* $\mathbf{a} + \mathbf{x} = \mathbf{a}, \ \mathbf{x} \equiv \mathbf{0};$

D) $\mathbf{a} + \mathbf{y} = \mathbf{0}, \ \mathbf{y} \equiv -\mathbf{a};$ *E)* $1 \cdot \mathbf{a} = \mathbf{a},$ *F)* $\alpha(\beta\mathbf{a}) = (\alpha\beta)\mathbf{a},$

G) $(\alpha + \beta)\mathbf{a} = \alpha\mathbf{a} + \beta\mathbf{a}, \ \alpha(\mathbf{a} + \mathbf{b}) = \alpha\mathbf{a} + \alpha\mathbf{b}.$

A *C—D)*-ből következik a *kivonás* ($\mathbf{a} - \mathbf{b} \in L$) értelmezése: $\mathbf{b} + \mathbf{z} = \mathbf{a}, \ \mathbf{b} + (-\mathbf{b}) + \mathbf{z} = \mathbf{0} + \mathbf{z} = \mathbf{z} = \mathbf{a} + (-\mathbf{b}) \equiv \mathbf{a} - \mathbf{b}.$

A fenti axiómáknak a legkülönfélébb természetű halmazokkal lehet eleget tenni, a két műveletnek egyiknél ilyen, másiknál olyan értelmezése mellett. Közülük itt elsősorban *a rendezett valós szám-n-esek l. tere,* az

$$L = \{\mathbf{a}, \mathbf{b}, \ldots\} = \{(a_1, a_2, \ldots, a_n), (b, b_2, \ldots, b_n), \ldots\}$$

l. tér érdekel bennünket, a két művelet

$$\mathbf{a} + \mathbf{b} = (a_1 + b_1, a_2 + b_2, \ldots, a_n + b_n), \quad \alpha\mathbf{a} = (\alpha a_1, \alpha a_2, \ldots, \alpha a_n) \quad (a_i, b_i, \alpha \in K_v)$$

értelmezése mellett, amelynél az *A)—F)* axiómák ellenőrizhetően** teljesülnek. (Más l. terekről lásd az 1—2. feladatot!)

2'. Idézzük fel a l. tér néhány fontosabb fogalmát!

*Lineáris kombináció:**** $\sum_{i=1}^{p} \alpha_i\mathbf{a}_i \equiv \alpha_1\mathbf{a}_1 + \alpha_2\mathbf{a}_2 + \ldots + \alpha_p\mathbf{a}_p$: ez lehet pozitív ($\alpha_i > 0$), nemnegatív ($\alpha_i \geqq 0$), negatív ($\alpha_i < 0$), nempozitív ($\alpha_i \leqq 0$) és ún. konvex, ha $\alpha_i \geqq 0$, $\sum_i \alpha_i = 1 \ (i = 1, 2, \ldots, p)$.

* Rövidítés: lineáris = *l.*

** L. pl. [34] β/I°

*** További rövidítések: lineáris függetlenség = l. ftls; lineárisan független = l. ftl; lineáris függés = l. fs, lineárisan függő = l. f; lineáris kombináció = l. komb.

*Lineáris függetlenség:** ha az

$$\alpha_1\mathbf{a}_1 + \alpha_2\mathbf{a}_2 + \dots + \alpha_p\mathbf{a}_p = \mathbf{0}$$

vektoregyenlet csupán az

$$\alpha = (\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_p) = (0, 0, \dots, 0) = \mathbf{0}$$

triviális megoldással rendelkezik; ellenkező esetben lineáris függés* áll fenn. — Pl. l. ftl az

$$\mathbf{e}_i = (\underbrace{0}_{1}, \dots, \underbrace{1}_{i}, \dots, \underbrace{0}_{n}) \quad (i = 1, 2, \dots, n)$$

vektor-n-es, vagy pl. az

$$\mathbf{e}'_i = (\underbrace{0}_{1}, \dots, \underbrace{1}_{i}, \dots, \underbrace{1}_{n}) \quad (i = 1, 2, \dots, n)$$

is. (L. a 3—4. példát!)

L. ftls esetén $\mathbf{a}_i \neq \mathbf{0}$, mert különben $\alpha = \mathbf{0}$ mellett $\alpha = (0, \dots, \alpha_i, \dots, 0) \neq \mathbf{0}$ is megoldás lenne. — Ha $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \dots, \mathbf{a}_l, \dots, \mathbf{a}_p$ l. ftl akkor $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \dots, \mathbf{a}_l$ is az, mert pl. $\alpha_l \neq 0$ az előbbit is l. f-vé tenné. — L. fs és pl. $\alpha_1 \neq 0$ esetén

$$\mathbf{a}_1 = \beta_2\mathbf{a}_2 + \dots + \beta_p\mathbf{a}_p \qquad (\beta_i = -\alpha_i/\alpha_1,\ i \neq 1).$$

— Fordítva, ilyen előállítás esetén

$$\gamma_1\mathbf{a}_1 + \gamma_2\mathbf{a}_2 + \dots + \gamma_p\mathbf{a}_p = \mathbf{0} \qquad (\gamma_i = -\beta_i,\ \ \gamma_1 = 1 \neq 0),$$

azaz l.fs áll fenn.

Rangszám (az $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \dots, \mathbf{a}_p$ vektorrendszeré, vagy az $\alpha_1\mathbf{a}_1 + \alpha_2\mathbf{a}_2 + \dots \alpha_p\mathbf{a}_p = \mathbf{b}$ l. vektoregyenleté): az $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \dots, \mathbf{a}_p$ vektorok közt található l. ftl vektorok maximális száma:

$$r = \varrho\,(\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2 \dots, \mathbf{a}_p), \qquad r \leqq p.$$

Vektorrendszer rangszáma — beláthatóan — nem változik l. f (vagyis a többi l. komb-jaként előállítható) vektor elvételével, vagy hozzácsatolásával. Vektorrendszer rangja — beláthatóan — legfeljebb q lehet, ha valamennyi vektora l. f egy $\mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2, \dots, \mathbf{b}_q$ vektorrendszertől.

Dimenzióját egy L l.tér a benne található l. ftl vektorok maximális számáról (n) nyeri; jele L_n. — Az $L = \{(a_1, a_2, \dots, a_n), (b_1, b_2, \dots, b_n), \dots\}$ l. tér, igazolhatóan*, n-dimenziós, $L = L_n$.

Bázist (alapvektorrendszert) képez egy L_n l. tér bármely l.ftl vektor-n-ese; jele $B_n = \{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \dots, \mathbf{e}_n\} \subset L_n$. — Pl. az $L_n = \{(a_1, a_2, \dots, a_n), (b_1, b_2, \dots, b_n), \dots\}$ l. tér bázisai: $B_n = \{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \dots, \mathbf{e}_n\}$, $\mathbf{e}_i = (\underbrace{0}_{1}, \dots, \underbrace{1}_{i}, \dots, \underbrace{0}_{n})$;

$$B'_n = \{\mathbf{e}'_1, \mathbf{e}'_2, \dots \mathbf{e}'_n\},\ \mathbf{e}'_i = (\underbrace{0}_{1}, \dots, \underbrace{1}_{i}, \dots \underbrace{1}_{n}), \text{ stb.}$$

(L. a 3—5. példát!) Megjegyzendő, hogy az L_n tér különféle bázisai egyenértékűek, egyikük sincs különösebben kitüntetve.

* L. pl. [34] β/IV°

Igazolható*, hogy bármely $\mathbf{r} \in L_n$ vektor *egyértelműen előállítható* valamely $B_n \subset L_n$ bázis $\mathbf{e}_i$ vektorainak (x_i koordinátákkal képzett) l. komb-jaként, ún. báziselőállításban így:

$$\mathbf{r} = x_1\mathbf{e}_1 + x_2\mathbf{e}_2 + \ldots + x_n\mathbf{e}_n.$$

(L. a 6. példát!)

Az L_n tér tetszőleges $B_n = \{\mathbf{e}_1, \ldots, \mathbf{e}_k, \ldots, \mathbf{e}_n\}$ *bázisának valamely* $\mathbf{e}_k$ *vektorát kicserélve* egy, reá vonatkozólag nemzerus, a_k koordinátájú, egyébként tetszőleges

$$(\mathbf{0} \neq) \,\mathbf{a} = a_1\mathbf{e}_1 + \ldots + a_k\mathbf{e}_k + \ldots + a_n\mathbf{e}_n \in L_n \qquad (a_k \neq 0)$$

vektorral, ily módon — igazolhatóan — az L_n tér egy újabb $B'_n = \{\mathbf{e}_1, \ldots, \mathbf{a}, \ldots, \mathbf{e}_n\}$ bázisához jutunk. Egyébként egy $\mathbf{b} \in L_n$ vektor B_n-báziselőállításából

$$\mathbf{b} = b_1\mathbf{e}_1 + \ldots + b_k\mathbf{e}_k + \ldots + b_n\mathbf{e}_n =$$

$$= b_1\mathbf{e}_1 + \ldots + \frac{b_k}{a_k}(-a_1\mathbf{e}_1 - \ldots + \mathbf{a} - \ldots - a_n\mathbf{e}_n) + \ldots + b_n\mathbf{e}_n =$$

$$= (b_1 - \delta a_1)\mathbf{e}_1 + \ldots + \delta\mathbf{a} + \ldots + (b_n - \delta a_n)\,\mathbf{e}_n \qquad \left(\delta = \frac{b_k}{a_k},\ a_k \neq 0\right)$$

módon nyerhető B'_n-báziselőállítása. (L. a 7. példát!)

Altérnek (L') mondjuk az L l. térnek mint vektorhalmaznak olyan részhalmazát, amely — az összeadás és a számmal való szorzás műveletével ellátva — maga is l. teret képez, azaz

$$\mathbf{r} \in L',\ \mathbf{q} \in L' \text{ esetén } \mathbf{r} + \mathbf{q} \in L',\ \alpha\mathbf{r} \in L' \quad (\alpha \in K_v,\ L' \subset L).$$

Az L_n l. tér $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \ldots, \mathbf{a}_r, \ldots, \mathbf{a}_m$ vektoraival származtatott, generált alterén az

$$L'_n = (x_1\mathbf{a}_1 + x_2\mathbf{a}_2 + \ldots + x_r\mathbf{a}_r + \ldots + x_m\mathbf{a}_m) \qquad (x_j \in K_v)$$

vektorhalmazt értjük. Ha a generáló vektor-m-esből csak r, pl. $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \ldots, \mathbf{a}_r$ l. ftl, akkor alterünk r dimenziós: $L'_n = L_n^{(r)}$ és e l. ftl vektor-r-es az $L_n^{(r)}$ altér egy $B_n^{(r)}$ bázisát képezi. (L. a 8. példát!)

3'. Említsünk meg néhány L_n térbeli *geometriai vonatkozást!*

Hiperegyenes ($\mathbf{r}_0$ hiperponton átmenő, $\mathbf{v}$ irányú):

$$\mathbf{r} = \mathbf{r}_0 + t\mathbf{v} \qquad (-\infty < t < \infty).$$

Hiper-egyenesszakasz (ún. egydim. szimplex):

$$\mathbf{r} = t\mathbf{b} + (1 - t)\mathbf{a} \qquad (0 \leqq t \leqq 1).$$

Hipersík ($\mathbf{r}_0$-on átmenő, $\mathbf{a}$-val és $\mathbf{b}$-vel $||$):

$$\mathbf{r} = \mathbf{r}_0 + u\mathbf{a} + v\mathbf{b} \qquad (-\infty < u,\ v < \infty).$$

Hiperháromszög (ún. kétdim. szimplex):

$$\mathbf{r} = (1 - u)\,\mathbf{a} + (1 - v)\,u\mathbf{b} + uv\mathbf{c} \qquad (0 \leqq u,\ v \leqq 1).$$

Konvex poliéder ($\mathbf{a}_j$ csúcspontokkal):

$$\mathbf{r} = t_1\mathbf{a}_1 + \ldots + t_m\mathbf{a}_m \qquad \left(0 \leqq t_j \leqq 1,\quad \sum_{j=1}^{m} t_j = 1\right).$$

* L. pl. [34] β III°.

Szimplex (n-dimenziós):

$$\mathbf{r} = t_1\mathbf{a} + \ldots + t_{n+1}\mathbf{a}_{n+} \quad \left(0 \leqq t_j \leqq 1, \quad \sum_{j=1}^{n+1} t_j = 1\right).$$

Vektor ($\mathbf{c}$) *párhuzamossága*

$$\text{hiperegyenessel: } \mathbf{c} = t\mathbf{v}, \quad \text{hipersíkkal: } \mathbf{c} = u\mathbf{a} + v\mathbf{b}.$$

Vektor ($\mathbf{c}$) *kompatibilitása altérrel:*

$$\mathbf{c} \in L_n^{(r)}, \quad \text{ha} \quad \mathbf{c} = \gamma_1\mathbf{a}_1 + \ldots + \gamma_r\mathbf{a}_r.$$

Hangsúlyozandó, hogy mindeme formulákban $\mathbf{r}, \mathbf{r}_0, \mathbf{v}, \mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}, \mathbf{a}_j \in L_n$, mégpedig pl. $\mathbf{r} = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$, $\mathbf{a} = (a_1, a_2, \ldots, a_n)$ stb. A „hiper" jelzőt elhagyhatjuk, ha félreértéstől nem kell tartani.

A fentebbiek szemléltetésére lássunk néhány *példát, feladatot!*

1. Pl. Mutassuk meg, hogy a közönséges térbeli irányított egyenes darabok, az ún. *közönséges vektorok* $\{\mathbf{r}, \mathbf{q}, \ldots\} = \{\overrightarrow{OR}, \overrightarrow{OQ}, \ldots\}$ halmaza — az összeadás és a számmal való szorzás jól ismert műveletével ellátva — l. teret képez.

2. Pl. Mutassuk meg, hogy a közönséges vektorok rendezett koordinátahármasainak $\{\mathbf{r}, \mathbf{q}, \ldots\} = \{(x, y, z), (u, v, w), \ldots\}$ halmaza — az

$$\mathbf{r} + \mathbf{q} = (x + u, \quad y + v, \quad z + w), \qquad \alpha\mathbf{r} = (\alpha x, \alpha y, \alpha z)$$

műveletekkel ellátva — szintén l. teret képez.

3. Pl. Igazolandó, hogy az

$$\mathbf{e}_i = (\underset{1}{0}, \underset{2}{0}, \ldots, \underset{i}{1}, \ldots, \underset{n}{0}) = (\delta_{ij})_n \in L \quad (i, j = 1, 2, \ldots, n; \quad \delta_{ij} = \begin{cases} 1, & \text{ha } j = \\ 0, & \text{ha } i \neq j \end{cases}$$

(egység-) vektor-n-es l. ftl, vagy másként n-ed rendű l. ftl vektorrendszert képez. —

Tetszőleges x_i számokkal képezve az $\mathbf{e}_i$ vektorok

$$\sum_{i=1}^{n} x_i\mathbf{e}_i = \sum_{i=1}^{n} x_i(\underset{1}{0}, \underset{2}{0}, \ldots, \underset{i}{1}, \ldots, \underset{n}{0}) = \sum_{i=1}^{n} (0, 0, \ldots, x_i, \ldots, 0) = (x_1, x_2, \ldots, x_n) = \mathbf{r}$$

l. komb-ját, nyilvánvaló, hogy az $\mathbf{r} = \mathbf{0}$ feltétel kizárólag az $x_1 = x_2 = \ldots = x_n = 0$ csupa zérus együtthatókkal valósítható meg, ami egyszersmind az $\mathbf{e}_i$ vektorok l. ftls-ét jelenti. Ily módon $B_n = \{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \ldots, \mathbf{e}_n\}$ az L_n tér egyik (mégpedig a leghasználatosabb) bázisa.

4. Pl. Vizsgáljuk az

$$\mathbf{e}'_i = (0, 0, \ldots, 1, 1, \ldots, 1) = (e'_{ji}) \in L_n, \quad \text{ahol} \quad e'_{ji} = \begin{cases} 0, & \text{ha } j < i \\ 1, & \text{ha } j \geqq i \end{cases} \quad (i = 1, 2, \ldots, n)$$

vektor n-est. —

Ez is l. ftl, mert a

$$\xi_1\mathbf{e}'_1 + \xi_2\mathbf{e}'_2 + \ldots + \xi_n\mathbf{e}'_n = (\xi_1, \xi_1 + \xi_2, \ldots, \xi_1 + \xi_2 + \ldots + \xi_n) = (0, 0, \ldots, 0) = \mathbf{0}$$

vektoregyenletünk kizárólag csak a

$$\xi_1 = \xi_2 = \ldots = \xi_n = 0$$

triviális esetben áll fenn. Ily módon az $\mathbf{e}'_i$ vektorok is bázist képeznek; $B_n = \{\mathbf{e}'_1, \mathbf{e}'_2, \ldots, \mathbf{e}'_n\}$.

5. *Pl.* Mutassuk meg, hogy az L_3 térben bázist képez bármely nem komplanáris $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \mathbf{a}_3$ vektorhármas. —

Vektorhármasunk nem tartalmazhat kollineáris vektorpárt, azaz $x_i\mathbf{a}_i + x_j\mathbf{a}_j \neq \mathbf{0}$, ha $\mathbf{x}' = (x_i, x_j) \neq \mathbf{0}$, mert akkor éppen komplanáris lenne. Vegyük alapul most vektorhármasunk bármely vektorpárjának, pl. az $\mathbf{a}_1$-nek és az $\mathbf{a}_2$-nek a síkját, és állítsuk elő a harmadik — esetünkben az $\mathbf{a}_3$ — vektort a síkbeli $\mathbf{a}_{3p}$ és a rá merőleges $\mathbf{a}_{3n}$ komponensvektor összegeként, azaz $\mathbf{a}_3 = \mathbf{a}_{3p} + \mathbf{a}_{3n}$ $(\mathbf{a}_{3n} \neq \mathbf{0})$ módon. Akkor írható, hogy

$$x_1\mathbf{a}_1 + x_2\mathbf{a}_2 + + x_3\mathbf{a}_3 = (x_1\mathbf{a}_1 + x_2\mathbf{a}_2 + x_3\mathbf{a}_{3p}) + x_3\mathbf{a}_{3n} = \mathbf{a}_p + \mathbf{a}_n \neq \mathbf{0},$$

$$\text{ha} \quad \mathbf{x} = (x_1, x_2, x_3) \neq \mathbf{0},$$

mert $x_3 = 0$ esetén a normális $\mathbf{a}_n = \mathbf{0}$, de a síkbeli $\mathbf{a}_p = x_1\mathbf{a}_1 + x_2\mathbf{a}_2 \neq \mathbf{0}$, ha $\mathbf{x}' = (x_1, x_2) \neq \mathbf{0}$; és fordítva, $x_3 \neq 0$ esetén lehet $\mathbf{a}_p = \mathbf{0}$, de $\mathbf{a}_n \neq \mathbf{0}$. Vektoregyenletünk tehát csak az $\mathbf{x} = (x_1\ x_2, x_3) = \mathbf{0}$ triviális esetben áll fenn, így az $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \mathbf{a}_3$ vektorhármas l. ftl, s mint ilyen — a fentebbi definíció értelmében — az L_3 egyik bázisát képezi; $B_3 = \{\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \mathbf{a}_3\}$.

6. *Pl.* Határozzuk meg az $\mathbf{r} = (x_1, x_2, \ldots, x_n) \in L_n$ vektornak a

$$B'_n = \{\mathbf{e}'_i\} = \{(\underset{1}{\smile 0}, \underset{2}{\smile 0}, \ldots, \underset{i}{\smile 1}, \underset{i+1}{\smile 1}, \ldots, \underset{n}{\smile 1})\} \in L_n \qquad (i = 1, 2, \ldots, n)$$

bázisra vonatkozó ξ_i koordinátáit. —

Az előzők alapján írható, hogy

$$\mathbf{r} = (x_1, x_2, \ldots, x_n) = \sum_{i=1}^{n} \xi_i\mathbf{e}'_i = \sum_{i=1}^{n} \xi_i\,(0, 0, \ldots, 1, \ldots, 1) =$$

$$= (\xi_1, \xi_1 + \xi_2, \ldots, \xi_1 + \xi_2 + \ldots + \xi_n),$$

majd ebből — a megfelelő elemeket sorban egyeztetve — a

$$\xi_1 = x_1, \quad \xi_2 = x_2 - x_1, \ldots, \qquad \xi_n = x_n - x_{n-1}$$

koordinátákat kapjuk. Megjegyzendő, hogy az $\mathbf{r}$, ill. az $\mathbf{e}'_i$ vektor $x_1, x_2, \ldots, x_n$, ill. $0, 0, \ldots, 1, 1, \ldots, 1$ koordinátái a $B_n = \{\mathbf{e}_i\} = \{(0, 0, \ldots, 1, 0, \ldots, 0)\} = \{(\delta_{ij})\} \subset L_n$ $(i, j = 1, 2, \ldots, n)$ bázisra vonatkoztak.

7. *Pl.* Számítsuk át az

$$\mathbf{a} = 3\mathbf{e}_1 - 2\mathbf{e}_2 + 5\mathbf{e}_3 - \mathbf{e}_4$$

vektort a $B' = \{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{b}, \mathbf{e}_4\}$ bázisra, ahol

$$\mathbf{b} = 2\mathbf{e}_1, + 3\mathbf{e}_3 - \mathbf{e}_4.$$

Megjegyzés: Alkalmazzuk az I° 2'-ben e célra megadott formulát!

8. Pl. Adjuk meg az $L_4 = \{\mathbf{r}, \mathbf{a}_j, \ldots\} = \{(x_1, x_2, x_3, x_4), (a_{1j}, a_{2j}, a_{3j}, a_{4j}), \ldots\}$ l. tér $\mathbf{a}_1 = (0, 1, 1, 1)$, $\mathbf{a}_2 = (0, 0, 2, 2)$, $\mathbf{a}_3 = (0, 2, 0, 0) = 2\mathbf{a}_1 - \mathbf{a}_2$ vektoraival generált L_4' alterének báziselőállítását! —

Az előzők szerint

$$\mathbf{r}' = \xi_1\mathbf{a}_1 + \xi_2\mathbf{a}_2 + \xi_3\mathbf{a}_3 = (\xi_1 + 2\xi_3)\mathbf{a}_1 + (\xi_2 - \xi_3)\,\mathbf{a}_2 = \vartheta_1\mathbf{a}_1 + \vartheta_2\mathbf{a}_2 =$$

$$= \vartheta_1 \cdot (0, 1, 1, 1) + \vartheta_2 \cdot (0, 0, 2, 2) \in L_4^{(2)} \quad (\vartheta_1, \vartheta_2 \in K);$$

$$B_4^{(2)} = (\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2) = \{(0, 1, 1, 1), (0, 0, 2, 2)\}.$$

9. Pl. Legyen adva az E_3-ban az

$$\mathbf{r} = x_0\mathbf{0} + x_1\mathbf{e}_1 + x_2\mathbf{e}_2 + x_3\mathbf{e}_3, \quad x_i \geq 0, \quad \sum_{i=0}^{3} x_i = 1 \quad (\mathbf{e}_i\mathbf{e}_j = \delta_{ij})$$

konvex l. komb, geometriailag: 3-dimenziós szimplex (tetraéder). Értelmezzük geometriailag a szimplex alábbi pontjait:

a) $x_1 = 1, \quad x_0 = x_2 = x_3 = 0;$ *b)* $x_0 = x_1 = \frac{1}{2}, \quad x_2 = x_2 = 0;$

c) $x_1 = x_2 = x_3 = \frac{1}{3}, \quad x_0 = 0;$ *d)* $x_0 = x_1 = x_2 = x_3 = \frac{1}{4};$

e) $x_0, \ x_1 = 1 - x_0, \quad x_2 = x_3 = 0;$ *f)* $x_0, x_1, x_2 = 1 - x_0 - x_1, \quad x_3 = 0.$

II°. Az euklideszi tér és sajátságai. Bővebb tárgyalása a szerző [34] munkájának *b) α)* helyén olvasható. Utalva az előbb vázolt l. térre mint *két* műveletes vektorhalmazra, most az euklideszi térről mint *három* műveletes vektorhalmazról röviden az alábbiakat jegyezzük meg.

1'. Definíció: Az $L_n = \{\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}, \ldots\}$ (valós) l. teret (valós) *euklideszi térnek* mondjuk ha értelmezzük benne az $\mathbf{ab}$ ($\in K_v$) jelű, skaláris (belső) szorzás nevű harmadik műveletet, mégpedig a

$$H)\ \mathbf{ab} = \mathbf{ba}, \qquad I)\ \alpha(\mathbf{ab}) = (\alpha\mathbf{a})\mathbf{b}, \qquad J)\ (\mathbf{a} + \mathbf{b})\mathbf{c} = \mathbf{ac} + \mathbf{bc}$$

axiómák teljesülése mellett; az n-dimenziós euklideszi tér jele: E_n.

Ezen axiómáknak különféle természetű euklideszi terekben más és más módon lehet eleget tenni. Közülük itt elsősorban a *rendezett valós szám-n-esek* E_n *euklideszi tere* érdekes, amelyben egy $\mathbf{a}, \mathbf{b}, \in E_n$ vektorpár skaláris szorzatát — valamely tetszőleges, de azután rögzített $B_n = \{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \ldots, \mathbf{e}_n\} \subset E_n$ bázisra vonatkozó a_i, ill. b_i koordinátáik segítségével —

$$\mathbf{ab} = a_1b_1 + a_2b_2 + \ldots + a_nb_n = \sum_{i=1}^{n} a_ib_i \ (\in K_v)$$

módon értelmezzük, a H—$J)$ axiómák ellenőrizhető kielégülése mellett.

Megmutatható egyébként,* hogy a $\sum a_ib_i$ skaláris szorzat (s így a norma is) általában *nem invariáns* a bázis választásával szemben.

* L. bővebben [34] *b) α)* II°.

2'. Idézzük fel még az E_n tér *néhány fontosabb fogalmát és geometriai vonatkozását*!

Vektor normája (valós euklideszi): $N(\mathbf{a}) = \mathbf{a}^2 = a_1^2 + a_2^2 + \ldots + a_n^2 > 0$, ha $\mathbf{a} \neq \mathbf{0}$, és $N(\mathbf{a}) = 0$, ha $\mathbf{a} = \mathbf{0}$. Ha speciálisan $N(\mathbf{a}) = 1$, akkor $\mathbf{a}$ ún. *normált* (v. egység-) vektor és jele $\mathbf{a}^0$. Bármely $\mathbf{a} \neq \mathbf{0}$ vektor egyértelműen előállítható $\mathbf{a} = \mathbf{a}^0 \cdot |\mathbf{a}|$ módon, ahol $a = |\mathbf{a}| = +\sqrt{N(\mathbf{a})} = +\sqrt{\mathbf{a}^2}$ vektor hossza.

Két hiperpont, $\mathbf{a}$ és $\mathbf{b}$ távolsága;

$$d = |\mathbf{a} - \mathbf{b}| = +\sqrt{(\mathbf{a} - \mathbf{b})^2} = \sqrt{(a_1 - b_1)^2 + \ldots + (a_n - b_n)^2}.$$

Az $\mathbf{a}$ hiperpont *ε-hiperkörnyezete* (mint az $\mathbf{a}$ középpontú, ε sugarú hiperszféra belseje):

$$|\mathbf{r} - \mathbf{a}| = +\sqrt{(x_1 - a_1)^2 + \ldots + (x_n - a_n)^2}.$$

Schwarz—Cauchy-féle egyenlőtlenség: igazolható, hogy

$$(\mathbf{ab})^2 \leq \mathbf{a}^2\mathbf{b}^2; \text{ azaz } \mathbf{a}, \mathbf{b} \neq \mathbf{0} \text{ esetén } \frac{(\mathbf{ab})^2}{\mathbf{a}^2\mathbf{b}^2} \leq 1 \text{ s így } -1 \leq \frac{\mathbf{ab}}{|\mathbf{a}|\,|\mathbf{b}|} \leq 1.$$

Két vektor hajlásszögének cosinusa: $\cos \gamma = \dfrac{\mathbf{ab}}{|\mathbf{a}|\,|\mathbf{b}|} = \mathbf{a}^0\mathbf{b}^0$. $(\mathbf{a}, \mathbf{b} \neq \mathbf{0},\ 0 \leq \gamma \leq \pi)$.

Cosinustétel: a, b oldalú, γ hajlásszögű hiperháromszög c oldala: $c = +\sqrt{\mathbf{c}^2} = +\sqrt{(\mathbf{a} - \mathbf{b})^2} = +\sqrt{\mathbf{a}^2 + \mathbf{b}^2 - 2\mathbf{ab}} = +\sqrt{a^2 + b^2 - 2ab\cos\gamma}$.

Vektor (előjeles) vetülete: $a_b = a \cos \gamma = \mathbf{ab}^0$.

Két vektor ortogonalitása: $\mathbf{a} \perp \mathbf{b}$, ha $\mathbf{ab} = ab \cos \gamma = 0$.

Ortogonális vektorrendszer: $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \ldots, \mathbf{a}_n$ ilyen, ha $\mathbf{a}_i\mathbf{a}_j = \mathbf{0}$ $(i \neq j)$.

Ortonormált vektorrendszer: $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \ldots, \mathbf{e}_n$ ilyen, ha

$$\mathbf{e}_i\mathbf{e}_j = \delta_{ij} = \begin{cases} 0, \text{ midőn } i \neq j \\ 1, \text{ midőn } i = j \end{cases} \quad (\delta_{ij}: \textit{Kronecker}\text{-szimbólum}).$$

Egy ilyen vektor-n-es egyszersmind bázisa, mégpedig ún. *ortonormált bázisa* $(B_{n\delta})$ az E_n térnek, mert pl. $x_1 \neq 0$ esetén $\mathbf{e}_1(x_1\mathbf{e}_1 + \ldots + x_n\mathbf{e}_n) = x_1 \cdot 1 + 0 \neq \mathbf{e}_1\mathbf{0} = 0$ lenne. Az ortonormált bázisok alkalmazása különösen előnyös, mert pl. a skaláris szorzat (s így a norma) értéke — igazolhatóan — *invariáns* az ortonormált bázis választásával szemben. Egyébként az ún. *Schmidt*-féle ortogonalizálási eljárással* az E_n bármely B_n bázisából egy $B_{n\delta}$ ortonormált bázist lehet szerkeszteni.

Vektor ortogonalitása, vetítése altérre: $\mathbf{h} \perp E_n^{(r)} = \{\varrho\} \subset E_n$, ha $\mathbf{h} \perp B_n^{(r)} = \{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \ldots, \mathbf{e}_r\}$; az $\mathbf{r} \in E_n$ $(\mathbf{r} \notin E_n^{(r)})$ pont *távolsága* az $E_n^{(r)}$ altértől:

$$|\mathbf{h}| = |\mathbf{r} - \varrho_0| = \min |\mathbf{r} - \varrho| = \text{dist}\,(\mathbf{r}, E_n^{(r)}),\ \mathbf{h} = (\mathbf{r} - \varrho_0);$$

a $\varrho_0 = \gamma_1\mathbf{e}_1 + \ldots + \gamma_r\mathbf{e}_r \in E_n^{(r)}$ *vetületi pont (vektor)*, a $\mathbf{h}\mathbf{e}_k = (\mathbf{r} - \varrho_0)\mathbf{e}_k = 0$ egyenletből:

$$\gamma_k = \mathbf{r}\mathbf{e}_k \quad (k = 1, 2, \ldots, r; \quad \mathbf{e}_i\mathbf{e}_j = \delta_{ij}).$$

Hipersík (ϱ_0 ponton átmenő, $\mathbf{h}$ normálisú): $\mathbf{h}(\varrho - \varrho_0) = \mathbf{h}\varrho - C = 0$.

A fentieket szemléltessük most néhány *példán és feladaton!*

---

* L. pl. [34] *b) α)* V°

1. Pl. Mutassuk meg, hogy az $E_3 = \{\mathbf{a}, \mathbf{b}, \ldots\} = \{\overrightarrow{OP}, \overrightarrow{OQ}, \ldots\}$ euklideszi térben

$$\mathbf{ab} = ab \cos \gamma \equiv \overline{OP} \cdot \overline{OQ}. \cos POQ\sphericalangle$$

módon értelmezett skaláris szorzás eleget tesz a *H—J)* axiómáknak.

2. Pl. Legyen az E_4-ben $\mathbf{a} = (2, 0, 1, -1)$, $\mathbf{b} = (0, -1, 3, 2)$. Kiszámítandó, ill. igazolandó:

$$N(\mathbf{a}), \quad |\mathbf{b}|, \quad |\mathbf{a} - \mathbf{b}|, \quad |\mathbf{r} - \mathbf{a}| < 1, \mathbf{ab}, \quad (\mathbf{ab})^2 < \mathbf{a}^2\mathbf{b}^2, \quad \mathbf{a}^0, \mathbf{b}^0, \quad \cos \gamma = \mathbf{a}^0\mathbf{b}^0, \quad a_b = \mathbf{ab}^0$$

3. Pl. Legyen $\mathbf{a}, \mathbf{b} \in E_n$. Igazolandó

a) az $|\mathbf{a} + \mathbf{b}| \geqq |\mathbf{a}| + |\mathbf{b}|$ (háromszög-reláció),

b) $\mathbf{a} \perp \mathbf{b}$ esetén pedig az $|\mathbf{a} + \mathbf{b}|^2 = |\mathbf{a}|^2 + |\mathbf{b}|^2$ *(Pythagoras-tétel).*

4. Pl. Igazolandó, hogy az E_4-beli

$$\mathbf{e}_1 = \frac{1}{\sqrt{30}} \cdot (1, 2, 3, 4), \qquad \mathbf{e}_2 = \frac{1}{\sqrt{6}} \cdot (-2, -1, 0, 1),$$

$$\mathbf{e}_3 = \frac{1}{\sqrt{30}} \cdot (3, -4, -1, 2), \qquad \mathbf{e}_4 = \frac{1}{\sqrt{6}} \cdot (0, 1, -2, 1)$$

vektorrendszer ortonormált.

5. Pl. Határozzuk meg az $\mathbf{r} = (7, 2, 3, 10) \in E_4$ pontból az előbbi $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3$ ortonormált vektorhármassal generált $E_4^{(3)} = \{\varrho\} = \{\alpha_1\mathbf{e}_1 + \alpha_2\mathbf{e}_2 + \alpha_3\mathbf{e}_3\}$ altérre bocsájtott ortogonális transzverzális ϱ_0 talppontját, $|\mathbf{h}| = |\mathbf{r} - \varrho_0|$ hosszát, vagyis az $\mathbf{r}$ és az $E_4^{(3)}$ távolságát.

A fentiek szerint

$$\varrho_0 = \gamma_1\mathbf{e}_1 + \gamma_2\mathbf{e}_2 + \gamma_3\mathbf{e}_3 \in E_4^{(3)},$$

ahol $\gamma_k = \mathbf{re}_k$ s így

$$\gamma_1 = 2\sqrt{30}, \qquad \gamma_2 = -\sqrt{6}, \qquad \gamma_3 = \sqrt{30}; \qquad \varrho_0 = (7, 1, 5, 9).$$

A keresett transzverzális és hossza:

$$\mathbf{h} = \mathbf{r} - \varrho_0 = (0, 1, -2, 1), \qquad |\mathbf{h}| = 6.$$

6. Pl. Megállapitandó az E_4-ben a

$$2x_1 - 3x_2 + x_3 - 4x_4 - 3 = 0 \quad \text{hipersík és az}$$

$$\frac{x_1 - 5}{3} = \frac{x_2 + 2}{1} = \frac{x_3}{4} = \frac{x_4 - 1}{2} \; (= t) \; \text{hiperegyenes döféspontja.}$$

III°. Az n-ed rendű determinánsokról. Ezek bővebb tárgyalása a szerző [31, 34] munkáiban olvasható. Itt csak az értelmezés és néhány tétel felsorolására szorítkozunk. Egyben utalunk a determinánsok széles alkalmazási területére (pl. matrixalgebra, l. egyenletrendszerek, l. differenciálegyenletek).

1'. Az $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2 \in E_2$ vektorpárra felfeszített paralelogramma $D(\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2)$ algebrai területének fogalmát és sajátságait általánosítja az alábbi

Definíció: n-ed rendű determinánsnak nevezzük az olyan

$$D = D(\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \ldots, \mathbf{a}_n) = \det(a_{ij}) = \det(\mathbf{A}_n) = |\mathbf{A}_n| \qquad (\mathbf{a}_j \in E_n)$$

skalár-vektor-n-es (skalár-matrix) függvényt, mely eleget tesz e 4 *axiómának:*

a) $D(\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \ldots, \mathbf{a}_n) = -D(\mathbf{a}_2, \mathbf{a}_1, \ldots, \mathbf{a}_n)$ [felcserélési feltétel];

b) $D(\ldots, \mathbf{b}_j + \mathbf{c}_j, \ldots) = D(\ldots, \mathbf{b}_j, \ldots) + D(\ldots, \mathbf{c}_j, \ldots)$ [additív feltétel];

c) $D(\ldots, \alpha\mathbf{a}_j, \ldots) = \alpha \cdot D(\ldots, \mathbf{a}_j, \ldots)$ [multiplikatív feltétel];

d) $D(\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \ldots, \mathbf{e}_n) = 1$ $(\mathbf{e}_j\mathbf{e}_l = \delta_{jl})$ [bázisfeltétel].

Következmények:

ad *b)* $D\left(\ldots, \sum_{\lambda_j=1}^{m_j} \mathbf{b}_{j\lambda_j}, \ldots\right) = \sum_{j=1}^{n} \sum_{\lambda_j=1}^{m_j} D(\ldots, \mathbf{b}_{j\lambda_j}, \ldots);$

ad *c)* $D(\ldots, \alpha_j\mathbf{a}_j, \ldots) = D \cdot \prod_{j=1}^{n} \alpha_j$

2'. Főbb determinánstételek:

1. Ha valamely $\mathbf{a}_j = \mathbf{0}$, akkor $D = 0$. [Vö. *c)*-vel $\alpha = 0$-nál].
2. Ha pl. $\mathbf{a}_j = \mathbf{a}_l$, akkor szintén $D = 0$. [Vö. *a)*-val $\mathbf{a}_1 = \mathbf{a}_2$-nél.]
3. $D(\ldots, \mathbf{a}_j, \ldots) = D(\ldots, \mathbf{a}_j + \sum_{l(\neq j)} \alpha_l\mathbf{a}_l, \ldots)$. [Vö. ad *b—c)*, 2.]
4. Ha $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \ldots, \mathbf{a}_n$ l. f, akkor $D = 0$. [Vö. 1. és 3.]
5. Ha $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \ldots, \mathbf{a}_n$ l. ftl, akkor $D \neq 0$. [Vö. ad *b—c)*, 2., *a)*, *d)*.]

3'. Determinánskifejtési tételek:

I. Ha egyáltalán létezik *a—d)* sajátságú $D = \det(a_{ij})$ függvény, az csak

$$D = \sum_{n!} (-1)^{I(i_1, i_2, \ldots, i_n)} \cdot a_{i_1 1} a_{i_2 2} \ldots a_{i_n n}$$

alakú lehet, ahol $I = I(i_1, i_2, \ldots, i_n)$ az i_l indexek által képzett I_l számú ún. előzések összege. *(Unicitás)*

II. Az előbbi $D = D(a_{i_1 1}, a_{i_2 2}, \ldots, a_{i_n n})$ függvény valóban kielégíti az *a—d)* feltételeket. *(Egzisztencia)*

III. A D determinánsnak *a j-edik oszlopa szerinti kifejtése*

$$D = \sum_{i=1}^{n} a_{ij}A_{ij} = \mathbf{a}_j\mathbf{A}_j$$

alakban történik, ahol

$$A_{ij} = (-1)^{i+j} \cdot D(\mathbf{a}_1', \ldots, \mathbf{a}_{j-1}', \mathbf{a}_{j+1}', \ldots, \mathbf{a}_n') =$$

$$= (-1)^{i+j} \cdot \begin{vmatrix} a_{11} & \ldots & a_{1,j-1} & a_{1,j+1} & \ldots & a_{1n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{i-1,1} & \ldots & a_{i-1,j-1} & a_{i-1,j+1} & \ldots & a_{i-1,n} \\ a_{i+1,1} & \ldots & a_{i+1,j-1} & a_{i+1,j+1} & \ldots & a_{i+1,n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & \ldots & a_{n,j-1} & a_{n,j+1} & \ldots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

az a_{ij} elemhez tartozó, $(n-1)$-ed rendű, előjeles aldetermináns (komplementer minor).

IV. A D determináns j-edik oszlopának $\mathbf{a}_j$ vektorát egy *másik*, pl. a k-adik oszlopához tartozó $\mathbf{A}_k$ komplementer vektorral skalárisan szorozva, zérust kapunk, azaz

$$\sum_{i=1}^{n} a_{ij}A_{ik} = \mathbf{a}_j\mathbf{A}_k = 0 \qquad (j \neq k).$$

A III—IV. összefoglalása, az ún. *általános kifejtési tétel:*

$$\sum_{i=1}^{n} a_{ij}A_{ik} = \mathbf{a}_j\mathbf{A}_k = \delta_{jk} \cdot D.$$

Ebből következik, hogy a l. ftl $\mathbf{a}_j$ vektorrendszer és a hozzátartozó $\mathbf{A}_k/D$ komplementer vektorrendszer egymásnak *reciproka*, azaz

$$\frac{1}{D} \cdot \sum_{i=1}^{n} a_{ij}A_{ik} = \mathbf{a}_j \cdot \frac{\mathbf{A}_k}{D} = \delta_{jk} \qquad (D \neq 0; \ j, k = 1, 2, \ldots, n).$$

V. Az $\mathbf{a}_j = (a_{1j}, a_{2j}, \ldots, a_{nj})$ oszlopvektorok D determinánsának értéke *megegyezik* az $\mathbf{a}^i = (a_{i1}, a_{i2}, \ldots, a_{in})$ sorvektorok D^* *determinánsáéval* (dualitás), azaz

$$D \equiv D(\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \ldots, \mathbf{a}_n) = D^*(\mathbf{a}^1, \mathbf{a}^2, \ldots, \mathbf{a}^n) \equiv D^*.$$

Ebből következik, hogy a fentiekben az oszlopvektorok D determinánsáról tett megállapítások értelemszerűen *érvényben maradnak* a sorvektorok D^* determinánsára is, más szóval a sorok és az oszlopok szerepe felcserélhető.

VI. Az n-ed rendű determinánsok *szorzástétele:*

$$\det(a_{ij}) \cdot \det(b_{ij}) = \det\left(\sum_{k=1}^{n} a_{ik}b_{kj}\right) = \det(b_{ij}) \cdot \det(a_{ij}) = \det\left(\sum_{k=1}^{n} b_{ik}a_{kj}\right).$$

Lássunk most a fentiekre néhány *példát és feladatot!*

1. Pl. Fejtsük ki a $D \equiv D(\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \mathbf{a}_3) \equiv \det(a_{ij})$ harmadrendű determinánst az I., majd a III. tétel szerint. —
Az említett tételek értelmében írható, hogy

$$D = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = (-1)^0 a_{11}a_{22}a_{33} + (-1)^2 a_{21}a_{32}a_{13} + (-1)^2 a_{31}a_{12}a_{23} +$$

$$+ (-1)^1 a_{21}a_{12}a_{33} + (-1)^3 a_{31}a_{22}a_{13} + (-1)^1 a_{11}a_{32}a_{23} =$$

$$= a_{11}a_{22}a_{33} + a_{21}a_{32}a_{13} + a_{31}a_{12}a_{23} - a_{21}a_{2}a_{33} - a_{31}a_{22}a_{13} - a_{11}a_{32}a_{23} =$$

$$= a_{11} \cdot \begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} - a_{21} \cdot \begin{vmatrix} a_{12} & a_{12} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} + a_{31} \cdot \begin{vmatrix} a_{12} & a_{13} \\ a_{22} & a_{23} \end{vmatrix},$$

ahol ez utóbbi az első oszlop szerinti kifejtés.

2. Pl. Legyen az E_4 térben

$$\mathbf{a}_1 = (1, 0, 0, 0), \quad \mathbf{a}_2 = (0, 2, 0, 1), \quad \mathbf{a}_3 = (0, 0, -1, 0),$$

$\mathbf{a}_4 = (0, 1, 3, -2) = (0, 1, 2, -1) + (0, 0, 1, -1) = \mathbf{b}_4 + \mathbf{c}_4$, továbbá $\alpha = 3$. Képezzük velük az alábbi determinánsokat és észleljük — kifejtés útján — az *a—d)* feltételek és az 1—5. tételek teljesülését:

$$D(\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \mathbf{a}_3, \mathbf{a}_4),\ D(\mathbf{a}_2, \mathbf{a}_1, \mathbf{a}_3, \mathbf{a}_4),\ D(\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \mathbf{a}_3, \mathbf{b}_4 + \mathbf{c}_4),$$

$$D(3\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \mathbf{a}_3, \mathbf{a}_4),\ D(\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3, \mathbf{e}_4);$$

$$D(\mathbf{0}, \mathbf{a}_2, \mathbf{a}_3, \mathbf{a}_4),\ D(\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \mathbf{a}_4),\ D(\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \mathbf{a}_3, \mathbf{a}_4 + \mathbf{a}_1 - \mathbf{a}_2 + 2\mathbf{a}_3),$$

$$D(\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \mathbf{a}_3, \mathbf{a}_1 - \mathbf{a}_2 + 2\mathbf{a}_3).$$

3. Pl. Képezzük az E_3 térbeli

$$\mathbf{a}_1 = (2, 0, 1),\quad \mathbf{a}_2 = (0, -1, 0),\quad \mathbf{a}_3 = (1, 3, -2)$$

vektorhármas reciprok vektorhármasát. —

A fentiek szerint képezni kell a $D(\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \mathbf{a}_3)$ determinánst, majd ($D \neq 0$ esetén) komplementer minoraiból az $\mathbf{A}_j/D$ komplementer vektorhármast:

$$D = \begin{vmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 3 \\ 1 & 0 & -2 \end{vmatrix} = -1 \cdot \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & -2 \end{vmatrix} = +5 \neq 0;\quad \mathbf{A}_3 = (A_{13}, A_{23}, A_{33}) = (1, 0, -2),$$

$$\mathbf{A}_1 = (A_{11}, A_{21}, A_{31}) = (2, 0, 1),\qquad \mathbf{A}_2 = (A_{12}, A_{22}, A_{32}) = (3, -5, -6).$$

Észlelhető, hogy valóban

$$\mathbf{a}_j \cdot \frac{\mathbf{A}_k}{D} = \delta_{jk} \qquad (j, k = 1, 2, 3).$$

4. Pl. Legyen

$$D_a = \det(a_{ij}) = \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{vmatrix} = -2,\quad D_b = \det(b_{ij}) = \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} = -1;$$

szemléltessük ezekkel a determinánsok szorzástételét. —

Írható, hogy

$$D_{ab} = \det\Big(\sum_k a_{ik}b_{kj}\Big) = \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 4 & 3 \end{vmatrix} = 2,$$

$$D_{ba} = \det\Big(\sum_k b_{ik}a_{kj}\Big) = \begin{vmatrix} 3 & 4 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = 2.$$

Észlelhető, hogy valóban

$$D_aD_b = D_{ab} = D_bD_a = D_{ba}.$$

γ) Matrixalgebrai alapismeretek

I°. A matrixokról általában. A matrixalgebrát, a l. algebra e modern és a műszaki-gazdasági alkalmazások szempontjából is nagy jelentőségű diszciplínáját a [32] jegyzetünkben fejtettük ki bővebben. Itt csak a főbb fogalmak és az alapműveletek áttekintésére szorítkozunk.

1'. A *matrix* valós, vagy komplex számok (mint elemek) n soros és m oszlopos (vagyis $n\times m$ típusú) táblázatba rendezett halmaza; jelölése:*

$$\mathbf{A} = \underset{(n\times m)}{\mathbf{A}} = [a_{ij}] = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1m} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2m} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nm} \end{bmatrix} = [\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \dots, \mathbf{a}_m] = \begin{bmatrix} \mathbf{a}^1 \\ \mathbf{a}^2 \\ \vdots \\ \mathbf{a}^n \end{bmatrix},$$

ahol $\mathbf{a}_j$ a j-edik oszlop elemeiből képzett $(n\times 1)$ típusú matrix, ún. *oszlopvektor*, $\mathbf{a}^i$ pedig az i-edik sor elemeiből alkotott $(1\times m)$ típusú matrix, ún. *sorvektor*.

Egyenlőség: $\mathbf{A} = \mathbf{B}$, ha $n_a = n_b$, $m_a = m_b$ és $a_{ij} = b_{ij}$; lehet azonosság, vagy egyenlet.

Elrendezés ($n_a = n_b$, $m_a = m_b$ esetén): $\mathbf{A} > \mathbf{B}$, ha $a_{ij} > b_{ij}$; $\mathbf{A} \geqq \mathbf{B}$, ha $a_{ij} \geqq b_{ij}$; $\mathbf{A} \leqq \mathbf{B}$, ha $a_{ij} \leqq b_{ij}$; $\mathbf{B} < \mathbf{A}$, ha $a_{ij} < b_{ij}$.

Speciálisan: $\mathbf{a} \geqq \mathbf{b}$, ha $a_i \geqq b_i$, $\mathbf{a} > \mathbf{0}$, ha $a_i > 0$, s í. t.

Ellentett: $-\mathbf{A} = [-a_{ij}]$; ha speciálisan $\mathbf{A} = -\mathbf{A}$, akkor $\mathbf{A} \equiv \mathbf{O} = [0]$ (zérusmatrix).

Transzponált: $\underset{(m\times n)}{\mathbf{A}^*} = [a_{ji}]$; ha speciálisan $\mathbf{A} = \mathbf{A}^*$, akkor $n = m$ és $a_{ij} = a_{ji}$, azaz $\mathbf{A}$ (kvadratikus és) szimmetrikus.

2'. A *hipermatrix* olyan különleges matrix, amelynek elemei az adott $(n\times m)$ típusú matrixból (vízszintesen és függőlegesen húzott osztóvonalakkal) elkülönített alacsonyabb típusú matrixok, ún. *blokkok;* jelölése:

$$\underset{(n\times m)}{\mathbf{A}} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1m} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2m} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nm} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{a}_{\mathrm{I,I}} & \mathbf{a}_{\mathrm{I,II}} & \dots & \mathbf{a}_{\mathrm{I},M} \\ \mathbf{a}_{\mathrm{II,I}} & \mathbf{a}_{\mathrm{II,II}} & \dots & \mathbf{a}_{\mathrm{II},M} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \mathbf{a}_{N,\mathrm{I}} & \mathbf{a}_{N,\mathrm{II}} & \dots & \mathbf{a}_{N,M} \end{bmatrix} = \underset{(N\times M)}{\mathfrak{A}} \quad (N \leqq n, \quad M \leqq m).$$

Az $N\times M = 1\times m$, ill. az $N\times M = n\times 1$ speciális eset az $\mathfrak{A}$ matrixnak (fentebb már felírt) hipersorvektor-, ill. hiperoszlopvektor- előállítása.

Kvadratikus, n-ed rendű matrix: $\mathbf{A} = \mathbf{A}_n = [a_{ij}]$. Szimmetrikus (tükrös), ha $\mathbf{A} = \mathbf{A}^*$; antiszimmetrikus (váltó), ha $\mathbf{A} = -\mathbf{A}^*$. *Nyoma* (spurja): $S_n = sp(\mathbf{A}_n) = a_{11} + a_{22} + \dots + a_{nn}$.

Diagonálmatrix: $\mathbf{D}_n = [a_{ij}\cdot\delta_{ij}] = \langle a_1, a_2, \dots, a_n\rangle$ $(a_{ii} \equiv a_i)$. *Egységmatrix:* $\mathbf{E}_n = [\delta_{ij}] = \langle 1, 1, \dots, 1\rangle = [\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \dots, \mathbf{e}_n]$, ahol $\mathbf{e}_i^* = [\delta_{ij}] = [\underset{1}{0}, \dots, \underset{i}{1}, \dots, \underset{n}{0}]$.

1. Pl. Írjunk fel néhány konkrét matrixot!

$$\underset{(3\times 5)}{\mathbf{A}} = \begin{bmatrix} -3 & 5 & 0 & -2 & 9 \\ 0 & 7 & -1 & 4 & -6 \\ 4 & -8 & 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}, \qquad \underset{(2\times 3)}{\mathbf{B}} = \begin{bmatrix} 2+3i & -6i & 7 \\ -7+4i & 5+3i & 2-5i \end{bmatrix},$$

$$\underset{(2\times 8)}{\mathbf{F}} = \begin{bmatrix} a & b & c & d & \alpha & \beta & \gamma & \delta \\ \alpha & \beta & \gamma & \delta & a & b & c & d \end{bmatrix}, \qquad \underset{(3\times 3)}{\mathbf{C}} = \begin{bmatrix} \cos^2\alpha & \cos\alpha\cos\beta & \cos\alpha\cos\gamma \\ \cos\alpha\cos\beta & \cos^2\beta & \cos\beta\cos\gamma \\ \cos\alpha\cos\gamma & \cos\beta\cos\gamma & \cos^2\gamma \end{bmatrix}.$$

2. Pl. Írjuk fel az előbbi matrixok egyes sor- és oszlopvektorait!

$$\mathbf{a}^2 = [0 \quad 7 \quad -1 \quad 4 \quad -6], \qquad \mathbf{b}_1 = \begin{bmatrix} 2+3i \\ -7+4i \end{bmatrix}, \qquad \mathbf{c}_2 = \begin{bmatrix} \cos\alpha\cos\beta \\ \cos^2\beta \\ \cos\beta\cos\gamma \end{bmatrix}.$$

$$\mathbf{f}^1 = [a \quad b \quad c \quad d \quad \alpha \quad \beta \quad \gamma \quad \delta],$$

* A lineáris programozásban csak valós elemű, véges matrixok szerepelnek.

3. Pl. Írjunk fel egymással egyenlő matrixokat!

$$\begin{bmatrix} \alpha^2 - \beta^2 & \sin 2\alpha \\ \cos 2\alpha & \alpha^2 + \beta^2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} (\alpha - \beta)(\alpha + \beta) & 2 \sin\alpha \cos\alpha \\ \cos^2\alpha - \sin^2\alpha & (\alpha - i\beta)(\alpha + i\beta) \end{bmatrix};$$

(azonosság)

$$\begin{bmatrix} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \end{bmatrix}.$$

(egyenlet)

4. Pl. Írjunk fel elrendezett matrixpárokat:

$$\mathbf{x}^* = [x_1, x_2, \ldots, x_m] \geqq [0, 0, \ldots, 0] = \mathbf{0}^*, \qquad [3, -2, 0, 1] > [2, -5, -1, 0],$$

$$\begin{bmatrix} 2 & 0 & -3 \\ 0 & -5 & 4 \end{bmatrix} \geqq \begin{bmatrix} 1 & 0 & -4 \\ 0 & -6 & 3 \end{bmatrix}, \qquad \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} < \begin{bmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 3 & 2 & 1 \end{bmatrix}.$$

5. Pl. Írjuk fel az 1. példabeli martixok némelyikének ellentetjét, konjugáltját, transzponáltját!

$$-\mathbf{B} = \begin{bmatrix} -2-3i & 6i & -7 \\ 7-3i & -5-3i & -2+5i \end{bmatrix}, \qquad \mathbf{A}^* = \begin{bmatrix} -3 & 0 & 4 \\ 5 & 7 & -8 \\ 0 & -1 & 0 \\ -2 & 4 & 0 \\ 9 & -6 & 2 \end{bmatrix}.$$

$$\overline{\mathbf{B}} = \begin{bmatrix} 2-3i & 6i & 7 \\ -7-4i & 5-3i & 2+5i \end{bmatrix},$$

6. Pl. Keressünk, ill. írjunk fel szimmetrikus (tükrös), antiszimmetrikus (váltó) és hermitikus matrixokat! —

Tükrös az 1. példabeli $\mathbf{C} = \mathbf{C}^*$.

$$\mathbf{V} = \begin{bmatrix} 0 & -\cos\gamma & \cos\beta \\ \cos\gamma & 0 & -\cos\alpha \\ -\cos\beta & \cos\alpha & 0 \end{bmatrix} = -\mathbf{V}^*; \qquad \mathbf{H} = \begin{bmatrix} 2 & 7-4i & 9i \\ 7+4i & 5 & 2-3i \\ -9i & 2+3i & 4 \end{bmatrix} = \overline{\mathbf{H}}^*.$$

(váltó) (hermitikus)

7. Pl. Készítsünk az 1. példabeli **A** matrixból különféle hipermatrixokat!

$$\underset{(2\times3)}{\mathfrak{A}} = \left[\begin{array}{r|rr|rr} -3 & 5 & 0 & -2 & 9 \\ 0 & 7 & -1 & 4 & -6 \\ \hline 4 & -8 & 0 & 0 & 2 \end{array}\right], \quad \underset{(1\times5)}{\mathfrak{A}} \equiv \mathfrak{a}^* = [\mathbf{a}_1, \ldots, \mathbf{a}_5], \quad \underset{(3\times1)}{\mathfrak{A}} \equiv \mathfrak{a} = \begin{bmatrix} \mathbf{a}^1 \\ \mathbf{a}^2 \\ \mathbf{a}^3 \end{bmatrix}.$$

8. Pl. Írjuk fel az előbbi **A** matrix néhány minormatrixát!

$$\mathbf{A}_{1,3,5}^{1,3} = \begin{bmatrix} -3 & 0 & 9 \\ 4 & 0 & 2 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{A}_{1\sim5}^{2} \equiv \mathbf{a}^2 = [0 \;\; 7 \;\; -1 \;\; 4 \;\; -6], \quad \mathbf{A}_4^{1\sim3} \equiv \mathbf{a}_4 = \begin{bmatrix} -2 \\ 4 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

9. Pl. Válasszunk ki a fentebbiek közül kvadratikus matrixokat és mutassunk rá egyes sajátságaikra!

$$\mathbf{C}_3 = \mathbf{C}_3^* \qquad \mathbf{V}_3 = -\mathbf{V}_3^*, \qquad \mathbf{H}_3 = \overline{\mathbf{H}}_3^*;$$

$$\mathrm{sp}\,(\mathbf{C}_3) = \cos^2\alpha + \cos^2\beta + \cos^2\gamma \; (\equiv 1), \qquad \det(\mathbf{C}_3) = 0;$$

$$\mathrm{sp}\,(\mathbf{V}_3) = 0, \qquad \det(\mathbf{V}_3) = 0.$$

10. Pl. Írjunk fel diagonál- és egységmatrixokat!

$$\mathbf{D}_3 = \begin{bmatrix} a & 0 & 0 \\ 0 & b & 0 \\ 0 & 0 & c \end{bmatrix} = \langle a, b, c \rangle, \quad \mathbf{E}_3 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \langle 1, 1, 1 \rangle = [\delta_{ij}], \quad \mathbf{e}^2 = [0, 1, 0].$$

II°. Alapműveletek matrixokkal. Tekintsük át most a *matrixaritmetikát.* Úgy értelmezzük, hogy speciális esetként felölelje az (euklideszi) vektoralgebrát.

1'. Összeadás: $\mathbf{A} + \mathbf{B} = a_{ij} + b_{ij}$ $(n_a = n_b = n_{a+b},\ m_a = m_b = m_{a+b})$;

A) $\mathbf{A} + \mathbf{B} = \mathbf{B} + \mathbf{A}$, *B)* $(\mathbf{A} + \mathbf{B}) + \mathbf{C} = \mathbf{A} + (\mathbf{B} + \mathbf{C})$,

C) $\mathbf{A} + \mathbf{X} = \mathbf{A}$, $\mathbf{X} \equiv \mathbf{0}$ (zérusmatrix), *D)* $\mathbf{A} + \mathbf{Y} = \mathbf{0}$, $\mathbf{Y} = -\mathbf{A}$ (ellentett matrix).

A *C—D*-ből: $\mathbf{B} + \mathbf{Z} = \mathbf{A}$, $\mathbf{B} + (-\mathbf{B}) + \mathbf{Z} = \mathbf{O} + \mathbf{Z} = \mathbf{Z} = \mathbf{A} + (-\mathbf{B}) \equiv \mathbf{A} - \mathbf{B}$ (kivonás). Speciálisan sor- és oszlopvektorra:

$\mathbf{a} + \mathbf{b} = [a_i + b_i]$ $(n_a = n_b = n_{a+b})$; $\mathbf{a} + \mathbf{b} = \mathbf{b} + \mathbf{a}$, $(\mathbf{a} + \mathbf{b}) + \mathbf{c} = \mathbf{a} + (\mathbf{b} + \mathbf{c})$;

$\mathbf{a} + \mathbf{x} = \mathbf{0}$, $\mathbf{x} \equiv \mathbf{0}$; $\mathbf{a} + \mathbf{y} = \mathbf{0}$, $\mathbf{y} \equiv -\mathbf{a}$; $\mathbf{a}^* + \mathbf{b}^* = [a_j + b_j]$ $(m_a = m_b = m_{a+b})$, s í. t.

2'. Számmal való szorzás: $\alpha\mathbf{A} = [\alpha a_{ij}]$ $(\alpha \in K_\nu)$. *B)* $1 \cdot \mathbf{A} = \mathbf{A}$, *F)* $(\alpha\beta)\mathbf{A} = \alpha(\beta\mathbf{A})$
C) $(\alpha + \beta)\mathbf{A} = \alpha\mathbf{A} + \beta\mathbf{A}$, $\alpha(\mathbf{A} + \mathbf{B}) = \alpha\mathbf{A} + \alpha\mathbf{B}$.
Speciálisan: $\alpha\mathbf{a} = [\alpha a_i]$, $1 \cdot \mathbf{a} = \mathbf{a}$, $(\alpha\beta)\mathbf{a} = \alpha(\beta\mathbf{a})$, $(\alpha + \beta)\mathbf{a} = \alpha\mathbf{a} + \beta\mathbf{a}$, $\alpha(\mathbf{a} + \mathbf{b}) = \alpha\mathbf{a} + \alpha\mathbf{b}$; $\alpha\mathbf{a}^* = [\alpha a_j]$, s í.t.

3'. Matrixok szorzása (konformabilitás esetén):

$$\underset{(n\times m)}{\mathbf{A}} \cdot \underset{(m\times s)}{\mathbf{B}} = [a_{ik}][b_{kj}] = \left[\sum_{k=1}^{m} a_{ik}b_{kj}\right] = \underset{(n\times s)}{(\mathbf{AB})};$$

$\underset{(m\times s)}{\mathbf{B}} \cdot \underset{(n\times m)}{\mathbf{A}}$ általában nincs értelmezve (csak $s = n$ esetén); *H)* $\mathbf{AB} \neq \mathbf{BA}$ (általában),

I) $(\mathbf{AB})\mathbf{C} = \mathbf{A}(\mathbf{BC})$, *J)* $\mathbf{A}(\mathbf{B} + \mathbf{C}) = \mathbf{AB} + \mathbf{AC}$, $(\mathbf{B} + \mathbf{C})\mathbf{A} = \mathbf{BA} + \mathbf{CA}$.

Speciálisan: $\underset{(1\times m)}{\mathbf{A}} \cdot \underset{(m\times 1)}{\mathbf{B}} \equiv \mathbf{a}^*\mathbf{b} = \underset{(1\times 1)}{s} = \sum_{j=1}^{m} a_jb_j = \mathbf{b}^*\mathbf{a}$ (skaláris szorzás), $\alpha(\mathbf{a}^*\mathbf{b}) = (\alpha\mathbf{a}^*\mathbf{b})$, $(\mathbf{a}^* + \mathbf{b}^*)\mathbf{c} = \mathbf{a}^*\mathbf{c} + \mathbf{b}^*\mathbf{c}$; $\underset{(n\times 1)}{\mathbf{A}} \cdot \underset{(1\times m)}{\mathbf{B}} \equiv \mathbf{ab}^* = \underset{(n\times m)}{\mathbf{D}} = [a_ib_j]$ (diadikus szorzás), $\mathbf{ba}^* = [b_ia_j] = \mathbf{D}^* \neq \mathbf{D}$ (általában), $\alpha(\mathbf{ab}^*) = (\alpha\mathbf{a})\mathbf{b}^*$, $(\mathbf{a} + \mathbf{b})\mathbf{c}^* = \mathbf{ac}^* + \mathbf{bc}^*$.

A matrixszorzat előállítása ezekkel:

$$\underset{m\times s}{(\mathbf{AB})} = \left[\sum_{k=1}^{m} a_{ik}b_{kj}\right] = [\mathbf{a}^i\mathbf{b}_j] = \begin{bmatrix} \mathbf{a}^1 \\ \mathbf{a}^2 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ \mathbf{a}^n \end{bmatrix} [\mathbf{b}_1\ \mathbf{b}_2 \dots \mathbf{b}_s] = \sum_{k=1}^{m} [a_{ik}b_{kj}] =$$

$$= \sum_{k=1}^{m} \mathbf{a}_k\mathbf{b}^k = [\mathbf{a}_1\ \mathbf{a}_2 \dots \mathbf{a}_m] \begin{bmatrix} \mathbf{b}^1 \\ \mathbf{b}^2 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ \mathbf{b}^m \end{bmatrix}.$$

4'. *Hatványozás:* $\mathbf{A} = \mathbf{A}_n$ (kvadratikus); $\mathbf{A}^0 = \mathbf{E}$, $\mathbf{A}^k = \underbrace{\mathbf{A}}_1\underbrace{\mathbf{A}}_2 \ldots \underbrace{\mathbf{A}}_k$, $\mathbf{A}^{k+l} = \mathbf{A}^k\mathbf{A}^l =$ $= \mathbf{A}^l\mathbf{A}^k$ (kommutatív), s így a $\sum_{k=0}^{n} c_k\mathbf{A}^k$ matrixpolinommal a $\sum_{k=0}^{n} c_k x^k$ skalárpolinom mintájára végezzük a racionális egész műveleteket.

5'. *Matrix inverze* (reciproka): $\mathbf{A} = \mathbf{A}_n \neq \mathbf{O}$; $\mathbf{AX} = \mathbf{YA} = \mathbf{E}$, csak $|\mathbf{A}| = \det(\mathbf{A}) \neq 0$ (regularitás) esetén létezik ilyen $\mathbf{X}$, $\mathbf{Y}$. Az $\tilde{\mathbf{A}} \equiv \operatorname{adj}\mathbf{A} = [\tilde{a}_{jk}] = [A_{jk}]^* = [A_{kj}]$ adjungált matrix felhasználásával

$$\mathbf{A}\tilde{\mathbf{A}} = [\mathbf{a}^i\tilde{\mathbf{a}}_j] = \tilde{\mathbf{A}}\mathbf{A} = [\tilde{\mathbf{a}}^i\mathbf{a}_j] = |\mathbf{A}|\cdot[\delta_{ij}] = |\mathbf{A}|\cdot\mathbf{E},$$

$$\mathbf{X} \equiv \mathbf{Y} \equiv \mathbf{A}^{-1} = \frac{\tilde{\mathbf{A}}}{|\mathbf{A}|}.$$

Beláthatóan $(\mathbf{AB})^{-1} = \mathbf{B}^{-1}\mathbf{A}^{-1}$.

6'. Tegyünk említést a *hipermatrix-műveletekről* is. *Összeadás és kivonás* (ha $\mathfrak{A}$ és $\mathfrak{B}$, ill. $\mathbf{a}_{IJ}$ és $\mathbf{b}_{IJ}$ megegyező típusúak): $\mathfrak{A} + \mathfrak{B} = [\mathbf{a}_{IJ} + \mathbf{b}_{IJ}]$. *Szorzás* (ha $\mathbf{A}^I$ és $\mathbf{B}_J$, ill. $\mathbf{a}_{IK}$ és $\mathbf{b}_{KJ}$ konformábilis): $\underset{\substack{(N\times M)\\(n\times m)}}{\mathfrak{A}} \cdot \underset{\substack{(M\times S)\\(m\times s)}}{\mathfrak{B}} = [\mathbf{A}^I\mathbf{B}_J] = \left[\sum_{K=0}^{M} \mathbf{a}_{IK}\mathbf{b}_{KJ}\right] = \underset{\substack{(N\times S)\\(n\times s)}}{\mathfrak{C}}$. *Inverz* [ha $\mathfrak{A} \equiv \mathfrak{A}_N$, $\mathbf{a}_{IJ} \equiv (\mathbf{a}_{IJ})_\nu$, $\mathbf{a}_{IJ}\mathbf{a}_{KL} = \mathbf{a}_{KL}\mathbf{a}_{IJ}$ (felcserélhetőség), és $|\mathbf{D}| = |\det(\mathfrak{A})| = \left|\sum_{J=1}^{N} \mathbf{a}_{IJ}\mathbf{A}_{IJ}\right| \neq 0$ (hiperdetermináns regularitása)]:

$$\mathfrak{A}^{-1} = [\mathbf{A}_{JI}\mathbf{D}^{-1}].$$

7'. Végül érintsünk *néhány vektoralgebrai vonatkozást*, matrixszimbolikával. Az előzők értelmében, egy $\mathbf{A} = \underset{(n\times m)}{\mathbf{A}}$ matrix $\mathbf{a}_j$, $\mathbf{a}_l$ oszlop- és $\mathbf{a}^i$, $\mathbf{a}^k$ sorvektorai — a rájuk mint speciális matrixokra érvényes

$$\mathbf{a}_j + \mathbf{a}_l = [a_{ij} + a_{il}], \qquad \alpha\mathbf{a}_j = [\alpha a_{ij}], \qquad \mathbf{a}_j^*\mathbf{a}_l = \sum_{k=1}^{n} a_{kj}a_{kl};$$

$$\mathbf{a}^i + \mathbf{a}^k = [a_{ij} + a_{kj}], \qquad \alpha\mathbf{a}^i = [\alpha a_{ij}], \qquad \mathbf{a}^i\mathbf{a}^{k*} = \sum_{j=1}^{m} a_{ij}a_{kj}$$

műveletek és említett törvényszerűségeik alapján — valóban a rendezett valós számtöbbesek E_n, ill. E_m *euklideszi tere* vektorainak tekinthetők, azaz $\mathbf{a}_j, \mathbf{a}_l \in E_n$, $\mathbf{a}^i, \mathbf{a}^k \in E_m$. Az $\mathbf{A}$ matrix $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \ldots, \mathbf{a}_m$ oszlopvektor-m-ese és $\mathbf{a}^1, \mathbf{a}^2, \ldots, \mathbf{a}^n$ sorvektor-n-ese egy $E_n' \subset E_n$, ill. $E_m' \subset E_m$ alteret képez, t. i. az $\mathbf{A}$ ún. *oszlopalterét*, ill. *soralterét*.*

Lineárisan független az $[\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \ldots, \mathbf{a}_m] = \mathbf{A}$ vektorrendszer, ha

$$\mathbf{a}_1x_1 + \mathbf{a}_2x_2 + \ldots + \mathbf{a}_mx_m \equiv \mathbf{Ax} \neq \mathbf{0}, \text{ midőn } \mathbf{x}^* = [x_1, x_2, \ldots, x_m] \neq \mathbf{0}^*.$$

* E két altér $r_n = r_m = r$ dimenziójával, ill. az $\mathbf{A}$ matrix r rangjával a 1. §. b) β, I°-ban foglalkozunk majd.

Példák és feladatok

1. Pl. Végezzük el a kijelölt matrixösszeadásokat:

a) $$\begin{bmatrix}1 & 0 & -2 & 7\\ 0 & -5 & 11 & 4\\ 8 & 0 & -6 & 0\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}2 & -4 & 7 & -9\\ 0 & 0 & -3 & 5\\ -12 & 0 & 7 & -8\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}3 & -4 & 5 & -2\\ 0 & -5 & 8 & 9\\ -4 & 0 & 1 & -8\end{bmatrix};$$

b) $$[2\ \ -1\ \ 7\ \ 0]+[-3\ \ 0\ \ 2\ \ 5]=[-1\ \ -1\ \ 9\ \ 5];$$

c) $$\sum_{k=0}^{4}\begin{bmatrix}3\cdot 2^k & 0\\ 1 & \left(\frac{1}{2}\right)^k\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}3\cdot\sum\limits_{k=0}^{4}2^k & 0\\ 5 & \sum\limits_{k=0}^{4}\left(\frac{1}{2}\right)^k\end{bmatrix}=$$

$$=\begin{bmatrix}3\cdot\dfrac{2^5-1}{2-1} & 0\\ 5 & \dfrac{(1/2)^5-1}{1/2-1}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}93 & 0\\ 5 & \dfrac{31}{16}\end{bmatrix}.$$

2. Pl. Állítsuk elő tagok összegeként az alábbi matrixokat:

a) $$\begin{bmatrix}a_{11}b_{11}+a_{12}b_{21} & a_{11}b_{12}=a_{12}b_{22}\\ a_{21}b_{11}+a_{22}b_{21} & a_{21}b_{12}+a_{22}b_{22}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}a_{11}b_{11} & a_{11}b_{12}\\ a_{21}b_{11} & a_{21}b_{12}\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}a_{12}b_{21} & a_{12}b_{23}\\ a_{22}b_{22} & a_{22}b_{22}\end{bmatrix};$$

b) $$\begin{bmatrix}4 & 8 & 3\\ 5 & 9 & -6\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}2 & 5 & 4\\ 5 & 4 & -6\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}2 & 3 & -1\\ 0 & 5 & 0\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}2 & -1 & 8\\ 0 & 7 & -5\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}0 & 6 & -4\\ 5 & -3 & -1\end{bmatrix}+$$

$$+\begin{bmatrix}2 & 3 & -1\\ 0 & 5 & 0\end{bmatrix}.$$

3. Pl. Igazoljuk, hogy a matrixok összeadása és transzponálása sorrendre nézve felcserélhető egymással. —

$$(\mathbf{A}+\mathbf{B})^*=[a_{ij}+b_{ij}]^*=[a_{ji}+b_{ji}]=[a_{ji}]+[b_{ji}]=\mathbf{A}^*+\mathbf{B}^*.$$

4. Pl. Végezzük el a kijelölt hipermatrix-összeadásokat:

$$\left[\begin{array}{c:ccc}a_{00} & a_{01} & a_{02} & a_{03}\\ a_{10} & a_{11} & a_{12} & a_{13}\\ \hdashline a_{20} & a_{21} & a_{22} & a_{23}\end{array}\right]+\left[\begin{array}{c:ccc}d_{00} & d_{01} & d_{02} & d_{03}\\ d_{10} & d_{11} & d_{12} & d_{1}\\ \hdashline d_{20} & d_{21} & d_{22} & d_{23}\end{array}\right]=\left[\begin{array}{c:ccc}a_{00}+d_{00} & a_{01}+d_{01} & \ldots & a_{03}+d_{03}\\ a_{10}+d_{10} & a_{11}+d_{11} & \ldots & a_{13}+d_{13}\\ \hdashline a_{20}+d_{20} & a_{21}+d_{21} & \ldots & a_{23}+d_{23}\end{array}\right].$$

5. Pl. Végezzük el a kijelölt matrixkivonásokat:

a) $$\begin{bmatrix}2 & -1 & 0 & 7\\ -3 & 4 & -2 & 0\end{bmatrix}-\begin{bmatrix}-7 & 2 & 9 & 0\\ 4 & 0 & -1 & 4\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}9 & -3 & -9 & 7\\ -7 & 4 & -1 & -4\end{bmatrix};$$

b) $$[4\ \ -7\ \ 0\ \ 5]-[1\ \ -2\ \ 3\ \ 0]=[3\ \ -5\ \ -3\ \ 5].$$

6. Pl. Igazoljuk, hogy két szimmetrikus (tükrös) matrix összege és különbsége is olyan. —

$$\mathbf{A}_s\pm\mathbf{B}_s=[a_{ji}]\pm[b_{ji}]=[a_{ij}]\pm[b_{ij}]=[a_{ij}\pm b_{ij}]=[a_{ji}\pm b_{ji}]=(\mathbf{A}\pm\mathbf{B})_s.$$

7. Pl. Igazoljuk, hogy a matrixok kivonása és transzponálása sorrendre nézve felcserélhető egymással. —

$$(\mathbf{A}-\mathbf{B})^* = [a_{ij}-b_{ij}]^* = [a_{ji}-b_{ji}] = [a_{ji}]-[b_{ji}] = \mathbf{A}^*-\mathbf{B}^*.$$

8. Pl. Matrixok számmal való szorzását végezzük el az alábbiakban;

$$a)\ 3\cdot\begin{bmatrix}-2 & 5\\ 7 & 0\\ 3 & 7\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}-6 & 15\\ 21 & 0\\ 9 & 21\end{bmatrix},\quad b)\ (1-2i)\cdot\begin{bmatrix}2\\ -i\\ 3\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}2-4i\\ -2-i\\ 3-6i\end{bmatrix},$$

$$c)\ 4\cdot\begin{bmatrix}1\\ 0\\ -2\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}4\\ 0\\ -8\end{bmatrix}.$$

9. Pl. Igazoljuk, hogy bármely kvadratikus $\mathbf{A}$ matrix előállítható egy szimmetrikus (tükrös) $\mathbf{A}_s$ és egy antiszimmetrikus (váltó) $\mathbf{A}_a$ matrix összegeként, s határozzuk is meg ezeket. —

Az állítás szerint: $\mathbf{A} = \mathbf{A}_s + \mathbf{A}_a$.
Transzponálás után: $\mathbf{A}^* = \mathbf{A}_s - \mathbf{A}_a$. $\quad (\mathbf{A}_s,\ \mathbf{A}_a = ?)$

Fél összegük: $\frac{1}{2}(\mathbf{A}+\mathbf{A}^*) = \mathbf{A}_s$, ill. fél különbségük: $\frac{1}{2}(\mathbf{A}-\mathbf{A}^*) = \mathbf{A}_a$

adja a keresett matrixokat.

$$\text{Pl.: } \mathbf{A} = \begin{bmatrix}3 & 0 & -7\\ 4 & -2 & 5\\ 8 & -3 & 0\end{bmatrix},\quad \mathbf{A}^* = \begin{bmatrix}3 & 4 & 8\\ 0 & -2 & -3\\ -7 & 5 & 0\end{bmatrix};$$

$$\mathbf{A}_s = \begin{bmatrix}3 & 2 & \frac{1}{2}\\ 2 & -2 & 1\\ \frac{1}{2} & 1 & 0\end{bmatrix},\quad \mathbf{A}_a = \begin{bmatrix}0 & -2 & -\frac{15}{2}\\ 2 & 0 & 2\\ \frac{15}{2} & -4 & 0\end{bmatrix}.$$

**10. Pl.* Tekintsük a megegyező ($n\times m$ típusú) matrixok

$$L = \{\mathbf{A}, \mathbf{B}, \mathbf{C}, \ldots\} = \{[a_{ij}], [b_{ij}], [c_{ij}], \ldots\}$$

halmazát és a $K = \{\alpha, \beta, \gamma, \ldots\}$ számtestet. Igazoljuk, hogy az L-ben

$$\mathbf{A}+\mathbf{B} = [a_{ij}+b_{ij}] \in L \quad \text{és} \quad \alpha\mathbf{A} = [\alpha a_{ij}] \in L$$

módon értelmezett összeadási, ill. számmal szorzási művelet eleget tesz a I. tér $\beta)$ I°-ben megismert axiómáinak.

11. Pl. Igazoljuk, hogy $|\alpha\mathbf{A}_n| = \alpha^n\cdot|\mathbf{A}_n|$. —
A *c)* determináns-axióma következménye (ad. c.,) szerint

$$D_\alpha \equiv D(\alpha_1\mathbf{a}_1, \ldots, \alpha_j\mathbf{a}_j, \ldots, \alpha_n\mathbf{a}_n) = \prod_{j=1}^{n}\alpha_j\cdot D(\mathbf{a}_1, \ldots, \mathbf{a}_j, \ldots, \mathbf{a}_n) \equiv D\prod_{j=1}^{n}\alpha_j,$$

mely $\alpha_1 = \ldots = \alpha_j = \ldots = \alpha_n = \alpha$ esetén és $D \equiv |\mathbf{A}_n|$, $D_\alpha \equiv |\alpha\mathbf{A}_n|$ jelöléssel éppen a fenti alakba megy át.

Pl.:

$$\begin{bmatrix} 6 & -4 & -2 \\ -4 & 8 & 0 \\ -2 & 0 & 4 \end{bmatrix} = 2 \cdot \begin{bmatrix} 3 & -2 & -1 \\ -2 & 4 & 0 \\ -1 & 0 & 2 \end{bmatrix} = 2\mathbf{A},$$

$$|2\mathbf{A}| = 2^3 \cdot |\mathbf{A}| = 2^3 \cdot \begin{vmatrix} 3 & -2 & -1 \\ -2 & 4 & 0 \\ -1 & 0 & 2 \end{vmatrix} = 8 \cdot 12 = 96.$$

12. Pl. Végezzük el (ha lehetséges) a kijelölt matrixszorzásokat:

a) $$\underset{(3\times 4)}{\mathbf{A}}\ \underset{(4\times 2)}{\mathbf{B}} = \begin{bmatrix} 4 & 2 & -1 & 2 \\ 3 & -7 & 1 & -8 \\ 2 & 4 & -3 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ -3 & 0 \\ 1 & 5 \\ 3 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 7 & 9 \\ 4 & 6 \\ -8 & -8 \end{bmatrix} = \underset{(3\times 2)}{\mathbf{C}}\ ;$$ **BA** nem létezik.

b) $$\underset{(2+3)}{\mathbf{A}}\ \underset{(3\times 2)}{\mathbf{B}} = \begin{bmatrix} 3 & 0 & 2 \\ 5 & -1 & 6 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -8 & 1 \\ 7 & 0 \\ 2 & 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -20 & 9 \\ -35 & 23 \end{bmatrix} = \underset{(2\times 2)}{\mathbf{C}_1} \neq$$

$$\neq \underset{(3\times 3)}{\mathbf{C}_2} = \mathbf{BA} = \begin{bmatrix} -19 & -1 & 10 \\ 21 & 0 & 14 \\ 21 & -3 & 22 \end{bmatrix}.$$

c) $$\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 4 & 3 \end{bmatrix}; \quad \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & 4 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}.$$

13. Pl. Végezzük el a kijelölt skaláris és diadikus szorzásokat:

a) $$[3 \quad 0 \quad -1 \quad 7] \begin{bmatrix} 2 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix} = [2 \quad -1 \quad 0 \quad 5] \begin{bmatrix} 3 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix} = 41.$$

b) $$\mathbf{e}^1\mathbf{e}_2 = [\cos\alpha, \quad \sin\alpha] \begin{bmatrix} -\sin\alpha \\ \cos\alpha \end{bmatrix} = 0,$$

$$\mathbf{e}^2\mathbf{e} = 0, \qquad \mathbf{e}^1\mathbf{e}_1 = \mathbf{e}^2\mathbf{e}_2 = 1$$

(ortonormált vektorpár).

c) $$\mathbf{ab}^* = \begin{bmatrix} 2 \\ -3 \end{bmatrix} [1 \quad -2 \quad 4] = \begin{bmatrix} 2 & -4 & 8 \\ -3 & 6 & 12 \end{bmatrix} = \underset{(2\times 3)}{\mathbf{D}}, \qquad \mathbf{ba}^* = \begin{bmatrix} 2 & -3 \\ -4 & 6 \\ 8 & -12 \end{bmatrix} = \underset{(3\times 2)}{\mathbf{D}^*}$$

14. Pl. Állítsuk elő a 12. *b)* alatti **AB** matrixszorzatot diádösszeg alakjában. — Írható, hogy

$$\mathbf{AB} = [\mathbf{a}_1, \quad \mathbf{a}_2, \quad \mathbf{a}_3] \begin{bmatrix} \mathbf{b}^1 \\ \mathbf{b}^2 \\ \mathbf{b}^3 \end{bmatrix} = \sum_{j=1}^{3} \mathbf{a}_j\mathbf{b}^j = \begin{bmatrix} 3 \\ 5 \end{bmatrix} \cdot [-8 \quad 1] + \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \end{bmatrix} \cdot [7 \quad 0] + \begin{bmatrix} 2 \\ 6 \end{bmatrix} \cdot [2 \quad 3] =$$

$$= \begin{bmatrix} -24 & 3 \\ -40 & 5 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ -7 & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 4 & 6 \\ 12 & 18 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -20 & 9 \\ -35 & 23 \end{bmatrix}.$$

15. Pl. Állítsuk elő az **AB** szorzat transzponáltját!

$$(\underset{(n\times m)}{\mathbf{A}}\ \underset{(m\times s)}{\mathbf{B}})^* = [\mathbf{a}^i\mathbf{b}_j]^* = [\mathbf{a}^j\mathbf{b}_i] = \mathbf{b}_i^*\mathbf{a}^{j*}] = \mathbf{B}^*\mathbf{A}^*.$$

16. Pl. Igazoljuk, hogy $\mathbf{A}_n\mathbf{B}_n = \mathbf{B}_n\mathbf{A}_n$, ha $\mathbf{A}_n = \alpha\mathbf{E}_n$. —

$$\alpha\mathbf{E}_n\mathbf{B}_n = [\alpha\,\delta_{ik}][b_{kj}] = \left[\sum \alpha\delta_{ik}b_{kj}\right] = [\alpha b_{ij}] = \alpha\cdot[b_{ij}] = \alpha\mathbf{B}_n,$$

és hasonló módon igazolható $\mathbf{B}_n\cdot\alpha\mathbf{E}_n = \alpha\mathbf{B}_n$ is.

Meg lehet mutatni, hogy az $\mathbf{A}_n\mathbf{B}_n$ matrixszorzás kommutativitása csakis $\mathbf{A}_n = \alpha\mathbf{E}_n$ esetén teljesül.

***17.** *Pl.* Igazolandó a matrixszorzás α) asszociativitása, β) bal és jobb oldali disztributivitása. —

Útmutatás: Elegendő a bal és jobb oldali matrix általános elemét előállítani és összevetni.

18. Pl. Képezendő lineáris és kvadratikus alak az alábbi (szimmetrikus) **A** matrixszal:

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 3 & -2 & -1 \\ -2 & 4 & 0 \\ -1 & 0 & 2 \end{bmatrix}. \text{ — Itt } \mathbf{Ax} = \begin{bmatrix} 3 & -1 & -1 \\ -2 & 4 & 0 \\ -1 & 0 & 2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3x_1 & -2x_2 & -x_3 \\ -2x_1 & +4x_2 & \\ -x_1 & & +2x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{bmatrix} = \mathbf{y};$$

$$Q = \mathbf{x}^*\mathbf{Ax} = \mathbf{x}^*\mathbf{y} = \left.\begin{matrix} 3x_1^2 - 2x_1x_2 - x_1x_3 + \\ -2x_1x_2 + 4x^2 \\ -\ x_1x_3 \qquad + 2x_3^2 \end{matrix}\right\}.$$

19. Pl. Határozzuk meg két, azonos rendű matrix szorzatának determinánsát. —

Ellenőrizhető, hogy

$$\mathbf{AB} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & -1 & 2 \\ 7 & 7 & -3 \end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix} 2 & -4 & 1 \\ 3 & 8 & -2 \\ 5 & -1 & 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 23 & 9 & 9 \\ 15 & -26 & 12 \\ 16 & 39 & -18 \end{bmatrix},$$

$|\mathbf{A}| = 132$, $|\mathbf{B}| = 77$, $|\mathbf{AB}| = |\mathbf{A}|\cdot|\mathbf{B}| = 10\,164$, amint állítottuk.

20. Pl. Mutassuk meg, hogy bármely kvadratikus matrix kielégíti a (skalárból jól ismert, egyváltozós, racionális egész)

$$\mathbf{A}^2 - 3\mathbf{A} + 2\mathbf{E} \equiv (\mathbf{A} - \mathbf{E})(\mathbf{A} - 2\mathbf{E}) \qquad (\mathbf{A} \equiv \mathbf{A}_n)$$

azonosságot. —

A szorzás disztributivitása folytán a jobb oldal

$$(\mathbf{A} - \mathbf{E})(\mathbf{A} - 2\mathbf{E}) = (\mathbf{A} - \mathbf{E})\mathbf{A} - 2(\mathbf{A} - \mathbf{E})\mathbf{E} = \mathbf{A}^2 - \mathbf{A} - 2\mathbf{A} + 2\mathbf{E} = \mathbf{A}^2 - 3\mathbf{A} + 2\mathbf{E},$$

megegyezésben a bal oldallal.

***21.** *Pl.* Állítsuk elő egy tetszőleges $\mathbf{A} = \mathbf{A}_2$ matrix alábbi hatványait: $\mathbf{A}^2$, $\mathbf{AA}^2 = \mathbf{A}^2\mathbf{A} = \mathbf{A}^3$, $\mathbf{A}^2\mathbf{A}^2 = \mathbf{A}^4$, $\mathbf{AA}^4 = \mathbf{A}^2\mathbf{A}^3 = \mathbf{A}^3\mathbf{A}^2 = \mathbf{A}^4\mathbf{A} = \mathbf{A}^5$.

22. Pl. Ellenőrizzük az alábbi kvadratikus matrixok regularitását, adjungáltját és inverzét!

$$a)\ \mathbf{A} = \begin{bmatrix} 3 & -2 & -1 \\ -2 & 4 & 0 \\ -1 & 0 & 2 \end{bmatrix}, \quad |\mathbf{A}| = 12, \quad \tilde{\mathbf{A}} = \begin{bmatrix} 8 & 4 & 4 \\ 4 & 5 & 2 \\ 4 & 2 & 8 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{A}^{-1} = \frac{1}{12}\cdot\begin{bmatrix} 8 & 4 & 4 \\ 4 & 5 & 2 \\ 4 & 2 & 8 \end{bmatrix};$$

$$b)\ \mathbf{A} = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 3 \\ 1 & 0 & -2 \end{bmatrix}, \quad |\mathbf{A}| = 5, \quad \tilde{\mathbf{A}} = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 3 & -5 & -6 \\ 1 & 0 & -2 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{A}^{-1} = \frac{1}{5}\cdot\begin{bmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 3 & -5 & -6 \\ 1 & 0 & -2 \end{bmatrix};$$

c) $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 7 \\ -1 & 4 & 5 \\ 3 & 1 & 2 \end{bmatrix}, \quad |\mathbf{A}| = -85, \quad \tilde{\mathbf{A}} = \begin{bmatrix} 3 & 7 & -28 \\ 17 & -17 & -17 \\ -13 & -2 & 8 \end{bmatrix};$

d) $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 1 & -2 & 0 \\ 4 & 4 & 5 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{A}^{-1} = \frac{1}{-5} \cdot \begin{bmatrix} -10 & 9 & 2 \\ -5 & 7 & 1 \\ 10 & -11 & -3 \end{bmatrix}.$

23. Pl. Állítsuk elő (a 22.a) felhasználásával) az alábbi (sor) vektorhármas reciprok (oszlop-) vektorhármasát! —

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} \mathbf{a}^1 \\ \mathbf{a}^2 \\ \mathbf{a}^3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & -2 & -1 \\ -2 & 4 & 0 \\ -1 & 0 & 2 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{A}^{-1} = [\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2, \mathbf{r}_3] = \frac{1}{12} \cdot \begin{bmatrix} 8 & 4 & 4 \\ 4 & 5 & 2 \\ 4 & 2 & 8 \end{bmatrix};$$

$$\mathbf{a}^1\mathbf{r}_1 = [3\ \ -2\ \ -1] \begin{bmatrix} 2/3 \\ 1/3 \\ 1/3 \end{bmatrix} = \mathbf{a}^2\mathbf{r}_2 = [-2\ \ 4\ \ 0] \begin{bmatrix} 1/3 \\ 5/12 \\ 1/6 \end{bmatrix} = \mathbf{a}^3\mathbf{r}_3 = [-1\ \ 0\ \ 2] \begin{bmatrix} 1/3 \\ 1/6 \\ 2/3 \end{bmatrix} = 1,$$

$$\mathbf{a}^1\mathbf{r}_2 = [3\ \ -2\ \ -1] \begin{bmatrix} 1/3 \\ 5/12 \\ 1/6 \end{bmatrix} = \mathbf{a}^1\mathbf{r}_3 = [3\ \ -2\ \ -1] \begin{bmatrix} 1/3 \\ 1/6 \\ 2/3 \end{bmatrix} = 0, \quad \text{s í. t.}$$

24. Pl. Igazoljuk, hogy $(\mathbf{A}_n\mathbf{B}_n)^{-1} = \mathbf{B}_n^{-1}\mathbf{A}^{-1}$ (ha $|\mathbf{A}|, |\mathbf{B}| \neq 0$). —
Az állítás igaz, mert

$$(\mathbf{AB})(\mathbf{B}^{-1}\mathbf{A}^{-1}) = \mathbf{A}(\mathbf{BB}^{-1})\mathbf{A}^{-1} = \mathbf{AEA}^{-1} = \mathbf{AA}^{-1} = \mathbf{E}.$$

25. Pl. Vizsgáljuk az $\mathbf{A}_n\mathbf{B}_n = \mathbf{O}_n$ zérusmatrix-szorzatot. —
Nem szükséges, hogy $\mathbf{A}_n = \mathbf{O}_n$, vagy $\mathbf{B}_n = \mathbf{O}_n$ legyen; pl.

$$\mathbf{A}_n\mathbf{B}_n = (\mathbf{ae}^1)(\mathbf{e}_3\mathbf{b}^*) = \mathbf{a}(\mathbf{e}^1\mathbf{e}_3)\mathbf{b}^* = 0 \cdot \mathbf{ab}^* = \mathbf{O}_n.$$

Ha viszont valamelyik tényező, pl. $\mathbf{A}_n$ reguláris, akkor

$$\mathbf{A}_n^{-1}(\mathbf{A}_n\mathbf{B}_n) = (\mathbf{A}_n^{-1}\mathbf{A}_n)\mathbf{B}_n = \mathbf{EB}_n = \mathbf{B}_n = \mathbf{A}^{-1}\mathbf{O} = \mathbf{O}.$$

26. Pl. Oldjuk meg az alábbi *reguláris*, lineáris matrixegyenletet (skalár egyenletrendszert). Egyenleteink:

$$\left.\begin{aligned} 3x - 2y - z &= 2{,}5 \\ -2x + 4y &= 2 \\ -x + 2z &= 2 \end{aligned}\right\}; \quad \mathbf{Ax} = \begin{bmatrix} 3 & -2 & -1 \\ -2 & 4 & 0 \\ -1 & 0 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2{,}5 \\ 2 \\ 2 \end{bmatrix} = \mathbf{b}, \quad |\mathbf{A}| = 12 \neq 0;$$

a megoldás elve:

$$\mathbf{A}^{-1}(\mathbf{Ax}) \equiv \mathbf{Ex} \equiv \mathbf{x} = \mathbf{A}^{-1} \equiv \frac{\tilde{\mathbf{A}}\mathbf{b}}{|\mathbf{A}|};$$

a numerikus megoldás:

$$\mathbf{x} = \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \frac{1}{12} \cdot \begin{bmatrix} 8 & 4 & 4 \\ 4 & 5 & 2 \\ 4 & 2 & 8 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 2{,}5 \\ 2 \\ 2 \end{bmatrix} = \frac{1}{12} \cdot \begin{bmatrix} 36 \\ 24 \\ 30 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 \\ 2 \\ 2{,}5 \end{bmatrix}.$$

b) Lineáris algebrai vizsgálatok matrixalgoritmussal

α) Transzformáló matrixalgoritmus (TMA)

A l. algebrai alapfogalmak és- műveletek áttekintése után alkalmazzuk most ezt az apparátust a l. algebra egyik fő problémájára, a l. egyenletrendszerek megoldására. Bár ez a probléma már régi, szinte klasszikusnak számít, mégis korunkban számos új eredmény, pontos és közelítő megoldási módszer született e téren, főleg a matrixalgebrai tárgyalásmód tagadhatatlan előnyeinek kihasználásával. Az utolsó évtized itt figyelemre méltó hazai eredményeket is hozott.

A l. egyenletrendszerek tanulmányozását különösen hasznossá teszi összefüggése a l. algebra számos olyan fontos problémájával, mint pl. különféle rendeltetésű matrixok megszerkesztése; matrixok átszámítása különböző bázisokra; matrixrang megállapítása, diadikus és bázisfaktoros előállítása stb. Beszéljünk előbb ezekről!

I°. Konstruktív matrixalgebra. A modern l. algebrai vizsgálatok szükségletei mindinkább kialakítanak egyfajta szerkesztő (konstruktív) matrixalgebrát. Érzékeltessük ezt néhány, különböző rendeltetésű $n\times m$ *típusú matrix* megszerkesztésével.

a) A kl indexű helyen 1, ill. a_{kl} elem, egyebütt 0:

$$\mathbf{E}_{kl} = \mathbf{e}_l\mathbf{e}^k = [\delta_{il}][\delta_{kj}] = [\delta_{il}\delta_{kj}], \qquad \mathbf{A}_{kl} = a_{kl}\mathbf{E}_{kl}.$$

b) Az $\mathbf{A}$ matrix egy (a_{kl}) elemének 0-sal való pótlása:

$$\mathbf{A}_{kl'} = \mathbf{A} - \mathbf{A}_{kl} \equiv \mathbf{A} - a_{kl}\mathbf{e}_l\mathbf{e}^k.$$

c) Az l-edik oszlopban $\mathbf{a}_l$, a többiben $\mathbf{0}$:

$$\mathbf{A}_l = [\mathbf{0}, \mathbf{0}, \ldots, \mathbf{a}_l, \ldots, \mathbf{0}] = \mathbf{a}_l\mathbf{e}^l = [a_{il}][\delta_{lj}] = [a_{il}\delta_{lj}].$$

d) Az $\mathbf{A}$ matrix $\mathbf{a}_l$ vektorának $\mathbf{0}$-al való pótlása:

$$\mathbf{A}_{l'} = \mathbf{A} - \mathbf{A}_l \equiv \mathbf{A} - \mathbf{a}_l\mathbf{e}^l.$$

e) Az l-edik oszlopban $\mathbf{a}_{l'}$ a k-adik sorban $\mathbf{a}^k$, a többi helyen 0:

$$\mathbf{A}_l^k = \mathbf{A}_l + \mathbf{A}^k - \mathbf{A}_{kl} \equiv \mathbf{a}_l\mathbf{e}^l + \mathbf{e}_k\mathbf{a}^k - a_{kl}\mathbf{e}_l\mathbf{e}^k \quad (a_{kl} = \mathbf{a}^k\mathbf{e}_l = \mathbf{e}^k\mathbf{a}_l).$$

f) Az $\mathbf{A}$ matrix $\mathbf{a}_l$ oszlopvektorának $\mathbf{0}$-al, $\mathbf{a}^k$ sorvektorának $\mathbf{0}^*$-val való pótlása (egyebütt változás nélkül):

$$\mathbf{A}_{l'}^{k} = \mathbf{A} - \mathbf{A}_l^k \equiv \mathbf{A} - \mathbf{a}_l\mathbf{e}^l - \mathbf{e}_k\mathbf{a}^k + a_{kl}\mathbf{e}_l\mathbf{e}^k.$$

g) Az $\mathbf{A}$ matrix $\mathbf{a}_l$ oszlopvektorának $\mathbf{0}$-val, $\mathbf{a}^k$ sorvektorának $\mathbf{0}^*$-val való pótlása, egyszerűbb módon (de egyebütt is változással), ha $a_{kl} \neq 0$:

$$\mathbf{A}^{k}_{l''} = \mathbf{A} - \frac{1}{a_{kl}}\mathbf{a}_l\mathbf{a}^k = \begin{array}{c} \\ \underset{\smile}{1} \\ \\ \underset{\smile}{k} \\ \\ \underset{\smile}{n} \end{array} \begin{bmatrix} \overset{1}{\smile} & & \overset{l}{\smile} & & \overset{m}{\smile} \\ a_{11} - \frac{a_{1l}a_{k1}}{a_{kl}} & \dots & 0 & \dots & a_{1m} - \frac{a_{1l}a_{km}}{a_{kl}} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & \dots & 0 & \dots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} - \frac{a_{nl}a_{k1}}{a_{kl}} & \dots & 0 & \dots & a_{nm} - \frac{a_{nl}a_{km}}{a_{kl}} \end{bmatrix}.$$

h) Az $\mathbf{A}$ matrix $\mathbf{a}_l$ oszlopvektorának pótlása ($\mathbf{0}$-al, majd) $\mathbf{b}_l$-al:

$$\mathbf{A}_{l'l} = \mathbf{A} - \mathbf{A}_l + \mathbf{B}_l \equiv \mathbf{A} - \mathbf{a}_l\mathbf{e}^l + \mathbf{b}_l\mathbf{e}^l \equiv \mathbf{A} - (\mathbf{a}_l - \mathbf{b}_l)\mathbf{e}^l.$$

Speciálisan, az $\mathbf{E}$ egységmatrix $\mathbf{e}_k$ vektorának pótlása $\mathbf{a}_l$ vektorral:

$$\alpha) \qquad \mathbf{E}_{k'l} = \mathbf{E} - \mathbf{e}_k\mathbf{e}^k + \mathbf{a}_l\mathbf{e}^k \equiv \mathbf{E} - (\mathbf{e}_k - \mathbf{a}_l)\mathbf{e}^k;$$

továbbá, az $\mathbf{A}$ matrix $\mathbf{a}_l$ vektorának pótlása $\mathbf{e}_k$-val:

$$\beta) \qquad \mathbf{A}_{l'k} = \mathbf{A} - \mathbf{a}_l\mathbf{e}^l + \mathbf{e}_k\mathbf{e}^l \equiv \mathbf{A} - (\mathbf{a}_l - \mathbf{e}_k)\mathbf{e}^l.$$

A fenti és más, egyéb módon szerkesztett matrixok gyakran szerepelnek a továbbiakban.

1. Pl. Gyakoroljuk a *b), d), f—g)* és *h)* β) matrixszerkesztéseket, az alábbi adatok mellett:

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 3 & 2 & 0 & -3 \\ 1 & 2 & 5 & 3 \\ -4 & 3 & -7 & 2 \end{bmatrix}, \qquad k = 2, \qquad l = 1.$$

II°. M a t r i x t r a n s z f o r m á l á s a *p* l é p é s b e n (TMA). 1'. Amint ismeretes, az E_n térben *bázist* képez bármely l. ftl $\mathbf{b}_i \in E_n$ $(j = 1, 2, \dots, n)$ vektor-n-es, vagy ami ugyanaz, bármely

$$\mathbf{B} = [\mathbf{b}_1, \dots, \mathbf{b}_i, \dots, \mathbf{b}_n], \qquad |\mathbf{B}| = \det(\mathbf{B}) \neq 0$$

kvadratikus, reguláris matrix. Egy $\mathbf{a}_j \in E_n$ vektor vagy $[\mathbf{a}_1, \dots, \mathbf{a}_j, \dots, \mathbf{a}_m] = \mathbf{A}$ vektor-m-es, azaz matrix *megadása* — hacsak ellenkező közlés nincs — a

$$\mathbf{B}_0 \equiv \underset{(n \times n)}{\mathbf{E}} = [\mathbf{e}_1, \dots, \mathbf{e}_i, \dots, \mathbf{e}_n], \qquad |\mathbf{E}| = \det(\mathbf{E}) = 1 \neq 0$$

egység-bázismatrixban történik. Pl. az $\mathbf{a}_j$ vektor báziselőállítása ebben

$$\mathbf{a}_j = \begin{bmatrix} a_{1j} \\ \vdots \\ a_{ij} \\ \vdots \\ a_{nj} \end{bmatrix} = a_{1j}\begin{bmatrix} 1 \\ \vdots \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix} + \ldots + a_{ij}\begin{bmatrix} 0 \\ \vdots \\ 1 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix} + \ldots + a_{nj}\begin{bmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ \vdots \\ 1 \end{bmatrix} =$$

$$= a_{1j}\mathbf{e}_1 + \ldots + a_{ij}\mathbf{e}_i + \ldots + a_{nj}\mathbf{e}_n \equiv \mathbf{E}_n\mathbf{a}_j$$

módon alakul.

Az $\mathbf{A}$ matrix mint oszlopvektor-m-es rendszerint $\mathbf{E}_n$ bázisú megadása nem jelenti azt, hogy e bázis az $\mathbf{A}$-val végzendő l. algebrai vizsgálatok során is célszerű marad. Ellenkezőleg, ilyenkor többnyire előnyösnek bizonyul *az* $\mathbf{A}$ *alkalmas l. ftl oszlopvektorainak a bázisba való bevonása* (az $\mathbf{E}_n$ egyes oszlopvektorai helyett). Az ekképpen módosuló bázisban ugyanis az $\mathbf{a}_j$ vektorok mind több, speciális elhelyezkedésű 0 koordinátával rendelkeznek, melyek végül pl. az $\mathbf{A}$ oszlopaltere bázisának és dimenziójának felismerését is lehetővé teszik. Tisztázzuk tehát most — több lépésben — az $\mathbf{A}$ matrix különböző $\mathbf{B}_q(q = 0, 1, \ldots, p)$ bázisokra való transzformálásának mikéntjét!

2'. Vonjuk be először az $\mathbf{a}_l = \sum_i a_{il}\mathbf{e}_i$ vektort a $\mathbf{B}_0 \equiv \mathbf{E}$ indulóbázisba, egy olyan $\mathbf{e}_k$ bázisvektor helyébe, amelyre az $\mathbf{a}_l$ nem ortogonális, azaz $\mathbf{e}^k\mathbf{a}_l = a_{kl} \neq 0$. Az így nyert *új* $\mathbf{B}_1$ matrix valóban *bázis*, mert reguláris és így invertálható is; nevezetesen — az I°1' és az *a)* β) III° felhasználásával —

$$\mathbf{B}_1 = [\mathbf{e}_1, \ldots, \mathbf{e}_{k-1}, \mathbf{a}_l, \mathbf{e}_{k+1}, \ldots, \mathbf{e}_n] = \mathbf{E} + (\mathbf{a}_l - \mathbf{e}_k)\mathbf{e}^k,$$

$$|\mathbf{B}_1| = \det(\mathbf{B}_1) = D(\mathbf{e}_1, \ldots, \sum_i a_{il}\mathbf{e}_i, \ldots, \mathbf{e}_n) = D(\mathbf{e}_1, \ldots, a_{kl}\mathbf{e}_k, \ldots, \mathbf{e}_n) =$$

$$= a_{kl} \cdot D(\mathbf{e}_1, \ldots, \mathbf{e}_k, \ldots, \mathbf{e}_n) = a_{kl} \cdot 1 = a_{kl} = 1/\gamma \neq 0;$$

$$\mathbf{B}_1^{-1} = \mathbf{E} - \gamma(\mathbf{a}_l - \mathbf{e}_k)\mathbf{e}^k \quad [\mathbf{B}_1\mathbf{B}_1^{-1} = \mathbf{E} + (\mathbf{a}_l - \mathbf{e}_k)\mathbf{e}^k \cdot (1 - \gamma - 1 + \gamma) = \mathbf{E}].$$

Az $\mathbf{A}$ matrix transzformálása a $\mathbf{B}_1$ bázisra a

$$\underset{(n\times n)(n\times m)}{\mathbf{B}_1 \ \mathbf{X}_1} = \underset{(n\times m)}{\mathbf{A}_0} \qquad (|\mathbf{B}_1| \neq 0, \mathbf{A}_0 \equiv \mathbf{A}, \mathbf{X}_1 \equiv \mathbf{A}_1 = ?)$$

reguláris inhomogén l. matrixegyenlet megoldásával történik ekképpen:

$$\mathbf{B}_1^{-1}\mathbf{B}_1\mathbf{X} = \mathbf{E}\mathbf{X} = \mathbf{X} \equiv \mathbf{A}_1 = \mathbf{B}_1^{-1}\mathbf{A}_0 =$$

$$= [\mathbf{E} - \gamma(\mathbf{a}_l - \mathbf{e}_k)\mathbf{e}^k]\mathbf{A}_0 = \mathbf{A}_0 - \gamma(\mathbf{a}_l - \mathbf{e}_k)\mathbf{a}^k.$$

A $\mathbf{B}_0 \equiv \mathbf{E}$ bázison adott $\mathbf{A}$ *matrix* tehát az ($\mathbf{e}_k \leftrightarrow \mathbf{a}_l$ bázisvektorcserével nyert) $\mathbf{B}_1$ *bázisra az*

$$\boxed{\mathbf{A}_1 = \mathbf{A}_0 - \gamma(\mathbf{a}_l - \mathbf{e}_k)\mathbf{a}^k} \quad (a_{kl} = 1/\gamma \neq 0)$$

formula szerint, vagyis a $\gamma(\mathbf{a}_l - \mathbf{e}_k)a^k$ generáló diád leválasztása útján *transzformálódik* (TMA_1). Az ilyen, $\mathbf{e}_k \leftrightarrow \mathbf{a}_l$ bázisvektorcserét kísérő transzformációt egyébként *egyszerű* vagy elemi jelzővel illetjük (szemben a később említendő összetett, vagy csoportos transzformációval).

1. Pl. Hogyan transzformálódik az $\mathbf{e}_1 \leftrightarrow \mathbf{a}_1$ ($\mathbf{e}^1\mathbf{a}_1 = a_{11} = 1 \neq 0$) bázisvektorcserénél az

$$\mathbf{A}_0 \equiv \mathbf{A} = \begin{bmatrix} \boxed{1} & 1 & 2 & 2 & 3 \\ -6 & 1 & 5 & 1 & 3 \\ 2 & 3 & 5 & 3 & 4 \\ 2 & -1 & -3 & -1 & -2 \end{bmatrix}$$

matrix? —

Az imént nyert képlet szerint

$$\mathbf{A}_1 = \mathbf{A}_0 - \frac{1}{a_{11}}(\mathbf{a}_1 - \mathbf{e}_1)\mathbf{a}^1 = \mathbf{A}_0 - 1 \cdot \begin{bmatrix} 0 \\ -6 \\ 2 \\ 2 \end{bmatrix} [1 \quad 1 \quad 2 \quad 2 \quad 3] =$$

$$= \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 & 2 & 3 \\ 0 & 7 & 17 & 13 & 9 \\ 0 & \boxed{1} & 1 & -1 & -2 \\ 0 & -3 & -7 & -5 & -8 \end{bmatrix}.$$

Ez tehát az $\mathbf{A}$-nak a $\mathbf{B}_1 = [\mathbf{a}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3, \mathbf{e}_4]$ bázisra transzformált alakja.

3'. Az első egyszerű transzformáció részletezése után már könnyebb lesz az $\mathbf{e}_{k_1} \leftrightarrow \mathbf{a}'_l(\mathbf{e}^{k_1}\mathbf{a}'_{l_1} = a'_{k_1 l_1} \neq 0,\ k_1 \neq k_0,\ l_1 \neq l_0)$ bázisvektorcseréjének megfelelő másodikat leírni. *Az új bázismatrix, determinánsa és inverze:*

$$\mathbf{B}_2 = \mathbf{E} + (\mathbf{a}_{l_0} - \mathbf{e}_{k_0})\mathbf{e}^{k_0} + (\mathbf{a}_{l_1} - \mathbf{e}_{k_1})\mathbf{e}^{k_1} = \mathbf{E} + (\mathbf{A}_{L_{01}} - \mathbf{E}_{K_{01}})\mathbf{E}^{K_{01}} =$$

$$= \mathbf{B}_1 + (\mathbf{a}_{l_1} - \mathbf{e}_{k_1})\mathbf{e}^{k_1} = \mathbf{B}_1 \cdot [\mathbf{E} + (\mathbf{a}'_{l_1} - \mathbf{e}_{k_1})\mathbf{e}_{k_1}]$$

$$\{\mathbf{e}_k = \mathbf{B}_1\mathbf{e}_k = \mathbf{B}_1^{-1}\mathbf{e}_k, \quad \mathbf{A}_{L_{01}} = [\mathbf{a}_{l_0}, \mathbf{a}_{l_1}], \quad \mathbf{E}_{K_{01}} = [\mathbf{e}_{k_0}, \mathbf{e}_{k_1}] = \mathbf{E}^{K^*_{01}}\};$$

$$|\mathbf{B}_2| = D(\mathbf{e}_1, \ldots, \sum_i a_{il_0}\mathbf{e}_i, \ldots, \sum_j a_{jl_1}\mathbf{e}_j, \ldots, \mathbf{e}_n) =$$

$$= \sum_i \sum_j a_{il_0}a_{jl_1} \cdot D(\mathbf{e}_1, \ldots, \mathbf{e}_i^{k_0}, \ldots, \mathbf{e}_j, \ldots, \mathbf{e}_n^{k_1}) = a_{k_0l_0}a_{k_1l_1} - a_{k_1l_0}a_{k_0l_1} =$$

$$= \begin{vmatrix} a_{k_0l_0} & a_{k_0l_1} \\ a_{k_1l_0} & a_{k_1l_1} \end{vmatrix} = |\mathbf{A}_{KL}| = |\mathbf{B}_1|\,|\mathbf{E} + (\mathbf{a}'_{l_1} - \mathbf{e}_{k_1})\mathbf{e}^{k_1}| = a_{k_0l_0}a'_{k_1l_1} \neq 0;$$

$$\mathbf{B}_2^{-1} = \mathbf{E} - (\mathbf{A}_{L_{01}} - \mathbf{E}_{K_{01}})\boldsymbol{\Gamma}_{01}\mathbf{E}^{K_{01}} = [\mathbf{E} - \gamma_1(\mathbf{a}'_{l_1} - \mathbf{e}_{k_1})\mathbf{e}^{k_1}]\mathbf{B}_1^{-1} =$$

$$= \mathbf{B}_1^{-1} - \gamma_1(\mathbf{a}'_{l_1} - \mathbf{e}_{k_1})\mathbf{r}^{k_1}, \qquad \{\mathbf{B}_1^{-1} = [\mathbf{r}^i,]; \ \boldsymbol{\Gamma}_{01} = \mathbf{A}_{KL_{01}}^{-1}, \ \gamma_1 = 1/a'_{k_1l_1};$$

$$\mathbf{B}_2\mathbf{B}_2^{-1} = \mathbf{E} + (\mathbf{A}_{L_{01}} - \mathbf{E}_{K_{01}}) \cdot [\mathbf{E}^{K_{01}} - (\mathbf{E}_2 + \mathbf{A}_{KL_{01}} - \mathbf{E}_2)\boldsymbol{\Gamma}_{01}\mathbf{E}^{K_{01}}] = \mathbf{E}\}.$$

Az $\mathbf{A}$ *matrixnak a* $\mathbf{B}_2$ *bázisra transzformált alakja* (TMA$_2$):

$$\boxed{\mathbf{A}_2 = \mathbf{B}_2^{-1}\mathbf{A}_0 = \mathbf{A}_0 - (\mathbf{A}_{L_{01}} - \mathbf{E}_{K_{01}})\boldsymbol{\Gamma}_{01}\mathbf{A}^{K_{01}} = \mathbf{A}_1 - \gamma_1(\mathbf{a}'_{l_1} - \mathbf{e}_{k_1})\mathbf{a}'^{k_1}.}$$

Láthatóan az $\mathbf{A}_2$ előállítható akár két, egymást követő, egyszerű transzformációval ($a_{k_0l_0} \neq 0$, $a'_{k_1l_1} \neq 0$ generáló elemek mellett), akár egy kettős transzformációval ($\mathbf{A}_{KL_{01}}$, $|\mathbf{A}_{KL_{01}}| = a_{k_0l_0}a'_{k_1l_1} \neq 0$ reguláris generáló matrix mellett). Természetes, hogy az $\mathbf{A}$-ból a $\mathbf{B}_2$-be került $\mathbf{a}_{l_0}$, $\mathbf{a}_{l_1}$ vektorok az $\mathbf{A}_2$-ben $\mathbf{a}'_{l_0} = \mathbf{e}_{k_0}$, $\mathbf{a}'_{l_1} = \mathbf{e}_{k_1}$ egységvektorként tükröződnek.

2. Pl. Hogyan transzformálódik az 1. példabeli $\mathbf{A}_1$ matrix az $\mathbf{e}_3 \leftrightarrow \mathbf{a}'_2(\mathbf{e}^3\mathbf{a}'_2 = a'_{32} = 1 \neq 0)$ bázisvektorcserénél? —

Az előbbi képlet alkalmazásával

$$\mathbf{A}_2 = \mathbf{A}_1 - \frac{1}{a'_{32}}(\mathbf{a}'_2 - \mathbf{e}_3)\mathbf{a}'^3 = \mathbf{A}_1 - 1 \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ 7 \\ 0 \\ -3 \end{bmatrix} [0 \quad 1 \quad 1 \quad -1 \quad -2] =$$

$$= \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 3 & 5 \\ 0 & 0 & 10 & 20 & 35 \\ 0 & 1 & 1 & -1 & -2 \\ 0 & 0 & \boxed{-4} & -8 & -14 \end{bmatrix}.$$

Ez tehát az $\mathbf{A}$-nak a $\mathbf{B}_2 = [\mathbf{a}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{a}_3, \mathbf{e}_4]$ bázisra transzformált alakja. Ugyanez

az $\mathbf{A}_0$-ból kiinduló kettős transzformációval:

$$\mathbf{A}_2 = \mathbf{A}_0 - \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -6 & 1 \\ 2 & 2 \\ 2 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 3 \end{bmatrix}^{-1} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 5 & 3 & 4 \end{bmatrix} =$$

$$= \mathbf{A}_0 - \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -6 & 1 \\ 2 & 2 \\ 2 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3 & -1 \\ -2 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 5 & 3 & 4 \end{bmatrix} =$$

$$= \mathbf{A}_0 - \begin{bmatrix} -2 & 1 \\ -20 & 7 \\ 2 & 0 \\ 8 & -3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 5 & 3 & 4 \end{bmatrix} =$$

$$= \mathbf{A}_0 - \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & -1 & -2 \\ -6 & 1 & -5 & -19 & -32 \\ 2 & 2 & 4 & 4 & 6 \\ 2 & -1 & 1 & 7 & 12 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 3 & 5 \\ 0 & 0 & 10 & 20 & 35 \\ 0 & 1 & 1 & -1 & -2 \\ 0 & 0 & -4 & -8 & -14 \end{bmatrix}.$$

4'. A fentiek általánosításaként az $\mathbf{e}_k \leftrightarrow \mathbf{a}_{l_q}$ bázisvektorcserét kísérő $q+1$-edik egyszerű transzformációt az alábbiakkal jellemezhetjük. *A $q+1$-edik bázismatrix, determinánsa és inverze:*

$$\mathbf{B}_{q+1} = \mathbf{E} + (\mathbf{A}_L - \mathbf{E}_K)\mathbf{E}^K = \mathbf{B}_q + (\mathbf{a}_{l_q} - \mathbf{e}_{k_q})\mathbf{e}^{k_q} = \mathbf{B}_q[\mathbf{E} + (\mathbf{a}^{(q)}_{l_q} - \mathbf{e}_{k_q})\mathbf{e}^{k_q}],$$

$$|\mathbf{B}_{q+1}| = \det(\mathbf{B}_{q+1}) = |\mathbf{A}_{KL}| = \begin{vmatrix} a_{k_0 l_0} & \dots & a_{k_0 l_q} \\ \dots & \dots & \dots \\ a_{k_q l_0} & \dots & a_{k_q l_q} \end{vmatrix} = a_{k_0 l_0} a'_{k_1 l_1} \dots a^{(q)}_{k_q l_q} \neq 0,$$

$$\mathbf{B}^{-1}_{q+1} = \mathbf{E} - (\mathbf{A}_L - \mathbf{E}_K)\mathbf{\Gamma}\mathbf{E}^K = [\mathbf{E} - \gamma_q(\mathbf{a}^{(q)}_{l_q} - \mathbf{e}_{k_q})\mathbf{e}^{k_q}]\mathbf{B}^{-1}_q$$

$$= \mathbf{B}^{-1}_q - \gamma_q(\mathbf{a}^{(q)}_{l_q} - \mathbf{e}_{k_q})\mathbf{r}^{k_q}_{(q)}$$

$$\{\mathbf{A}_L = [\mathbf{a}_{l_0}, \mathbf{a}_{l_1}, \dots, \mathbf{a}_{l_q}], \quad \mathbf{E}_K = [\mathbf{e}_{k_0}, \mathbf{e}_{k_1}, \dots, \mathbf{e}_{k_q}],$$

$$\mathbf{B}^{-1}_q = [\mathbf{r}^i_{(q)}], \quad \mathbf{\Gamma} = \mathbf{A}^{-1}_{KL}\}.$$

A $\mathbf{B}_q$ bázisra vonatkozó $\mathbf{A}_q$ matrixnak a $\mathbf{B}_{q+1}$ bázisra vonatkozó $\mathbf{A}_{q+1}$ *alakja egyszerű transzformációval* (TMA_{q+1}):

$$\boxed{\mathbf{A}_{q+1} = \mathbf{B}^{-1}_{q+1}\mathbf{A}_0 = \mathbf{A}_q - \gamma_q(\mathbf{a}^{(q)}_{l_q} - \mathbf{e}_{k_q})\mathbf{a}^{k_q}_{(q)}} \qquad (a^{(q)}_{k_q l_q} = 1/\gamma_q \neq 0).$$

Ha itt a q indexet

$$q = 0, 1, 2, \ldots, p-1$$

módon változtatjuk, s ennek megfelelően a képletet egymás után p-szer alkalmazzuk, *ezzel matrixalgoritmusként bonyolítjuk le p egyszerű transzformáció sorozatát.* A transzformációs lépések p száma nyilván nem lehet nagyobb az $\mathbf{A}$ matrix oszlopvektor-m-esében található l. ftl vektorok számánál. A matrixalgoritmus befejezésére (az $\mathbf{A}$ ún. rangjának megállapításával kapcsolatban) még visszatérünk.

III°. Matrix transzformálása egy ugrásban (TMF). *1'.* Az $\mathbf{A}_p$ zárómatrixot egyébként *közvetlenül az* $\mathbf{A}_0$ *matrixból kiindulva, egyetlen csoportos (p-szeres) transzformációval* (tehát p lépés helyett egyetlen ugrással) is lebonyolítható, az alábbi matrixformulával (TMF):

$$\boxed{\mathbf{A}_p = \mathbf{A}_0 - (\mathbf{A}_L - \mathbf{E}_K)\mathbf{\Gamma}\mathbf{A}^K}$$

$$\{\mathbf{A}_L = [\mathbf{a}_{l_0}, \mathbf{a}_{l_1}, \ldots, \mathbf{a}_{l_{p-1}}], \quad \mathbf{A}^K = \begin{bmatrix} \mathbf{a}^{k_0} \\ \vdots \\ \mathbf{a}^{k_{p-1}} \end{bmatrix}, \quad |\mathbf{A}_{KL}| = \begin{vmatrix} a_{k_0 l_0} & \ldots & a_{k_{p-1} l_{p-1}} \\ \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{k_{p-1} l_0} & \ldots & a_{k_{p-1} l_{p-1}} \end{vmatrix} \neq 0,$$

$$\mathbf{E}_K = [\mathbf{e}_{k_0}, \mathbf{e}_{k_1}, \ldots, \mathbf{e}_{k_{p-1}}], \quad \mathbf{\Gamma} = \mathbf{A}_{KL}^{-1}\}.$$

Megjegyzendő, hogy a p lépéses matrixalgoritmus fentebbi formulája előállítható a most nyertre emlékeztető

$$\mathbf{A}_p = \mathbf{A}_0 - (\mathbf{A}'_L - \mathbf{E}_K)\mathbf{\Gamma}'\mathbf{A}'^K$$

alakban is, ahol azonban

$$\mathbf{A}'_L = [\mathbf{a}_{l_0}, \mathbf{a}'_{l_1}, \ldots \mathbf{a}^{(p-1)}_{l_{p-1}}]; \quad \mathbf{A}'^K = \begin{bmatrix} \mathbf{a}^{k_0} \\ \vdots \\ \mathbf{a}^{k_{p-1}}_{(p-1)} \end{bmatrix}; \quad \mathbf{\Gamma}' = \langle \gamma_0, \gamma_1, \ldots, \gamma_{p-1} \rangle.$$

2'. A fentiekhez hasonló matrixeljárások a továbbiakban nagy szerepet játszanak. Legközelebb az $\mathbf{A}$ matrix ún. rangjának megállapításával kapcsolatban fogjuk észlelni a fenti matrixalgoritmus jelentőségét. Később pedig, a l. programozás ún. közönséges szimplex módszerénél* olyan $\mathbf{A}_q$ transzformáció-sorozattal találkozunk majd, amelynél nemcsak a $\mathbf{B}_q$ bázis változik lépésenként, egy új $\mathbf{a}_{l_q}$ bázisvektor bevonásával, hanem maga az $\mathbf{A}_q$ matrix is, a $\mathbf{B}_q$-ból kivont $\mathbf{e}_{k_q}$ vektor beiktatásával.

---

* L. a 2. § *b) α)* helyén!

3. Pl. Hogyan transzformálódik a 2. példabeli $\mathbf{A}_2$ matrix az $\mathbf{e}_4 \leftrightarrow \mathbf{a}_3''(a_{43}'' = -4 \neq 0)$ bázisvektorcserénél? —

A (20) formula szerint

$$\mathbf{A}_3 = \mathbf{A}_2 - \frac{1}{a_{43}''}(\mathbf{a}_3'' - \mathbf{e}_4)\mathbf{a}_{r''}^4 = \mathbf{A}_2 + \frac{1}{4}\cdot\begin{bmatrix} 1 \\ 10 \\ 1 \\ -5 \end{bmatrix}[0 \quad 0 \quad -4 \quad -14] =$$

$$= \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 & 1{,}5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -3 & -5{,}5 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 3{,}5 \end{bmatrix}.$$

További bázisvektorcserére (pl. $\mathbf{e}_2 \leftrightarrow \mathbf{a}_4'''$, vagy $\mathbf{e}_2 \leftrightarrow \mathbf{a}_5'''$) már nincs lehetőség (lévén $a_{24}''' = a_{25}''' = 0$).

Az $\mathbf{A}_3$-at közvetlenül az $\mathbf{A}$-ból kiinduló hármas transzformációval is előállíthatjuk:

$$\mathbf{A}_3 = \mathbf{A}_0 - \begin{bmatrix} 0 & 1 & 2 \\ -6 & 1 & 5 \\ 2 & 2 & 5 \\ 2 & -1 & -4 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 2 & 3 & 5 \\ 2 & -1 & -3 \end{bmatrix}^{-1}\cdot\begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 5 & 3 & 4 \\ 2 & -1 & -3 & -1 & -2 \end{bmatrix}.$$

Folytassuk a számítást!

IV°. M a t r i x i n v e r t á l ó a l g o r i t m u s (I M A). *1'.* Figyelemre méltó egyébként, hogy az itt tárgyalt matrixalgoritmus *matrixinvertálásra is alkalmassá tehető.*

Legyen ugyanis az induló $\mathbf{A}_0 \equiv \mathbf{A}$ matrix n-ed rendű kvadratikus és reguláris, tehát $|\mathbf{A}| \neq 0$ determinánsú (ami tudvalevőleg oszlop-vektorrendszerének, vagy akár sorvektorrendszerének l. ftls-ét biztosítja). Ha most az $\mathbf{A}$ matrix $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \ldots, \mathbf{a}_n$ oszlopvektorát egymás után a $\mathbf{B}_0 \equiv \mathbf{E}_n$ induló bázis $\mathbf{e}_{k_1}, \mathbf{e}_{k_2}, \ldots, \mathbf{e}_{k_n}$ oszlopvektora helyébe vonjuk be, akkor az $\mathbf{A}$ matrixnak az így nyert $\mathbf{B}_1, \mathbf{B}_2, \ldots, \mathbf{B}_n$ bázisra transzformált alakját s egyidejűleg e bázismatrixok inverzét a fentiek értelmében az

$$\mathbf{A}_{q+1} = \mathbf{A}_q - \gamma_q(\mathbf{a}_{k_q}^{(q)} - \mathbf{e}_{k_q})\mathbf{a}_{(q)}^{k_q}, \quad \text{ill.} \quad \text{a } \mathbf{B}_{q+1}^{-1} = \mathbf{B}_q^{-1} - \gamma_q(\mathbf{a}_{k_q}^{(q)} - \mathbf{e}_{k_q})\mathbf{r}^{k_q}$$

$$\{\mathbf{A}_0 \equiv \mathbf{A},\ \mathbf{B}_0^{-1} \equiv \mathbf{E}_n; \quad a_{k_q,k_q}^{(q)} = 1/\gamma_q \neq 0, \quad \mathbf{a}_{k_q}^{(q)} \equiv \mathbf{A}_q\mathbf{e}_{k_q}, \quad \mathbf{r}_{(q)}^{k_q} \equiv \mathbf{e}^{k_q}\mathbf{B}_q^{-1};$$

$$\det(\mathbf{B}_{q+1}) \equiv |\mathbf{B}_{q+1}| = a_{k_1,k_1}a'_{k_2,k_2}\ldots a_{k_q,k_q}^{(q)} \neq 0; \quad k_i \neq k_j; \quad q = 0, 1, \ldots, n-1;$$

$$\mathbf{A}_n \equiv \mathbf{E}_n, \quad |\mathbf{B}_n| = \prod_{q=0}^{n-1} a_{k_q,k_q}^{(q)} \equiv |\mathbf{A}| \neq 0, \quad \mathbf{B}_n^{-1} \equiv \mathbf{A}^{-1}\}$$

algoritmuspár szolgáltatja, mégpedig — láthatóan — a főátló menti generáló

elemekkel, továbbá az $\mathbf{E}_n$ egységmatrixszal és a keresett $\mathbf{A}^{-1}$ inverzmatrixszal mint zárómatrixpárral.

2'. A két algoritmus hasonló szerkezete, valamint a most érdekesebb második algoritmusnak az elsőre való utaltsága (gondoljunk az $\mathbf{a}_{k_q}^{(q)}$ vektorokra!) célszerűvé teszi a

$$\boxed{\mathbf{C}_{q+1} = \mathbf{C}_q - \gamma_q(\mathbf{c}_{k_q}^{(q)} - \mathbf{e}_{k_q})\mathbf{c}_{(q)}^{k_q}}$$

$$\{\mathbf{C}_0 \equiv [\mathbf{A}, \mathbf{E}_n], \quad \mathbf{C}_q \equiv [\mathbf{A}_q, \mathbf{B}_q^{-1}]; \quad \mathbf{c}_{k_q}^{(q)} \equiv \mathbf{C}_q \mathbf{e}_{k_q} = \mathbf{a}_{k_q}^{(q)},$$

$$\mathbf{c}_{(q)}^{k_q} \equiv \mathbf{e}^{k_q}\mathbf{C}_q = [\mathbf{a}_{(q)}^{k_q}, \mathbf{r}'^{q}_{(q)}]; \quad q+1 = 1, 2, \ldots, n; \quad a_{k_q,k_q}^{(q)} = 1/\gamma_q \neq 0;$$

$$\mathbf{C}_n \equiv [\mathbf{E}_n, \mathbf{A}^{-1}]\}$$

egyesített matrixalgoritmus (IMA) megszerkesztését, amely nyilván egymaga oldja meg az **A** matrix transzformálásának és invertálásának kettős feladatát.* Szerencsés esetben $k_q = q + 1$, mikor is a főátló mentén természetes sorrendben haladhatunk a generáló elemek választásával.

4. Pl. Invertáljuk matrixalgoritmusunkkal az alábbi (reguláris) matrixot:

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & -3 \\ 3 & 1 & 4 & -3 \\ 2 & 5 & 2 & -4 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}. -$$

Indulóhelyzet: $\mathbf{C}_0 = [\mathbf{A}, \mathbf{E}] = \left[\begin{array}{cccc:cccc} \boxed{1} & 2 & 3 & -3 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 3 & 1 & 4 & -3 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 5 & 2 & -4 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right].$

Első lépés ($a_{11} = 1$):

$$\mathbf{C}_1 = \mathbf{C}_0 - \frac{1}{a_{11}}(\mathbf{a}_1 - \mathbf{e}_1)[\mathbf{a}^1; \mathbf{e}^1] =$$

$$= \mathbf{C}_0 - 1 \cdot \begin{bmatrix} 0 \\ 3 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix} \left[\begin{array}{cccc:cccc} 1 & 2 & 3 & -2 & 1 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right] =$$

$$= \left[\begin{array}{cccc:cccc} 1 & 2 & 3 & -2 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \boxed{-5} & -5 & 3 & -3 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -4 & 0 & -2 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & -2 & 3 & -1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right].$$

---

* Amennyiben ilyenkor a főátlóról letérünk, az $\mathbf{E}_n$ és $\mathbf{A}^{-1}$ oszlopvektorai kevert sorrendben jelentkeznek a $\mathbf{C}_n$ zárómatrixban

Második lépés ($a'_{22} = -5$):

$$\mathbf{C}_2 = \mathbf{C}_1 - \frac{1}{a'_{22}}(\mathbf{a}'_2 - \mathbf{e}_2)[\mathbf{a}^2; \mathbf{r}^2] =$$

$$= \mathbf{C}_1 + \frac{1}{5} \cdot \begin{bmatrix} 2 \\ -6 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix} \left[\begin{array}{cccc|cccc} 0 & -5 & -5 & 3 & -3 & 1 & 0 & 0 \end{array}\right] =$$

$$= \left[\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 0 & 1 & -\frac{4}{5} & -\frac{1}{5} & \frac{2}{5} & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & -\frac{3}{5} & \frac{3}{5} & -\frac{1}{5} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \boxed{-5} & \frac{3}{5} & -\frac{13}{5} & \frac{1}{5} & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & \frac{12}{5} & -\frac{2}{5} & -\frac{1}{5} & 0 & 1 \end{array}\right].$$

Harmadik lépés ($a''_{33} = -5$):

$$\mathbf{C}_3 = \mathbf{C}_2 - \frac{1}{a''_{33}}(\mathbf{a}''_3 - \mathbf{e}_2)[a^3_{''}; r^3_{''}] =$$

$$\mathbf{C}_2 + \frac{1}{5} \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ -6 \\ -1 \end{bmatrix} \left[\begin{array}{cccc|cccc} 0 & 0 & -5 & \frac{3}{5} & -\frac{13}{5} & \frac{1}{5} & 1 & 0 \end{array}\right] =$$

$$= \left[\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 0 & 0 & -\frac{17}{25} & -\frac{18}{25} & \frac{11}{25} & \frac{1}{5} & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -\frac{12}{25} & \frac{2}{25} & -\frac{4}{25} & \frac{1}{5} & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -\frac{3}{5} & \frac{13}{25} & -\frac{1}{25} & -\frac{1}{5} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \boxed{\frac{57}{25}} & \frac{3}{25} & -\frac{6}{25} & -\frac{1}{5} & 1 \end{array}\right].$$

Negyedik lépés $\left(a_{44}''' = \frac{57}{25}\right)$:

$$\mathbf{C}_4 = [\mathbf{E}, \mathbf{A}^{-1}] = \mathbf{C}_3 - \frac{1}{a_{44}'''}(\mathbf{a}_4''' - \mathbf{e}_4)[\mathbf{a}^4; \mathbf{r}^4] =$$

$$= \mathbf{C}_3 - \frac{1}{57} \cdot \begin{bmatrix} -17 \\ -12 \\ -3 \\ 32 \end{bmatrix} \left[0 \quad 0 \quad 0 \quad \frac{57}{25} \;\vdots\; \frac{3}{25} \quad -\frac{6}{25} \quad -\frac{1}{5} \quad 1 \right] =$$

$$= \left[\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 0 & 0 & 0 & -0{,}72222 & 0{,}44444 & 0{,}20370 & -0{,}01852 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0{,}11111 & -0{,}22222 & 0{,}14815 & 0{,}25926 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0{,}55555 & -0{,}11111 & -0{,}25926 & 0{,}29630 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0{,}05555 & -0{,}11111 & -0{,}09259 & 0{,}46296 \end{array}\right],$$

ahol 8 tizedes pontosságú gépi számítási eredményt kerekítettünk 5 tizedesre. Az **A** determinánsának értéke:

$$|\mathbf{A}| = |\mathbf{B}_4| = \prod_{q=0}^{3} a_{k_q k_q}^{(q)} = a_{11}a_{22}'a_{33}''a_{44}''' = 1 \cdot (-5) \cdot (-5) \cdot \frac{57}{25} = 57.$$

β) Rangadó és normáló matrixalgoritmus (R—NMA)

I°. A rangszám értelmezései. 1'. A matrix rangját egyszerűen az általa képviselt két vektorrendszer rangjával, ill. az általuk generált két altér dimenziójával hozzuk kapcsolatba. Ilyen értelemben beszélni lehetne az **A** matrix

r_n sorrangjáról, mint a	r_m oszloprangjáról, mint az
$\{\xi_1\mathbf{a}^1 + \xi_2\mathbf{a}^2 + \ldots + \xi_n\mathbf{a}^n\}$	$\{x_1\mathbf{a}_1 + x_2\mathbf{a}_2 + \ldots + x_m\mathbf{a}_m\}$
soraltér dimenziójáról, másként az	oszlopaltér dimenziójáról, másként az
$\mathbf{a}^1, \mathbf{a}^2, \ldots, \mathbf{a}^n$ sorvektor-n-es	$\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \ldots, \mathbf{a}_m$ oszlopvektor-m-es

rangjáról, vagyis a benne fellelhető l. ftl vektorok maximális számáról. Ig n kedvező körülmény, hogy e két, különbözőnek vélhető rangszám (r_n és r_m)

minden esetben *megegyezőnek* fog bizonyulni*, s így lehetővé válik a matrix rangjára az alábbi egyszerű

1. Definíció: Az $\underset{(n\times m)}{\mathbf{A}}$ *matrix rangszámán, röviden rangján sorvektor-n-ese és oszlopvektor-m-ese megegyező r rangját, vagy ami ugyanaz, az általuk generált soraltér, ill. oszlopaltér közös r dimenzióját értjük.* Jele:

$$r \equiv \varrho(\underset{(n\times m)}{\mathbf{A}}) = r_m \equiv \varrho(\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \ldots, \mathbf{a}_m) = r_n \equiv \varrho(\mathbf{a}^1, \mathbf{a}^2, \ldots, \mathbf{a}^n).$$

Nyilvánvalóan mindkét értelmezés akár a sor- vagy oszlopvektorrsz-ben, akár pedig a sor- vagy oszlopaltérben fellelhető *l. ftl vektorok maximális számát* jelenti.

1. Pl. Az alábbi matrix rangja nyilván $r = 2$, mert az

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 4 \\ 0 & 3 & -6 \end{bmatrix}\text{-ban } \mathbf{a}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} \text{ és } \mathbf{a}_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 3 \end{bmatrix} \text{ l. ftl, de } \mathbf{a}_3 = 4\mathbf{a}_1 - 2\mathbf{a}_2 = \begin{bmatrix} 4 \\ -6 \end{bmatrix},$$

tehát az $\mathbf{A}$ oszlopvektor-hármasában csak 2 l. ftl vektor található. A két sorvektor,

$$\mathbf{a}^1 = [1 \quad 0 \quad 4] \quad \text{és} \quad \mathbf{a}^2 = [0 \quad 3 \quad -6]$$

l. ftls-e megerősíti az $r = 2$ rangmegállapítást.

2'. Az előzők értelmében az r-ed rangú $\mathbf{A}$ matrix oszlopvektor-m-esében *mindig található r (és nem több)* l. ftl vektor, pl. $\mathbf{a}_{j_1}, \mathbf{a}_{j_2}, \ldots, \mathbf{a}_{j_r} \in E_n$. A belőlük képzett $\mathbf{A}' = [\mathbf{a}_{j_1}, \mathbf{a}_{j_2}, \ldots, \mathbf{a}_{j_r}]$ matrix sorvektor-n-esében — a sor- és oszloprang megegyezése miatt — ugyancsak mindenkor észlelhető r (és nem több) l. ftl sorvektor, pl. $\mathbf{a}'^{i_1}, \mathbf{a}'^{i_2}, \ldots, \mathbf{a}'^{i_r} \in E_r$. Eme, r dimenziós l. ftl sorvektor-r-es *determinánsa* — az α) β) III°-ban tanult determinánstételek (5. és V.) értelmében — zérustól különböző, azaz

$$D_r = D(\mathbf{a}'^{i_1}, \mathbf{a}'^{i_2}, \ldots, \mathbf{a}'^{i_r}) = D_r(a_{ij}) = \begin{vmatrix} a_{i_1j_1} & \ldots & a_{i_1j_r} \\ \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{i_rj_1} & \ldots & a_{i_rj_r} \end{vmatrix} \neq 0.$$

Ez egyszersmind az $\mathbf{A}$ matrix elemeiből képezhető r-ed rendű determinánsok egyike; ennél magasabb rendű, nem zérus determináns r-nél több l. ftl sor- vagy oszlopvektor hiányában nem is alkotható az $\mathbf{A}$ elemeiből (a szokásos és oszloptörlésekkel). Éppen ezért a $D_r \neq 0$-t szokás az $\mathbf{A}$ (egyik) *fődeterminánsának* nevezni. A tárgyalást egyszerűbbé teszi — s kívánságra, alkalmas sor-, ill.

* Igazolása a *c)* α III° helyen következik.

oszlopcserékkel el is érhető — egy ődeterminánsnak a *bal felső sarokban* való elhelyezkedése, mikor is

$$D_r = D(\mathbf{a}'^1, \mathbf{a}'^2, \ldots, \mathbf{a}'^r) = \begin{vmatrix} a_{11} \ldots a_{1r} \\ \ldots\ldots\ldots \\ a_{1r} \ldots a_{rr} \end{vmatrix} \neq 0.$$

Az imént elmondottakban előkészítést nyert az **A** rangjára vonatkozó alábbi

2. Definíció: *Az* **A** *matrix* r a n g s z á m á n *az elemeiből (sor- és oszloptörlésekkel) kijelölhető, nem zérus aldeterminánsok legmagasabb rendszámát, értjük.* Jelölése:

$$r = \varrho(\underset{(n\times m)}{\mathbf{A}}), \quad \text{ha van} \quad D_r(a_{ij}) \neq 0, \quad \text{de minden} \quad D_{r+1}(a_{ij}) = 0.$$

Mindkét definícióból nyilvánvaló, hogy az **A** matrix r rangszáma *nem lehet nagyobb n sorszámának és m oszlopszámának kisebbikénél,* azaz

$$r = \varrho(\underset{(n\times m)}{\mathbf{A}}) \leqq \min(n, m).$$

2. Pl. Az 1. példában vizsgált $\underset{(2\times 3)}{\mathbf{A}}$ matrix rangja valóban $r = 2$, mert képezhető belőle pl. a

$$D_2 = D(\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2) = \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 3 \end{vmatrix} = 3, \quad \text{vagy a} \quad D_2(\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_3) = \begin{vmatrix} 1 & 4 \\ 0 & -6 \end{vmatrix} = -6$$

nem zérus determináns. Mivel most $\min(n, m) = \min(2, 3) = 2$, ennél magasabb rangról nem is lehet szó.

II°. R a n g a d ó é s n o r m á l ó a l g o r i t m u s (R—NMA). 1'. Meg kell jegyezni, hogy a fent közölt *két definíció* a matrix rangjának közvetlen megállapítására $n, m \geqq 4$ *esetén gyakorlatilag alig használható* (szerencsés speciális eseteket kivéve) a megfelelő vizsgálatok nehézkessége miatt.

Kívánatos ezért — pl. a *b)* α) II°-ben megismert egyszerű matrixalgoritmussal — az **A** matrixot olyan $\mathbf{B}_r$ bázisra transzformálni, amely az **A** l. ftl oszlopvektorait maximális számban (vagyis $r = \varrho(\mathbf{A})$ számban) tartalmazza. Következésképpen az $\mathbf{a}_j$ vektorok mindegyike ezek l. komb-jaként, vagyis az összes többi bázisvektorokra nézve csupa zérus koordinátákkal jelenik meg. Ekkor az (oszlopaltérnek megfelelő) nem csupa zérus sorok száma, sőt akár az egyszerű transzformációs lépések száma is jelzi az $r = \varrho(\mathbf{A})$ rangszámot, itt még nem is szólva az $\mathbf{A}_r$ transzformált matrix egyéb előnyeiről. Lássuk most e néhány szóval vázolt rangmegállapító algoritmus részleteit, sőt célszerű változatait!

A *b)* α) II°-ben tanulmányozott

$$\mathbf{A}_{q+1} = \mathbf{A}_q - \gamma_q(\mathbf{a}_{l_q}^{(q)} - \mathbf{e}_{k_q})\mathbf{a}_{(q)}^{l_q}$$

$$\{\mathbf{A}_0 = \mathbf{A}; \quad q+1 = 1, 2, \ldots, p \leqq r; \quad a_{k_q l_q}^{(q)} = 1/\gamma_q \neq 0; \quad l_q \neq l_s, \quad k_q \neq k_s\}$$

matrixalgoritmus az $\mathbf{A}_0$ matrixot a $\mathbf{B}_0 \equiv \mathbf{E} = [\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \ldots, \mathbf{e}_n]$ bázisról p lépésben a $\mathbf{B}_p = [\mathbf{e}_1, \ldots, \mathbf{a}_{l_0}, \ldots, \mathbf{a}_{l_{p-1}}, \ldots, \mathbf{e}_n]$ bázisra transzformálja, $\mathbf{A}_p$ alakba. Ez az eljárás még folytatható, ha található (az alkalmi záró matrixot jelentő) $\mathbf{A}_p$-ben a régi, még ki nem cserélt, $i \neq k_q$ indexű bázisvektorokra nézve (generáló elemnek alkalmas) $a_{k_p l_p} \neq 0$ koordinátával rendelkező $\mathbf{a}_{l_p}$ vektor. Ha azonban nincs ilyen elem, ill. vektor, vagyis az $\mathbf{A}_p$-ben az $i \neq k_q$ indexű sorok csupa zérus eleműek, ez annak a jele, hogy az $E_n^{(r)} = \{\xi_1\mathbf{a}_1 + \ldots + \xi_m\mathbf{a}_m\}$ oszlopaltérnek egy teljes $\mathbf{B}^{(r)} = [\mathbf{a}_{l_0}, \ldots, \mathbf{a}_{l_{r-1}}]$ bázisát bevontuk már az E_n tér $\mathbf{B}$ bázisába, a régi $[\mathbf{e}_{k_0}, \ldots, \mathbf{e}_{k_{r-1}}]$ bázisvektorok helyébe. A bázisvektorcserés ($i = k_q$ indexű, nem csupa zérus elemű) sorok, ill. lépések p száma ekkor valóban megegyezik az E_n oszlopaltér r dimenziószámával, vagyis az $r = \varrho(\mathbf{a}_1, \ldots, \mathbf{a}_m) = \varrho(\mathbf{A})$ rangszámmal, azaz ilyenkor $p = r$.

2'. Célszerű egyébként az $a_{k_q l_q}^{(q)}$ generáló elemek választását *sorról sorra* haladva, vagyis

$$k_q = q + 1 = 1, 2, \ldots, p = r$$

módon eszközölni, mert akkor a rangadó

$$\mathbf{A}_p = \mathbf{A}_{p-1} - \gamma_{p-1}(\mathbf{a}_{l_{p-1}}^{(p)} - \mathbf{e}_p)\mathbf{a}_{(p-1)}^{p} = \mathbf{A}_r$$

transzformált matrixban, az $\mathbf{A} = \mathbf{A}_0$ matrix ún. *normálalakjában* éppen az utolsó $n-r$ sor jelentkezik csupa zérus elemekkel, az algoritmust szinte automatikusan berekesztve.

Tekintve továbbá, hogy az algoritmus során ($k_q = q + 1$ mellett)

$$\mathbf{a}_{l_q}^{(q+1)} = \mathbf{A}_{q+1}\mathbf{e}_{l_q} = \mathbf{a}_{l_q}^{(q)} - \gamma_q(\mathbf{a}_{l_q}^{(q)} - \mathbf{e}_{q+1})a_{q+1,l_q} = \mathbf{e}_{q+1} \quad (q+1 = 1, 2, \ldots, r),$$

célszerűbb az $\mathbf{A}_1$-ból $\mathbf{a}'_{l_0} = \mathbf{e}_1, \ldots,$ az $\mathbf{A}_q$-ból az $\mathbf{a}_{l_{q-1}}^{(q)} = \mathbf{e}_q, \ldots$ egységvektort (mint az éppen bázisba vont vektorok tükröződését) *elhagyni,* ily módon lépésenként eggyel csökkentve a vizsgált matrix oszlopainak számát. E tényre *'-vel utalva,* matrixalgoritmusunk így alakul:

$$\mathbf{A}_{q+1} = \mathbf{A}'_q - \gamma_q(\mathbf{a}_{l_q}^{(q)} - \mathbf{e}_{q+1})\mathbf{a}_{(q)}^{\prime q+1} \quad (q+1 = 1, 2, \ldots, r)$$

$\{\mathbf{A}'_q$-ból és $\mathbf{a}_{(q)}^{\prime q+1}$-ból az $l_0, l_1, \ldots, l_{q+1}$ indexű vektor, ill. elem hiányzik$\}$.

Megjegyzendő, hogy számítástechnikai előnyök kedvéért olykor eltérünk a módszertanilag előnyös $k_q = q + 1$ választástól.

3. Pl. Állapítsuk meg a (30) algoritmussal az alábbi matrix rangját:

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} \boxed{1} & 2 & 1 & -1 & 2 & 4 \\ 2 & 3 & 1 & -2 & 3 & 0 \\ 1 & 1 & -4 & 2 & -3 & 2 \\ 1 & 2 & 5 & -4 & 6 & -2 \end{bmatrix} \equiv \mathbf{A}_0. \text{ —}$$

Első lépés ($k_0 = 1,\ l_0 = 1$):

$$\mathbf{A}_1 = \mathbf{A}_0' - \frac{1}{a_{11}}(\mathbf{a}_1 - \mathbf{e}_1)\mathbf{a}'^1 =$$

$$= \begin{bmatrix} 2 & 1 & -1 & 2 & 4 \\ 3 & 1 & -2 & 3 & 0 \\ 1 & -4 & 2 & -3 & 2 \\ 2 & 5 & -4 & 6 & -2 \end{bmatrix} - 1 \cdot \begin{bmatrix} 0 \\ 2 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} [2 \quad 1 \quad -1 \quad 2 \quad 4] =$$

$$= \begin{bmatrix} 2 & 1 & -1 & 2 & 4 \\ \boxed{-1} & -1 & 0 & -1 & -8 \\ -1 & -5 & 3 & -5 & -2 \\ 0 & 4 & -3 & 4 & -6 \end{bmatrix}.$$

Második lépés ($k_1 = 2,\ l_1 = 2$):

$$\mathbf{A}_2 = \mathbf{A}_1' - \frac{1}{a_{22}^{(1)}}(\mathbf{a}_2^{(1)} - \mathbf{e}_2)\mathbf{a}'^2_{(1)} =$$

$$= \begin{bmatrix} 1 & -1 & 2 & 4 \\ -1 & 0 & -1 & -8 \\ -5 & 3 & -5 & -2 \\ 4 & -3 & 4 & -6 \end{bmatrix} + 1 \cdot \begin{bmatrix} 2 \\ -2 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix} [-1 \quad 0 \quad -1 \quad -8] =$$

$$= \begin{bmatrix} -1 & -1 & 0 & -12 \\ 1 & 0 & 1 & 8 \\ \boxed{-4} & 3 & -4 & 6 \\ 4 & -3 & 4 & -6 \end{bmatrix}.$$

Harmadik lépés ($k_2 = 3,\ l_2 = 3$):

$$\mathbf{A}_3 = \mathbf{A}_2' - \frac{1}{a_{33}^{(2)}}(\mathbf{a}_3^{(2)} - \mathbf{e}_3)\mathbf{a}'^3_{(2)} =$$

$$= \begin{bmatrix} -1 & 0 & -12 \\ 0 & 1 & 8 \\ 3 & -4 & 6 \\ -3 & 4 & -6 \end{bmatrix} + \frac{1}{4} \cdot \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ -5 \\ 4 \end{bmatrix} [3 \quad -4 \quad 6] = \begin{bmatrix} -1{,}75 & 1 & -13{,}5 \\ 0{,}75 & 0 & 9{,}5 \\ 0{,}75 & 1 & -1{,}5 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

További lépés nem lehetséges, mert $\mathbf{a}^4_{(3)} = \mathbf{0}^*$. Az $\mathbf{A} = \mathbf{A}_0$ matrix rangja tehát egyenlő az eddigi algoritmikus lépések számával, vagyis $r = \varrho(\mathbf{A}) = 3$.

4. Pl. Állapitsuk meg az alábbi matrix rangját, nem kötve magunkat a (30) formulában a $k_q = q + 1$ választáshoz:

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 3 & \boxed{1} & 1 & 2 & 8 & 2 & 3 \\ 3 & -6 & 1 & 1 & 7 & 5 & -21 \\ 4 & 2 & 3 & 3 & 11 & 5 & 7 \\ -2 & 2 & -1 & -1 & -5 & -3 & 7 \\ 2 & 4 & 2 & 2 & 6 & 2 & 14 \end{bmatrix} \equiv \mathbf{A}_0. -$$

Első lépés ($k_0 = 1$, $l_0 = 2$):

$$\mathbf{A}_1 = \mathbf{A}_0' - \frac{1}{a_{12}}(\mathbf{a}_2 - \mathbf{e}_1)\mathbf{a}'^1 =$$

$$= \begin{bmatrix} 3 & 1 & 2 & 8 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 1 & 7 & 5 & -21 \\ 4 & 3 & 3 & 11 & 5 & 7 \\ -2 & -1 & -1 & -5 & -3 & 7 \\ 2 & 2 & 2 & 6 & 2 & 14 \end{bmatrix} - 1 \cdot \begin{bmatrix} 0 \\ -6 \\ 2 \\ 2 \\ 4 \end{bmatrix} [3 \quad 1 \quad 2 \quad 8 \quad 2 \quad 3] =$$

$$= \begin{bmatrix} 3 & 1 & 2 & 8 & 2 & 3 \\ 21 & 7 & 13 & 55 & 17 & -3 \\ -2 & \boxed{1} & -1 & -5 & 1 & 1 \\ -8 & -3 & -5 & -21 & -7 & 1 \\ -10 & -2 & -6 & -26 & -6 & 2 \end{bmatrix}.$$

Második lépés ($k_1 = 3$, $l_1 = 3$):

$$\mathbf{A}_2 = \mathbf{A}_1' - \frac{1}{a^{(1)}_{33}}(\mathbf{a}^{(1)}_3 - \mathbf{e})\mathbf{a}'^3_{(1)} =$$

$$= \begin{bmatrix} 3 & 2 & 8 & 2 & 3 \\ 21 & 13 & 55 & 17 & -3 \\ -2 & -1 & -5 & 1 & 1 \\ -8 & -5 & -21 & -7 & 1 \\ -10 & -6 & -26 & -6 & 2 \end{bmatrix} - 1 \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ 7 \\ 0 \\ -3 \\ -2 \end{bmatrix} [-2 \quad -1 \quad -5 \quad 1 \quad 1] =$$

$$= \begin{bmatrix} 5 & 3 & -3 & 1 & 2 \\ 35 & 20 & 90 & \boxed{10} & -10 \\ -2 & -1 & -5 & 1 & 1 \\ -14 & -8 & -36 & -4 & 4 \\ -14 & -8 & -36 & -4 & 4 \end{bmatrix}.$$

Harmadik lépés ($k_2 = 2,\ l_2 = 6$):

$$\mathbf{A}_3 = \mathbf{A}_2' - \frac{1}{a_{26}^{(2)}}(\mathbf{a}_6^{(2)} - \mathbf{e}_2)\mathbf{a}_{(2)}'^6 =$$

$$= \begin{bmatrix} 5 & 3 & 13 & 2 \\ 35 & 20 & 90 & -10 \\ -2 & -1 & -5 & 1 \\ -14 & -8 & -35 & 4 \\ -14 & -8 & -36 & 4 \end{bmatrix} - 0{,}1 \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ 9 \\ 1 \\ -4 \\ -4 \end{bmatrix} [35 \quad 20 \quad 90 \quad -10] =$$

$$= \begin{bmatrix} 1{,}5 & 1 & 4 & 3 \\ 3{,}4 & 2 & 9 & -1 \\ -5{,}5 & -3 & -14 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Az algoritmus megszakadt, mert $\mathbf{a}_{(3)}^4 = \mathbf{a}_{(3)}^5 = \mathbf{0}^*$. Az $\mathbf{A}$ matrix rangja, mint az algoritmikus lépések száma, $r = \varrho(\mathbf{A}) = 3$.

Generáló elemek szabadabb ($k_q \neq q + 1$) választásával előnyös osztókat ($a_{12} = 1$, $a_{33}^{(1)} = 1$, $a_{26}^{(2)} = 10$) tudtunk biztosítani.

III°. Rangcsökkentő algoritmus (R'MA). 1'. A matrix rangjának gyakorlati megállapítását az előbb az $\mathbf{A}$ matrixot *normálalakra transzformáló algoritmuslépés számlálásával* eszközöltük. Most az előbbi algoritmus némi módositásával biztositani fogjuk a matrix rangjának lépéseként eggyel való csökkenését, következésképpen a rangmegállapitás *a rangcsökkentő algoritmus lépésszámlálásával* történhet majd.

Az $\mathbf{A}_{q+1}$ *rangját eggyel csökkentendő,* pótoljuk (az éppen bázisba vont $\mathbf{a}_{l_q}^{(q+1)}$ vektort tükröző) $\mathbf{a}_{l_q}^{(q+1)} \equiv \mathbf{e}_{q+1}$ egységvektorát $\mathbf{0}$ zérusvektorral s az ily módon egyedül módosult $\mathbf{a}_{(q+1)}^{q+1} = \gamma_q \mathbf{a}_{(q)}^{q+1}$ sorvektorát ugyancsak $\mathbf{0}$ zérusvektorral (eképpen valóban eggyel-eggyel csökkentve az oszlop- és a soraltér l. ftl vektorainak számát). A II°-ban tanultak értelmében, az $\mathbf{A}_{q+1}$ matrix kívánt változtatását éppen az $\mathbf{e}_{q+1}\mathbf{a}_{(q+1)}^{q+1}$ *diád leválasztásával* eszközöljük, a kialakuló $\mathring{\mathbf{a}}_{(q+1)}^{q+1} = \mathbf{0}^*$ és $\mathring{\mathbf{a}}_{l_q}^{(q+1)} = \mathbf{0}$ zérusvektorok célszerű (és '-vel jelzett) elhagyásával, ekképpen:

$$\mathring{\mathbf{A}}_{q+1} = [\mathbf{A}_q' - \gamma_q(\mathbf{a}_{l_q}^{(q)} - \mathbf{e}_{q+1})\mathbf{a}_{(q)}'^{q+1} - \gamma_q \mathbf{e}_{q+1}\mathbf{a}_{(q)}'^{q+1}]' = \mathbf{A}_q'' - \gamma_q \mathbf{a}_{l_q}'^{(q)} \mathbf{a}_{(q)}'^{q+1}.$$

Eszerint az $\mathbf{A}$ matrix rangját lépésenként eggyel csökkentő s így $r = \varrho(\mathbf{A})$ számú lépésben (zérus rangú) $\mathbf{O}$ zérusmatrixra vezető *rangcsökkentő matrixalgoritmus* (R'MA) a következő:

$$\boxed{\mathring{\mathbf{A}}_{q+1} = \mathbf{A}_q'' - \gamma_q \mathbf{a}_{l_q}'^{(q)} \mathbf{a}_{(q)}'^{q+1}} \qquad (q + 1 = 1, 2, \ldots, r; \quad a_{q+1, l_q}^{(q)} = 1/\gamma_q \neq 0)$$

$$\left\{ \mathbf{A}_0 \equiv \mathbf{A},\ \mathbf{A}_r = \mathbf{O}; \quad \text{az } \frac{1, 2, \ldots, q}{l_0, l_1, \ldots, l_{q-1}} \text{ indexű } \frac{\text{sor}}{\text{oszlop}} \text{ hiányzik} \right\}.$$

Ez megegyezik az *Egerváry*-féle rangcsökkentő iterációval, amely láthatóan jól illeszkedik az itteni általános matrixalgoritmikus vizsgálatokba.

2'. Az előbbi algoritmus alapján — *Egerváry* nyomán — előállítható az **A** *matrix ún. minimális diadikus alakja,* mégpedig — a '-vel jelzett sor- és oszlopelhagyásokat most mellőzve, továbbá a $\gamma_q \mathbf{a}_{l_q}^{(q)} \mathbf{a}_{(q)}^{q+1} \equiv \mathbf{b}_q \mathbf{c}_q^*$ jelöléssel élve — eképpen:

$$0 \equiv \mathbf{A}_r = -\mathbf{b}_{r-1}\mathbf{c}_{r-1}^* + \mathbf{A}_{r-1} = -\mathbf{b}_{r-1}\mathbf{c}_{r+1}^* - \mathbf{b}_{r-2}\mathbf{c}_{r-2}^* + \mathbf{A}_{r-2} = \ldots =$$

$$= -\mathbf{b}_{r-1}\mathbf{c}_{r-1}^* - \mathbf{b}_{r-2}\mathbf{c}_{r-2}^* - \ldots - \mathbf{b}_1\mathbf{c}_1 - \mathbf{b}_0\mathbf{c}_0^* + \mathbf{A}_0,$$

azaz

$$\mathbf{A}_0 = \sum_{q=0}^{r-1} \mathbf{b}_q\mathbf{c}_q^* = [\mathbf{b}_0, \mathbf{b}_1, \ldots, \mathbf{b}_{r-1}] \begin{bmatrix} \mathbf{c}_1^* \\ \mathbf{c}_2^* \\ \vdots \\ \mathbf{c}_{r-1}^* \end{bmatrix} \equiv \mathbf{BC}^*,$$

ahol utoljára az **A** ún. *bázisfaktoros alakjával* dolgoztunk.

A fentiek értelmében *az* **A** *matrix rangja megegyezik a fenti minimális diadikus alakjában fellépő diádtagok számával,* vagy a **B**, ill. a **C**. bázisfaktor oszlopainak, ill. sorainak számával.

Rámutathatunk arra, hogy a III°. 1'-beliekhez hasonló megfontolással itt is járható az $\mathbf{A}_0$-ból kiinduló *csoportos transzformáció útja, megpedig így:*

$$\mathbf{O} \equiv \mathbf{A}_r = \mathbf{A}_0 - \mathbf{A}_L\mathbf{A}_{KL}^{-1}\mathbf{A}^K, \quad \text{azaz} \quad \mathbf{A}_0 = \mathbf{A}_L \Gamma \mathbf{A}^K \equiv \mathbf{BC}^*$$

$$\{\mathbf{A}_L = [\mathbf{a}_{l_0}, \mathbf{a}_{l_1}, \ldots, \mathbf{a}_{l_{r-1}}], \quad \mathbf{A}^K = \begin{bmatrix} \mathbf{a}^1 \\ \vdots \\ \mathbf{a}^r \end{bmatrix}, \quad \mathbf{A}_{KL} = [a_{\varrho, l_{\varrho-1}}], \quad \Gamma = \mathbf{A}_{KL}^{-1}\} ;$$
$$(\varrho = 1, 2, \ldots, r)$$

ez is egy módja az $\mathbf{A}_0$ matrix bázisfaktorizációjának, ahol Γ beolvasztható akár az $\mathbf{A}_L$, akár az $\mathbf{A}^K$ bázisfaktorba.

3'. *Egerváry* egyébként az előbbinél *általánosabb rangcsökkentő iterációt* és megfelelő diadikus és bázisfaktoros előállítást is megadott, nevezetesen

$$\check{\mathbf{A}}_{q+1} = \mathbf{A}_q = \frac{\mathbf{A}_q\mathbf{u}_q\mathbf{v}_q^*\mathbf{A}_q}{\mathbf{v}_q^*\mathbf{A}_q\mathbf{u}_k}$$

$$\{q + 1 = 1, 2, \ldots, r; \quad \mathbf{A}_0 \equiv \mathbf{A}, \quad \mathbf{A}_r = \mathbf{O}; \quad \mathbf{u}_q, \mathbf{v}_q^* \quad \text{tetszőleges, de} \quad \mathbf{v}_q^*\mathbf{A}_q\mathbf{u}_q \neq 0\}$$

és megfelelően

$$\mathbf{A}_0 = \sum_{q=0}^{r-1} \frac{\mathbf{A}_q\mathbf{u}_q\mathbf{v}_q^*\mathbf{A}_q}{\mathbf{v}_q^*\mathbf{A}_q\mathbf{u}_q} = \sum_{q=0}^{r-1} \mathbf{b}_q\mathbf{c}_q^* = \mathbf{BC}^*.$$

Előnye, hogy több ismert algoritmus előállítható speciális eseteként.

5. *Pl.* Állapítsuk meg az alábbi matrix rangját, a III°-beli rangcsökkentő eljárással (egyelőre a '-s elhagyások és az $k_q = q + 1$ korlátozás nélkül):

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 3 & 2 & 0 & -3 \\ \boxed{1} & 2 & 5 & 3 \\ -4 & 3 & -7 & 2 \end{bmatrix} = \mathbf{A}_0. -$$

Első lépés ($k_0 = 2$, $l_0 = 1$):

$$\mathring{\mathbf{A}}_1 = \begin{bmatrix} 3 & 2 & 0 & -3 \\ 1 & 2 & 5 & 3 \\ -4 & 3 & -7 & 2 \end{bmatrix} - 1 \cdot \begin{bmatrix} 3 \\ 1 \\ -4 \end{bmatrix} [1 \quad 2 \quad 5 \quad 3] = \begin{bmatrix} 0 & \boxed{-4} & -15 & -12 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 11 & 13 & 14 \end{bmatrix}.$$

Második lépés ($k_1 = 1$, $l_1 = 2$):

$$\mathring{\mathbf{A}}_2 = \begin{bmatrix} 0 & -4 & -15 & -12 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 11 & 13 & 14 \end{bmatrix} + \frac{1}{4} \cdot \begin{bmatrix} -4 \\ 0 \\ 11 \end{bmatrix} [0 \quad -4 \quad -15 \quad -12] = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\boxed{\frac{113}{4}} & -19 \end{bmatrix}.$$

Harmadik lépés ($k_2 = l_2 = 3$):

$$\mathring{\mathbf{A}}_3 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{113}{4} & -19 \end{bmatrix} + \frac{4}{113} \cdot \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ -\frac{113}{4} \end{bmatrix} \left[0 \quad 0 \quad -\frac{113}{4} \quad -19\right] =$$

$$= \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} = \mathbf{O}.$$

Az algoritmus ezzel megszakadt, s az eddigi lépések száma szolgáltatja a keresett rangszámot, vagyis $r = \varrho(\mathbf{A}) = 3$. Az $\mathbf{A}$ diadikus és bázisfaktoros alakja nyilván ez lesz:

$$\mathbf{A} = 1 \cdot \begin{bmatrix} 3 \\ 1 \\ -4 \end{bmatrix} [1 \quad 2 \quad 5 \quad 3] - \frac{1}{4} \cdot \begin{bmatrix} -4 \\ 0 \\ 11 \end{bmatrix} [0 \quad -4 \quad -15 \quad -12] - \frac{1}{4} \cdot \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix} [0 \quad 0 \quad -113 \quad -76] =$$

$$= \begin{bmatrix} 3 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ -4 & \frac{11}{4} & -\frac{1}{4} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 5 & 3 \\ 0 & 4 & 15 & 12 \\ 0 & 0 & 113 & 76 \end{bmatrix} = \mathbf{BC}^*,$$

ahol a skalár faktorokkal szabadon, célszerűség szerint operáltunk.

6. Pl. Állapítsuk meg a III°-beli rangcsökkentő iterációval az alábbi matrix rangját (a ′-s elhagyásokkal és a $k_q = q + 1$ sorválasztással):

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} \boxed{1} & -1 & 2 & 0 & -1 \\ 2 & -1 & 5 & 2 & -2 \\ 3 & -3 & 6 & 2 & -7 \\ 1 & -2 & 1 & -5 & 5 \end{bmatrix} = \mathbf{A}_0.$$

Első lépés ($k_0 = 1$, $l_0 = 1$):

$$\mathbf{A}_1 = \mathbf{A}_0'' - \frac{1}{a_{11}} \mathbf{a}_1 \mathbf{a}'^1 =$$

$$= \begin{bmatrix} -1 & 5 & 2 & -2 \\ -3 & 6 & 2 & -7 \\ -2 & 1 & -5 & 5 \end{bmatrix} - 1 \cdot \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \\ 1 \end{bmatrix} [-1 \quad 2 \quad 0 \quad -1] = \begin{bmatrix} \boxed{1} & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & -4 \\ -1 & -1 & -5 & 6 \end{bmatrix}.$$

Második lépés ($k_1 = 2$, $l_1 = 2$):

$$\mathbf{A}_2 = \mathbf{A}_1'' - \frac{1}{a_{22}} \mathbf{a}'^{(1)}_2 \mathbf{a}'^2_{(1)} =$$

$$= \begin{bmatrix} 0 & 2 & -4 \\ -1 & -5 & 6 \end{bmatrix} - 1 \cdot \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \end{bmatrix} [1 \quad 2 \quad 0] = \begin{bmatrix} 0 & \boxed{2} & -4 \\ 0 & -3 & 6 \end{bmatrix}.$$

Harmadik lépés ($k_2 = 3$, $l_2 = 4$):

$$\mathbf{A}_3 = \mathbf{A}_2'' - \frac{1}{a_{24}^{(2)}} \mathbf{a}'^{(2)}_4 \mathbf{a}'^3_{(2)} = [0 \quad 6] - \frac{1}{2} \cdot (-3) \cdot [0 \quad -4] = [0 \quad 0] = \mathbf{0}^*.$$

Az algoritmus megszakadt; a keresett rangszám, mint az eddigi lépések száma, $r = \varrho(\mathbf{A}) = 3$. Az $\mathbf{A}$ diadikus és bázisfaktoros alakja (a diadikus vektorok értelemszerű kiegészítésével) így alakul:

$$\mathbf{A} = \cdot 1 \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 1 \end{bmatrix} [1 \quad -1 \quad 2 \quad 0 \quad -1] + 1 \cdot \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix} [0 \quad 1 \quad 1 \quad 2 \quad 0] + \frac{1}{2} \cdot \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 2 \\ -3 \end{bmatrix} [0 \quad 0 \quad 0 \quad 2 \quad -4] =$$

$$= \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ 3 & 0 & 2 \\ 1 & -1 & -3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & -1 & 2 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -2 \end{bmatrix} = \mathbf{BC}^*.$$

7. Pl. $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 3 & -2 & -2 \\ -2 & 3 & -2 \\ -2 & -2 & 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -\frac{2}{3} & \frac{5}{3} & 0 \\ -\frac{2}{3} & \frac{10}{3} & -5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3 & -2 & -2 \\ 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \mathbf{BC}^*.$

IV°. A normálalak szerkezete (NMF). *1'.* Szóljunk végül néhány szót az imént tárgyalt rangadó matrixalgoritmusok zárómatrixáról, az $\mathbf{A}_r$ normálalakról.

Vizsgáljuk először az $\mathbf{A}_r$ normálalak szerkezetét. Az egyszerűség kedvéért (a szokásos módon) tegyük fel, hogy az $\mathbf{A}_0$ matrixban éppen a bal felső, r-ed rendű minormatrix, $\mathbf{A}_{rr}$ reguláris. Ekkor — tudvalevőleg — az $\mathbf{A}_r$ normálalak

az $\mathbf{A}_0$ matrixból az $\mathbf{E}_r = [\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \ldots, \mathbf{e}_r] \leftrightarrow [\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \ldots, \mathbf{a}_r] = \mathbf{A}_R$ csoportos transzformációval nyerhető, megfelelő matrixformulánk pedig

$$\mathbf{A}_r = \mathbf{A}_0 - (\mathbf{A}_R - \mathbf{E}_R)\,\boldsymbol{\Gamma}\,\mathbf{A}^R \qquad (\boldsymbol{\Gamma} = \mathbf{A}_{rr}^{-1})$$

alakra egyszerűsödik. Esetünkben az induló matrix nyilván

$$\mathbf{A}_0 = \begin{bmatrix} \mathbf{A}_{rr} & \mathbf{A}_{rm} \\ \mathbf{A}_{nr} & \mathbf{A}_{nm} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{A}_{rr} & \mathbf{A}_{rr}\mathbf{A}'_{rm} \\ \mathbf{A}'_{nr}\mathbf{A}_{rr} & \mathbf{A}'_{nr}\mathbf{A}_{rr}\mathbf{A}'_{rm} \end{bmatrix} \qquad (\mathbf{A}'_{rm} = \boldsymbol{\Gamma}\mathbf{A}_{rm}, \text{ stb.})$$

szerkezetű, az első r sor- és oszlopvektor l. ftls-ének megfelelően, s ezzel összhangban

$$\mathbf{A}_R = \begin{bmatrix} \mathbf{A}_{rr} \\ \mathbf{A}'_{nr}\mathbf{A}_{rr} \end{bmatrix}, \qquad \mathbf{E}_R = \begin{bmatrix} \mathbf{E}_r \\ \mathbf{0} \end{bmatrix}, \qquad \mathbf{A}^R = [\mathbf{A}_{rr} \quad \mathbf{A}_{rr}\mathbf{A}'_{rm}].$$

2'. *Az $\mathbf{A}_r$ normálalak szerkezete* (NMF) ezek után így alakul:

$$\mathbf{A}_r = \begin{bmatrix} \mathbf{A}_{rr} & \mathbf{A}_{rr}\mathbf{A}'_{rm} \\ \mathbf{A}'_{nr}\mathbf{A}_{rr} & \mathbf{A}'_{nr}\mathbf{A}_{rr}\mathbf{A}'_{rm} \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} \mathbf{A}_{rr} - \mathbf{E}_r \\ \mathbf{A}'_{nr}\mathbf{A}_{rr} \end{bmatrix} \boldsymbol{\Gamma}\, [\mathbf{A}_{rr} \quad \mathbf{A}_{rr}\mathbf{A}'_{rm}] =$$

$$= \begin{bmatrix} \mathbf{A}_{rr} & \mathbf{A}_{rr}\mathbf{A}'_{rm} \\ \mathbf{A}'_{nr}\mathbf{A}_{rr} & \mathbf{A}'_{rn}\mathbf{A}_{rr}\mathbf{A}'_{rm} \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} \mathbf{A}_{rr} - \mathbf{E}_r & (\mathbf{A}_{rr} - \mathbf{E}_r)\mathbf{A}'_{rm} \\ \mathbf{A}'_{nr}\mathbf{A}_{rr} & \mathbf{A}'_{nr}\mathbf{A}_{rr}\mathbf{A}'_{rm} \end{bmatrix} =$$

$$= \begin{bmatrix} \mathbf{E}_r & \mathbf{A}'_{rm} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{E}_r & \boldsymbol{\Gamma}\mathbf{A}_{rm} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \boldsymbol{\Gamma} \\ \mathbf{0} \end{bmatrix} [\mathbf{A}_{rr} \quad \mathbf{A}_{rm}] = \boldsymbol{\Gamma}_R\mathbf{A}^R.$$

Látható tehát, hogy $\mathbf{A}_r$ *első r sora az $\mathbf{A}^R$-nek az $\mathbf{A}_{rr}$ bázisra átszámított* (vagyis balról $\boldsymbol{\Gamma}$-val szorzott) alakja, *a többi $n-r$ sora pedig csupa zérus elemeket tartalmaz.* Mindez csak megerősíti a β) II°-ben az $\mathbf{A}_r$-ről tett előzetes megállapításokat.

c) Lineáris egyenletrendszerek és megoldásuk matrixalgoritmussal

α) Lineáris egyenletrendszerek és megoldhatósági eseteik, feltételeik

A matrixok transzformálásának és rangmegállapításának beható tanulmányozása kedvező helyzetet teremtett számunkra a lineáris egyenletrendszerek korszerű matrixalgoritmikus tárgyalására. Ez — saját fontosságán túlmenően — igen előnyös lesz a lineáris programozás esedékes vizsgálatának előkészítése szempontjából, s emellett hazai eredmények bemutatására is alkalmat ad.

I°. Alapismeretek. Reguláris és általános eset. *1'.* A l. algebrai egyenletrendszerek *általános alakja, skaláris írásmóddal* — tudva-

levőleg — a következő:

$$\left.\begin{array}{l} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1m}x_m = a_{10} \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2m}x_m = a_{20} \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \dots + a_{nm}x_m = a_{n0} \end{array}\right\} \quad (a_{ij}, a_{i0}, x_j \in K), \qquad (1)$$

ahol nyilván n az egyenletek, m az ismeretlenek (nem szükségképpen megegyező) száma, továbbá az a_{ij}, a_{i0} állandók, és az x_j ismeretlenek valós (vagy akár komplex) számok.

Ugyanez, *matrixos és vektoros írásmóddal* így alakul:

$$\underset{(n\times m)}{\mathbf{A}} \cdot \underset{(m)}{\mathbf{x}} \equiv \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1m} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2m} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nm} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_m \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{10} \\ a_{20} \\ \dots \\ a_{n0} \end{bmatrix} \equiv \mathbf{a}_0 = \qquad (2)$$

$$= \sum_{j=1}^{m} \mathbf{a}_j x_j \equiv \sum_{j=1}^{m} x_j \begin{bmatrix} a_{1j} \\ a_{2j} \\ \dots \\ a_{nj} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{10} \\ a_{20} \\ \dots \\ a_{n0} \end{bmatrix} \equiv \mathbf{a}_0 = \qquad (2a)$$

$$= \begin{bmatrix} \mathbf{a}^1\mathbf{x} \\ \mathbf{a}^2\mathbf{x} \\ \dots \\ \mathbf{a}^n\mathbf{x} \end{bmatrix} \equiv \begin{bmatrix} \sum a_{1j}x_j \\ \sum a_{2j}x_j \\ \dots\dots \\ \sum a_{nj}x_j \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{10} \\ a_{20} \\ \dots \\ a_{n0} \end{bmatrix} \equiv \mathbf{a}_0 \qquad (2b)$$

$$\{\mathbf{a}_j, \mathbf{a}_0 \in E_n; \quad \mathbf{a}^i, \mathbf{x}^* \in E_m; \quad a_{ij}, a_{i0}, x_j \in K\}.$$

Tárgyalásunk során főleg a (2) és a (2a) alakot fogjuk használni, előnyei miatt.

Az (1) skalár-egyenletrendszert, ill. a (2) matrixegyenletet *megoldani* annyit jelent, mint — alkalmas módszerrel — megállapítani mindazon $(x_1, x_2, \dots, x_m)$ skalár-m-eseket, ill. $\mathbf{x}$ vektorokat, melyek kielégítik az (1)-et, ill. a (2)-t. Ezek egyszersmind meghatározzák az $\mathbf{a}_0$ vektort előállító összes $\sum \mathbf{a}_j x_j$ l. komb-kat, geometriailag pedig az $\mathbf{A}$ matrixú affin transzformációnál a közös $\mathbf{a}_0$ képvektort szolgáltató $\mathbf{x}$ tárgyvektorokat.

A l. egyenletrendszert *inhomogén* jelzővel illetjük, ha található benne ismeretlent nem tartalmazó, állandó tag; eme ún. zavaró tago(ka)t az egyenletrendszer jobb oldalára szokás rendezni (az összes többit pedig a bal oldalra), mint az (1—2b)-ben is tettük. Az a_{i0} zavaró tagok határozzák meg az $\mathbf{a}_0 = [a_{i0}] \neq \mathbf{0}$ vektort. — Ha viszont $\mathbf{a}_0 = \mathbf{0}$, mert egyetlen (zérustól különböző) a_{i0} zavaró tag sincs, akkor *homogén* l. egyenletrendszerről beszélünk. Egy inhomogén

egyenletrendszerből tehát $\mathbf{a}_0 = \mathbf{0}$ helyettesítéssel nyerjük az ún. *hozzátartozó homogén* l. egyenletrendszert.

2'. Vizsgálatainkban olykor szükség lesz az (1) l. egyenletrendszerhez tartozó ún. *transzponált homogén* l. egyenletrendszerre; ez skaláris írásmóddal

$$\left.\begin{array}{l} a_{11}\xi_1 + a_{21}\xi_2 + \ldots + a_{n1}\xi_n = 0 \\ a_{12}\xi_1 + a_{22}\xi_2 + \ldots + a_{n2}\xi_n = 0 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{1m}\xi_1 + a_{2m}\xi_2 + \ldots + a_{nm}\xi_n = 0 \end{array}\right\} \tag{3}$$

alakot, matrixos és vektoros írásmóddal pedig

$$\underset{(m\times n)}{\mathbf{A}^*}\ \underset{(n)}{\xi} \equiv \begin{bmatrix} a_{11} & a_{21} & \ldots & a_{n1} \\ a_{12} & a_{22} & \ldots & a_{n2} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{1m} & a_{2m} & \ldots & a_{nm} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \xi_1 \\ \xi_2 \\ \ldots \\ \xi_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \ldots \\ 0 \end{bmatrix} \equiv \mathbf{0} = \tag{4}$$

$$= \sum_{i=1}^{n} \mathbf{a}'^{*}\xi_i \equiv [\xi^*\mathbf{a}_j] = \mathbf{0} \tag{4a, b}$$

$$\{\mathbf{a}_j, \xi \in E_n; \quad \mathbf{a}' \in E_m; \quad a_{ij}, \xi_i \in K\}$$

alakot vesz fel.

3'. Térjünk ki még itt egy-két, az $\mathbf{a}_1, \ldots, \mathbf{a}_m, \mathbf{a}_0$ vektorrendszer l. fs-i viszonyaival és a (2) megoldhatóságával kapcsolatos kérdésre. A regularitás fogalmát értelmezi az alábbi

Definíció: *A (2) l. matrixegyenletet akkor mondjuk* r e g u l á r i s *nak, ha* **A** *együtthatómatrixa (kvadratikus és) reguláris,* vagyis ha

$$\mathbf{A} \equiv \mathbf{A}_n \quad \text{és} \quad |\mathbf{A}| \neq 0; \tag{5a}$$

ellenkező esetben a (2)-t á l t a l á n o s, *vagy szinguláris jelzővel illetjük.*

Szóljunk most mindkét esetről néhány szót!

A) Regularitás esetén tehát a (2)-ben megegyezik egymással

α) az egyenletek (a sorok) n száma,

β) az ismeretlenek (az oszlopok) m száma és

γ) az együtthatómatrix, ill. — vektorrendszer r *rangszáma,* azaz

$$n = m = r. \tag{5b}$$

Ilyenkor az $\mathbf{A} = [\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \ldots, \mathbf{a}_n]$ az E_n tér egy **B** *bázisát* képezi, amelyben tehát bármely $\mathbf{a}_0 \in E_n$ vektor egyértelműen előállítható

$$\mathbf{a}_0 = \mathbf{A}\mathbf{a}'_0 = \sum_{j=1}^{n} a'_{j0}\mathbf{a}_j \qquad (\mathbf{a}'_0 = \mathbf{A}^{-1}\mathbf{a}_0 = [a'_{j0}]) \tag{6}$$

módon, s így a (2) szintén *egyértelműen megoldható.*

B) Általános, vagy szinguláris l. egyenletrendszer esetén az (5*b*) hármas egyenlőség nem teljesül, hanem

$$n \lesseqgtr m \quad \text{és} \quad r \leqq \min(n, m). \tag{7}$$

Ilyenkor az $\mathbf{A} = [\mathbf{a}_1, \ldots, \mathbf{a}_r, \ldots, \mathbf{a}_m]$ az E_n tér egy $E_n^{(r)}$ alterét, az $\mathbf{A}$ ún. oszlopalterét generálja, ahol r e vektor-m-es l. ftl vektorainak a száma. Az általánosság csorbítása nélkül feltehetjük (és az ismeretlenek átszámozásával biztosíthatjuk is), hogy éppen az $\underset{(r)}{\mathbf{A}} = [\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \ldots, \mathbf{a}_r]$ *vektor-r-es l. ftl*, s mint ilyen, az $E_n^{(r)}$ altér egy $\mathbf{B}^{(r)}$ bázisát képezi. A többi együtthatóvektor e bázisvektorok

$$\mathbf{a}_\mu = \underset{(r)}{\mathbf{A}}\mathbf{a}'_\mu = \sum_{\varrho=1}^{r} a'_{\varrho,\mu}\mathbf{a}_\varrho \qquad (\mu = r+1, \ldots, m) \tag{8a}$$

l. komb-jaként, együttesük tehát a

$$\underset{(m)}{\mathbf{A}} = [\mathbf{a}_\mu] = \underset{(r)}{\mathbf{A}}[\mathbf{a}'_\mu] \equiv \underset{(r)}{\mathbf{A}}\,\underset{(m)}{\mathbf{A}'} \tag{8b}$$

bázisfaktoros alakban nyerhető.

Az $\mathbf{a}_0$ *zavaró vektor* szempontjából ilyenkor *két eset* lehetséges:

α) $\mathbf{a}_0 \neq \mathbf{0}$ *inkompatibilis* az $E_n^{(r)}$ altérrel, azaz $\mathbf{a}_0 \notin E_n^{(r)}$; ekkor $\mathbf{a}_0$ nyilván nem állítható elő az $\mathbf{a}_\varrho \in B^{(r)}$ bázisvektorok l. komb-jaként, azaz

$$\mathbf{a}_0 \neq \underset{(r)}{\mathbf{A}}\,\alpha = \sum_{\varrho=1}^{r} \alpha_\varrho \mathbf{a}_\varrho, \tag{9}$$

vagyis a (2*a*) l. vektoregyenletnek egyáltalán *nincs megoldása;*

β) $\mathbf{a}_0$ *kompatibilis* az $E_n^{(r)}$ altérrel, azaz $\mathbf{a}_0 \in E_n^{(r)}$; ekkor $\mathbf{a}_0$ egyértelműen előállítható

$$\mathbf{a}_0 = \underset{(r)}{\mathbf{A}}\mathbf{a}'_0 = \sum_{\varrho=1}^{r} a'_{\varrho 0}\mathbf{a}_\varrho \tag{10}$$

alakban, és — mint mindjárt látni fogjuk — a (2*a*)-nak ilyenkor *végtelen sok megoldása van.* Az $\mathbf{a}_0 = \mathbf{0}$ esete nyilván mindig ide tartozik, lévén $\mathbf{0} \in E_n^{(r)}$.

A továbbiakban az *A)* és főleg a *B)* β) megoldható esettel foglalkozunk.

II°. A megoldható esetek bevezető tárgyalása. *1'.* Lássuk először a *reguláris* l. egyenletrendszer esetét! Általános alakja — a fentebbiek értelmében — így fest:

$$\mathbf{A}\mathbf{x} \equiv \sum_{j=1}^{m} \mathbf{a}_j x_j \equiv [\mathbf{a}'\mathbf{x}] = \mathbf{a}_0 \tag{11}$$

$$\{\mathbf{A} \equiv \mathbf{A}_n; \quad |\mathbf{A}| \neq 0; \quad \mathbf{A} \equiv \mathbf{B} \subset E_n\}.$$

Megoldása lényegében az $\mathbf{a}_0$ vektor $\mathbf{A}$ bázisú $\mathbf{x} \equiv \mathbf{a}_0'$ alakjának megállapítását jelenti, egyértelműen meghatározott $x_i \equiv a_{i0}'$ koordinátákkal. Az egyetlen megoldás tehát — a (6)-tal összhangban — így alakul:

$$(\mathbf{A}^{-1}\mathbf{A}\mathbf{x} = \mathbf{E}\mathbf{x} =)\ \mathbf{x} \equiv \mathbf{a}_0' = \mathbf{A}^{-1}\mathbf{a}_0 = \frac{\hat{\mathbf{A}}\mathbf{a}_0}{|\mathbf{A}|} = \tag{12}$$

$$= [x_i] = \frac{1}{|\mathbf{A}|}[\hat{\mathbf{a}}^i\mathbf{a}_0] \equiv \frac{1}{|\mathbf{A}|}[\Delta_i^*\mathbf{a}_0] = \frac{D(\mathbf{a}_1, \ldots, \mathbf{a}_{i-1}, \mathbf{a}_0, \mathbf{a}_{i+1}, \ldots, \mathbf{a}_n)}{D(\mathbf{a}_1, \ldots, \mathbf{a}_i, \ldots, \mathbf{a}_n)} = \left[\frac{D_i}{D}\right].$$

Az x_i ismeretlent a D_i és a D determináns hányadosaként előállító utolsó alak éppen a jól ismert *Cramer*-szabályt juttatja kifejezésre. Homogenitás ($\mathbf{a}_0 = \mathbf{0}$) esetén nyilván csak az

$$\mathbf{x} = \mathbf{A}^{-1}\,\mathbf{0} = \mathbf{0}$$

triviális megoldás létezik. E rövid vizsgálat eredményeit foglalja össze az alábbi

Tétel: *A (12) reguláris l. egyenletrendszernek pontosan egy* $\mathbf{x}$ *megoldásvektora létezik, mégpedig az* $\mathbf{a}_0$ *zavaró vektor* $\mathbf{A}$ *bázisú* $\mathbf{x} \equiv \mathbf{a}_0' = \mathbf{A}^{-1}\mathbf{a}_0$ *alakja (homogenitás esetén* $\mathbf{x} = \mathbf{0}$*). E vektor* x_i *koordinátája egyébként a (12)-beli* D_i *és a* D *determináns hányadosaként jelentkezik (Cramer-szabály).*

Gyakorlatban $n > 3$ esetén általában nem a fenti nehézkes, determinánsos számítást igénylő úton járunk el, hanem célszerűen a már említett *matrixalgoritmikus úton,* a következő felfogásban. Az eredeti egyenlet, zérusvektorra redukálva, bővített együtthatómatrixszal:

$$\mathbf{A}\mathbf{x} - \mathbf{a}_0 \equiv [\mathbf{A}, \mathbf{a}_0]\begin{bmatrix}\mathbf{x}\\ -1\end{bmatrix} \equiv \mathfrak{A}\mathfrak{x} = \mathbf{0}; \tag{13a}$$

a normálalakra transzformált egyenlet, a β) IV° szerint:

$$\mathfrak{A}_n\mathfrak{x} \equiv [\mathbf{E}, \mathbf{A}^{-1}\mathbf{a}_0]\begin{bmatrix}\mathbf{x}\\ -1\end{bmatrix} \equiv \mathbf{E}\mathbf{x} - \mathbf{A}^{-1}\mathbf{a}_0 \equiv \mathbf{x} - \mathbf{a}_0' = \mathbf{0}, \tag{13b}$$

ahol az $\mathfrak{A}_n$ bővített, normálalakú együtthatómatrix az

$$\mathfrak{A}_{q+1} = \mathfrak{A}_q - \gamma_q(\mathbf{a}_{i_q}^{(q)} - \mathbf{e}_{q+1})a_{(q)}^{q+1} \tag{13c}$$

$$\left\{q + 1 = 1, 2, \ldots, n; \quad \mathfrak{A}_0 \equiv \mathfrak{A}, \quad \left(\prod_{q=0}^{n-1} \gamma_q\right)^{-1} = |\mathbf{A}| \neq 0\right\}$$

transzformáló matrixalgoritmus (TMA) zárómatrixa. Algoritmusunk egyébként könnyen programozható elektronikus számítógépekre.

1. Pl. Oldjuk a (12) szerint az alábbi reguláris l. egyenletrendszereket (felhasználva a γ) II° 22. példabeli inverzmatrixokat):

$$a)\ \left.\begin{aligned} 2x + z &= 5 \\ -y + 3z &= 0 \\ x - 2z &= -5 \end{aligned}\right\},\quad b)\ \left.\begin{aligned} 2x - y + z &= 10 \\ x - 2y &= -5 \\ 4x + 4y - 5z &= 0 \end{aligned}\right\},\quad c)\ \left.\begin{aligned} 2x + 7z &= 0 \\ -x + 4y + 5z &= 0 \\ 3x + y + 2z &= 0 \end{aligned}\right\}.$$

ad $a)$ $\mathbf{Ax} \equiv \begin{bmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 3 \\ 1 & 0 & -2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 \\ 0 \\ -5 \end{bmatrix} \equiv \mathbf{a}_0;\quad |\mathbf{A}| = 5 \neq 0,$

$$\tilde{\mathbf{A}} = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 3 & -5 & -6 \\ 1 & 0 & -2 \end{bmatrix},\quad \mathbf{A}^{-1} = \tilde{\mathbf{A}}/|\mathbf{A}|;$$

$$\mathbf{x} = \mathbf{A}^{-1}\mathbf{a}_0 = \frac{1}{5}\cdot\begin{bmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 3 & -5 & -6 \\ 1 & 0 & -2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 5 \\ 0 \\ -5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 3 & -5 & -6 \\ 1 & 0 & -2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 9 \\ 3 \end{bmatrix};$$

ellenőrzés a *Cramer*-szabállyal:

$$x_3 = \frac{D_3}{D} = \frac{1}{5}\cdot\begin{vmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 3 & -5 & -6 \\ 1 & 0 & -2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \end{vmatrix} = 2 - 1 + 0 + 1\cdot 1 = 3;$$

ad $b)$ $\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 1 & -2 & 0 \\ 4 & 4 & 5 \end{bmatrix},\quad |\mathbf{A}| = -5,\quad \tilde{\mathbf{A}} = \begin{bmatrix} -10 & 9 & 2 \\ -5 & 7 & 1 \\ 10 & -11 & -3 \end{bmatrix},\quad \mathbf{a}_0 = \begin{bmatrix} 10 \\ -5 \\ 0 \end{bmatrix};$

$$\mathbf{x} = \frac{1}{|\mathbf{A}|}\cdot\tilde{\mathbf{A}}\mathbf{a}_0 = \frac{1}{-5}\cdot\begin{bmatrix} -10 & 9 & 2 \\ -5 & 7 & 1 \\ 10 & -11 & -3 \end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix} 10 \\ -5 \\ 0 \end{bmatrix} =$$

$$= \begin{bmatrix} -10 & 9 & 2 \\ -5 & 7 & 1 \\ 10 & -11 & -3 \end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 29 \\ 17 \\ -31 \end{bmatrix};$$

ad $c)$ $|\mathbf{A}| = -85;\quad \mathbf{a}_0 = \mathbf{0};\quad \mathbf{x} = \frac{1}{-85}\tilde{\mathbf{A}}\mathbf{0} = \mathbf{0}.$

2. *Pl.* Oldjuk meg matrixalgoritmussal az alábbi reguláris l. egyenletrendszert:

$$\left.\begin{aligned} x_1 + 2x_2 + 3x_3 - 2x_4 &= 6 \\ 3x_1 + x_2 + 4x_3 - 3x_4 &= 5 \\ 2x_1 + 5x_2 + 2x_3 - 4x_4 &= 2 \\ x_1 + x_2 + x_3 + x_4 &= 10 \end{aligned}\right\} . -$$

Bővített homogén hipermatrix-egyenlet alakja:

$$\mathfrak{A}_0\mathfrak{x} \equiv \left[\begin{array}{cccc|c} \boxed{1} & 2 & 3 & -2 & 6 \\ 3 & 1 & 4 & -3 & 5 \\ 2 & 5 & 2 & -4 & 2 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 10 \end{array}\right] \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ -1 \end{bmatrix} = \mathbf{0}.$$

Térjünk át az $\mathfrak{A}_0$-t normálalakra transzformáló matrixalgoritmusra!
Első lépés $(a_{11} = 1)$:

$$\mathfrak{A}_1 = \mathfrak{A}_0 - \gamma(\mathbf{a}_1 - \mathbf{e}_1)a^1 = \mathfrak{A}_0 - 1 \cdot \begin{bmatrix} 0 \\ 3 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix} [1 \quad 2 \quad 3 \quad -2 \quad 6] =$$

$$= \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 3 & -2 & 6 \\ 0 & -5 & -5 & 3 & -13 \\ 0 & 1 & -4 & 0 & -10 \\ 0 & -1 & -2 & 3 & 4 \end{array}\right].$$

Második lépés $(a'_{22} = -5)$:

$$\mathfrak{A}_2 = \mathfrak{A}_1 - \gamma_1(\mathbf{a}'_2 - \mathbf{e}_2)a^2 = \mathfrak{A}_1 + \frac{1}{5} \cdot \begin{bmatrix} 2 \\ -6 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix} [0 \quad -5 \quad -5 \quad 3 \quad -13] =$$

$$= \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 1 & -\frac{4}{5} & \frac{4}{5} \\ 0 & 1 & 1 & -\frac{3}{5} & \frac{13}{5} \\ 0 & 0 & -5 & \frac{3}{5} & -\frac{63}{5} \\ 0 & 0 & -1 & \frac{12}{5} & \frac{33}{5} \end{array}\right].$$

Harmadik lépés ($a''_{33} = -5$):

$$\mathfrak{A}_3 = \mathfrak{A}_2 - \gamma_2(\mathbf{a}''_3 - \mathbf{e}_3)\mathfrak{a}^3_{''} =$$

$$= \mathfrak{A}_2 + \frac{1}{5}\cdot\begin{bmatrix}1\\1\\-6\\-1\end{bmatrix}\left[\begin{array}{cccc:c}0 & 0 & -5 & \frac{3}{5} & -\frac{63}{5}\end{array}\right] = \left[\begin{array}{cccc:c}1 & 0 & 0 & -\frac{17}{25} & -\frac{43}{25}\\ 0 & 1 & 0 & -\frac{12}{25} & \frac{2}{25}\\ 0 & 0 & 1 & -\frac{3}{25} & \frac{63}{25}\\ 0 & 0 & 0 & \frac{57}{25} & \frac{228}{25}\end{array}\right].$$

Negyedik lépés $\left(a'''_{44} = \frac{57}{25}\right)$:

$$\mathfrak{A}_4 = \mathfrak{A}_3 - \gamma_3(\mathbf{a}'''_4 - \mathbf{e}_4)\mathfrak{a}^4_{'''} = \mathfrak{A}_3 - \frac{1}{57}\cdot\begin{bmatrix}-17\\-12\\-3\\32\end{bmatrix}\left[\begin{array}{cccc:c}0 & 0 & 0 & \frac{57}{25} & \frac{228}{25}\end{array}\right] =$$

$$= \left[\begin{array}{cccc:c}1 & 0 & 0 & 0 & 1\\ 0 & 1 & 0 & 0 & 2\\ 0 & 0 & 1 & 0 & 3\\ 0 & 0 & 0 & 1 & 4\end{array}\right].$$

Az egyenlet megoldása tehát:

$$\mathbf{x}^* \equiv \mathbf{a}_0^{(4)} = [1 \quad 2 \quad 3 \quad 4].$$

2'. Tanulmányozzuk most az *általános* 1. egyenletrendszernek a (8—9) formulával kapcsolatos megoldható esetét! Tegyük fel továbbra is, hogy az $\mathbf{A}$ együtthatómatrix m oszlopvektora közül éppen az első r, vagyis $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \dots, \mathbf{a}_r$ l. ftl, (így az $\underset{(r)}{\mathbf{A}}$ oszlopaltérbázisa), más szóval az m ismeretlen közül éppen az első r, vagyis $x_1, x_2, \dots, x_r$ *az ún. főismeretlen.* L. egyenletrendszerünk matrixos-vektoros alakja — az előzmények figyelembevételével — nyilván így fest:

$$\mathbf{A}\mathbf{x} \equiv \left[\underset{(r)}{\mathbf{A}}, \underset{(m)}{\mathbf{A}}\right]\begin{bmatrix}\mathbf{x}_1\\ \mathbf{x}_2\end{bmatrix} \equiv \underset{(r)}{\mathbf{A}}\mathbf{x}_1 + \underset{(m)}{\mathbf{A}}\mathbf{x}_2 \equiv \sum_{\varrho=1}^{r} x_\varrho \mathbf{a}_\varrho + \sum_{\mu=r+1}^{m} x_\mu \mathbf{a}_\mu = \mathbf{a}_0$$

$$\{\text{tip}\,(\mathbf{A}) = n\times m; \quad \underset{(r)}{\mathbf{A}} = \mathbf{B}^{(r)} \subset E_n^{(r)}, \quad \mathbf{a}_0 \in E_n^{(r)};$$

$$\mathbf{x}_1^* = [x_1, \dots, x_r], \quad \mathbf{x}_2^* = [x_{r+1}, \dots, x_m]\}. \qquad (14a)$$

Behelyettesítve ide a (8—9)-ből az $\mathbf{a}_\mu$ és $\mathbf{a}_0$ vektorok $\underset{(r)}{\mathbf{A}}$ altérbázisú (vesszős) alakját, azt kapjuk, hogy

$$\underset{(r)}{\mathbf{A}} \cdot \left(\underset{(r)}{\mathbf{E}} x_1 + \underset{(m)}{\mathbf{A}'} x_2\right) \equiv \sum_{\varrho=1}^{r} \left(x_\varrho + \sum_{\mu=r+1}^{m} a'_{\varrho\mu} x_\mu\right) \mathbf{a}_\varrho = \sum_{\varrho=1}^{r} a'_{\varrho 0} \mathbf{a}_\varrho \equiv \underset{(r)}{\mathbf{A}} \mathbf{a}'_0. \qquad (14b)$$

Ebből — a közös bal és jobb oldali bázis(vektorok)ra vonatkoztatott alakokat egyeztetve, majd az így nyert egyenletet az $\mathbf{x}_1^* = [x_1, \ldots, x_r]$ főismeretlen-vektorra rendezve, végül ezt a nyilván tetszőleges $\mathbf{x}_2^* = [x_{r+1}, \ldots, x_m]$ paramétervektorral a teljes $\mathbf{x}^* = [x_1, \ldots, x_m]$ megoldásvektorra kiegészítve, ily módon az

$$\left.\begin{aligned} \underset{(r)}{\mathbf{E}}\mathbf{x}_1 &\equiv \mathbf{x}_1 = \mathbf{a}'_0 - \underset{(m)}{\mathbf{A}'}\mathbf{x}_2 \\ \mathbf{x}_2 &= \mathbf{0} + \mathbf{E}\mathbf{x}_2 \end{aligned}\right\}, \text{ ill. } \left\{\begin{aligned} x_\varrho &= a'_{\varrho 0} - \sum_{\mu=r+1}^{m} a'_{\varrho 0} x_\mu \\ x_\nu &= 0 + \sum_{\mu=r+1}^{m} \delta_{\nu\mu} x_\mu \end{aligned}\right. \qquad (15a, b)$$

$$\mathbf{x} \equiv \begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_r \\ \hline x_{r+1} \\ \vdots \\ x_\mu \\ \vdots \\ x_m \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a'_{10} \\ \vdots \\ a'_{r0} \\ \hline 0 \\ \vdots \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix} - \sum_{\mu=r+1}^{m} x_\mu \begin{bmatrix} a'_1 \\ \vdots \\ a'_{r\mu} \\ \hline 0 \\ \vdots \\ -1 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix} \equiv \mathfrak{a}'_0 - \sum_{\mu=r+1}^{m} x_\mu \mathfrak{a}'_\mu \equiv \equiv \mathfrak{a}'_0 - \mathbf{x}' \qquad (15c)$$

$$\{\mathbf{x}_1, \mathbf{a}'_0 \in E_m^{(r)};\quad \mathbf{x}_2, \mathbf{0} \in E_m^{(m-r)};\quad \mathbf{x}, \mathfrak{a}'_0, \mathfrak{a}'_\mu \in E_m\}$$

elvi *megoldási formulákhoz jutunk.* Az utóbbiból az $x_\mu = \delta_{\nu\mu}$ választással az

$$\mathbf{x}_\nu = \mathfrak{a}'_0 - \mathfrak{a}'_\nu \qquad (\nu = r + 1, \ldots, m) \qquad (15d)$$

partikuláris megoldásvektorokat nyerjük. Ezek — szerkezetükből nyilvánvalóan — az E_m tér egy $E_m^{(m-r)}$ alterének $\mathbf{B}^{(m-r)}$ bázisát, egyszersmind az $X = \{\mathbf{x}\}$ megoldáshalmaz egy alaprendszerét képezik.

Homogénitás ($\mathbf{a}_0 = \mathbf{0}$) esetén a $\mathbf{B}^{(r)} = \underset{(r)}{\mathbf{A}}$ bázison, ill. egy $\mathfrak{B} = [\underset{(r)}{\mathbf{A}}, \underset{(m)}{\mathbf{E}'}]$ bázison — egyértelműen —

$$\mathbf{a}'_0 = \mathbf{0}, \quad \text{ill.} \quad \mathfrak{a}'^*_0 = [\mathbf{a}'^*_0, \mathbf{0}^*] = \mathfrak{O}^*, \qquad (16a)$$

következésképpen

$$\mathbf{x} = -\sum_{\mu=r+1}^{m} x_\mu \mathfrak{a}'_\mu, \quad \mathbf{x}_\nu = -\mathfrak{a}'_\nu \quad (\nu = r + 1, \ldots, m). \qquad (16b)$$

Végül ismételjük, hogy $\mathbf{a}_0 \notin E_n$ esetén

$$\mathbf{a}_0 \neq \underset{(r)}{\mathbf{A}}\mathbf{a}_0' \quad \text{s így} \quad \underset{(r)}{\mathbf{A}} \cdot \left(\underset{(r)}{\mathbf{E}}\mathbf{x}_1 + \underset{(m)}{\mathbf{A}}\mathbf{x}_2\right) \neq \underset{(r)}{\mathbf{A}}\mathbf{a}_0', \tag{17}$$

tehát ilyenkor egyáltalán *nincs megoldás.*

A fenti vizsgálat eredményét foglalja össze az alábbi

Tétel: *A (14) alakú általános l. vektoregyenletnek — a* $\mathbf{B}^{(r)} = [\mathbf{a}_1, \ldots, \mathbf{a}_r]$ *bázisú* $E_n^{(r)}$ *oszlopaltér és az* $\mathbf{a}_0$ *zavaró vektor (in-) kompatibilitásától függően —*

a) a $\mathbf{0} \neq \mathbf{a}_0 \notin E_n^{(r)}$ *esetben egyáltalán nincs* $\mathbf{x}$ *megoldásvektora;*

b) az $\mathbf{a}_0 \in E_n^{(r)}$ *esetben pedig végtelen sok* $\mathbf{x}$ *van, s ezek az* $\mathfrak{a}_0'$ *vektornak és a l. ftl* $\mathfrak{a}_{r+1}', \ldots, \mathfrak{a}_m' \in E_m$ *vektorokkal* (és $-x_{r+1}, \ldots, -x_m$ szabad paraméterekkel) *generált* $E_m^{(m-r)}$ *altér* $\mathbf{x}'$ *vektorainak összegeként jelentkeznek; a homogénitás esete mindig ide tartozik* ($\mathbf{a}_0 = \mathbf{0} \in E_n^{(r)}$).

Megjegyzendő, hogy *regularitás* ($n = m = r$) *esetén* $E_n^{(r)} = E_n$ s így $\mathbf{a}_0 \in E_n^{(r)}$, tehát van megoldás, mégpedig $m - r = 0$ paraméteres, vagyis paramétermentes, egyértelműen meghatározott.

Ugyancsak egyértelmű megoldás létezik *az* $r = m < n$ *esetben* is, hacsak $\mathbf{a}_0 \in E_n^{(r)}$.

Ezzel szemben végtelen sok megoldás adódik *az* $m > n$ *esetben,* hacsak $\mathbf{a}_0 \in E_n^{(r)}$, mert — a mindig igaz $r \leqq n$ egyenlőtlenség folytán — ilyenkor $m - r \geqq m - n > 0$.

3. Pl. Megoldandó az

$$x_1\mathbf{a}_1 + x_2\mathbf{a}_2 + \ldots + x_6\mathbf{a}_6 = \mathbf{a}_0 \qquad (\in E_4)$$

l. vektoregyenlet, ahol

$$\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \mathbf{a}_3, \mathbf{a}_4 \quad \text{l. ftl,} \quad \mathbf{a}_5 = 3\mathbf{a}_1 - 5\mathbf{a}_3, \quad \mathbf{a}_6 = 2\mathbf{a}_2 + \mathbf{a}_4$$

és

$$\mathbf{a}_0 = -\frac{2}{15}\mathbf{a}_1 + \frac{1}{3}\mathbf{a}_2 - \frac{7}{5}\mathbf{a}_3 - 4\mathbf{a}_4. \text{ —}$$

Esetünkben $n = 4$, $m = 6$, $r = 4$; $\mathbf{A}_{(4)} = [\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \mathbf{a}_3, \mathbf{a}_4] = \mathbf{B}^{(4)} \subset E_4$, $\mathbf{x}_0 \in E_4$ továbbá a $\mathbf{B}^{(4)}$ bázison

$$\mathbf{a}_5'^* = [3, \ 0, \ -5, \ 0], \quad \mathbf{a}_6'^* = [0, \ 2, \ 0, \ 1]$$

és

$$\mathbf{a}_0'^* = \left[-\frac{2}{15}, \ \frac{1}{3}, \ -\frac{7}{5}, \ -4\right].$$

Az általános megoldásvektor tehát — a (15c) szerint, $m - r = 6 - 4 = 2$ szabad paraméterrel — ez lesz:

$$\mathbf{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ \hdashline x_5 \\ x_6 \end{bmatrix} = \mathfrak{a}_0' - x_5\mathfrak{a}_5' - x_6\mathfrak{a}_6' = \begin{bmatrix} -2/15 \\ 1/3 \\ -7/5 \\ -4 \\ \hdashline 0 \\ 0 \end{bmatrix} - x_5 \begin{bmatrix} 3 \\ 0 \\ -5 \\ 0 \\ \hdashline -1 \\ 0 \end{bmatrix} - x_6 \begin{bmatrix} 0 \\ 2 \\ 0 \\ 1 \\ \hdashline 0 \\ -1 \end{bmatrix},$$

koordinátái pedig nyilván ezek:

a főismeretlenek:

$$x_1 = -\frac{2}{15} - 3x_5, \quad x_2 = \frac{1}{3} - 2x_6, \quad x_3 = -\frac{7}{5} + 5x_5, \quad x_4 = -4 - x_6;$$

a szabad paraméterek: x_5, x_6.

Egy partikuláris megoldás, pl. $x_5 = \frac{1}{5}$, $x_6 = 0$ választással, így alakul:

$$\mathbf{x}_p^* = \left[-\frac{11}{15}, \ \frac{1}{3}, \ -\frac{2}{5}, \ -4, \ \frac{1}{5}, \ 0\right].$$

4. Pl. Megoldandó az

$$\mathbf{a}_1x_1 + \mathbf{a}_2x_2 + \mathbf{a}_3x_3 + \mathbf{a}_4x_4 = \mathbf{a}_0 \qquad (\in E_3)$$

l. vektoregyenlet, ahol

$$\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2 \ \text{ l. ftl}, \quad \mathbf{a}_3 = -\frac{1}{11}\mathbf{a}_1 + \frac{5}{11}\mathbf{a}_2, \quad \mathbf{a}_4 = \frac{9}{11}\mathbf{a}_1 - \frac{1}{11}\mathbf{a}_2,$$

továbbá

a) $\mathbf{a}_0 = \frac{-2}{11}\mathbf{a}_1 + \frac{10}{11}\mathbf{a}_2$, ill. *b)* $\mathbf{a}_0 = \mathbf{a}_1 \times \mathbf{a}_2$. —

Esetünkben $n = 3$, $m = 4$, $r = 2$; $\underset{(2)}{\mathbf{A}} = [\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2] = \mathbf{B}^{(2)} \subset E_3^{(2)}$ és ezen a bázison

$$\mathbf{a}_3'^* = \left[-\frac{1}{11}, \ \frac{5}{11}\right], \quad \mathbf{a}_4'^* = \left[\frac{9}{11}, \ -\frac{1}{11}\right],$$

továbbá

az *a)* esetben $\mathbf{a}_0'^* = \left[\frac{1}{11}, \ \frac{1}{11}\right]$, a *b)* esetben pedig $\mathbf{a}_0'$ nem létezik [mert $\mathbf{a}_1 \times \mathbf{a}_2 \notin \{\alpha_1\mathbf{a}_1 + \alpha_2\mathbf{a}_2\} = E_3^{(2)}$].

Általános megoldás az *a)* esetben:

$$\mathbf{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2/11 \\ 10/11 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} - x_3 \begin{bmatrix} -1/11 \\ -5/11 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix} - x_4 \begin{bmatrix} 9/11 \\ -1/11 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix};$$

az $x_3 = 0$, $x_4 = 1$ választásnak megfelelő partikuláris megoldás: $\mathbf{x}_4^* = [-1, 1, 0, 1]$.

A *b)* esetben egyáltalán nincs megoldás.

III°. A megoldás feltételei, szerkezete. *1'.* A (14*a*) alakú l. vektoregyenlet megoldhatóságának $\mathbf{a}_0 \in E_n^{(r)}$ *feltételét* próbáljuk most *alkalmasabb alakban* megadni! Az egyszerűség kedvéért tegyük fel, hogy éppen az első r együtthatóvektor l. ftl (tehát $\underset{(r)}{\mathbf{A}} = [\mathbf{a}_1, \ldots, \mathbf{a}_r]$ az $E_n^{(r)}$ oszlopaltér egy $\mathbf{B}^{(r)}$ bázisa), másként *éppen* $x_1, \ldots, x_r$ az *r főismeretlen*, továbbá legyen $\underset{(r)}{\mathbf{A}}$ éppen az eredeti $\mathbf{B}_0 = [\mathbf{e}_1, \ldots, \mathbf{e}_r, \ldots, \mathbf{e}_n] \subset E_n$ bázis $\underset{(r)}{\mathbf{E}} = [\mathbf{e}_1, \ldots, \mathbf{e}_r]$ altérbázisával felcserélhető (mikor is $|\mathbf{A}_{rr}| \neq 0$), másként legyen *éppen az első r egyenlet főegyenlet*. (E kedvező helyzet egyébként mindig megvalósítható az ismeretlenek és az egyenletek alkalmas átrendezésével.)

Kitűzött célunk érdekében transzformáljuk az

$$\mathfrak{A}_0 \equiv \mathfrak{A} = [\mathbf{A}, \mathbf{a}_0] = [\underset{(r)}{\mathbf{A}}, \underset{(m)}{\mathbf{A}}, \mathbf{a}_0] = \begin{bmatrix} \mathbf{A}_{rr} & \mathbf{A}_{rm} & \mathbf{a}_{r0} \\ \mathbf{A}_{nr} & \mathbf{A}_{nm} & \mathbf{a}_{n0} \end{bmatrix} \tag{18}$$

bővített matrixot a $\mathbf{B}_0 = [\underset{(r)}{\mathbf{E}}, \underset{(n)}{\mathbf{E}}]$ bázisról a $\mathbf{B}_r = [\underset{(r)}{\mathbf{A}}, \underset{(n)}{\mathbf{E}}]$ bázisra ($\underset{(r)}{\mathbf{E}} \leftrightarrow \underset{(r)}{\mathbf{A}}$ csoportos bázisvektorcserével). A *b)* *β*) IV° értelmében így éppen az $\mathfrak{A}_0$ ún. *normálalakját* nyerjük ekképpen:

$$\mathfrak{A}_r = \mathbf{B}_r^{-1}\,\mathfrak{A}_0 = [\mathbf{r}^i\mathbf{a}_j] = \begin{bmatrix} \mathbf{E}_r & \mathbf{\Gamma A}_{rm} & \mathbf{\Gamma a}_{r0} \\ \mathbf{O} & \mathbf{O} & \mathbf{0} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{E}_r & \mathbf{A}'_{rm} & \mathbf{a}'_{r0} \\ \mathbf{O} & \mathbf{O} & \mathbf{0} \end{bmatrix}. \tag{19a}$$

Minthogy az $\mathbf{a}_j$ vektorok a feltevés szerint, az $\mathbf{a}_0$ vektor pedig a megoldhatóság érdekében az $E_n^{(r)} = \{\alpha_1\mathbf{a}_1 + \ldots + \alpha_r\mathbf{a}_r\}$ altérhez tartoznak, így a normálalakban $n - r$ utolsó koordinátájuk zérus, azaz

$$\mathbf{r}^\nu\mathbf{a}_j = 0, \qquad \mathbf{r}^\nu\mathbf{a}_0 = 0 \tag{19b, c}$$

$$(\nu = r + 1, \ldots, n; \qquad j = 1, 2, \ldots, m).$$

Egyenleteink azt mutatják, hogy *az* $\mathbf{a}_0$ *zavaró vektor ortogonális a* $\mathbf{B}_r^{-1}$ *matrixnak* (a normáló bázis inverzének) $\mathbf{r}^{r+1}, \ldots, \mathbf{r}^n$ *sorvektoraira. Ezek* (mint regu-

láris matrix sorvektorai) nyilván *l. ftl-ek, továbbá* — a *c)* α) I°-gyel összhangban — a

$$\xi^* \mathbf{a}_j = 0 \quad (j = 1, 2, \ldots, m) \tag{20}$$

transzponált homogén l. egyenletrendszer partikuláris megoldásvektorai.

2'. A (20) transzponált homogén l. egyenletrendszer $E_n^{(\nu')} = \{\xi\}$ megoldásaltere bizonyára $\nu' = n - r'$ dimenziós, ahol r' az $\mathbf{A}^*$ együtthatómatrix rangja (vagyis az $\mathbf{a}^1, \mathbf{a}^2, \ldots, \mathbf{a}^n$ vektorrendszer l. ftl vektorainak száma). A (20) előbb említett $\mathbf{r}^{r+1}, \ldots, \mathbf{r}^n$ l. ftl partikuláris megoldásvektorainak $n - r$ számára nézve írható tehát, hogy

$$n - r \leqq n - r', \quad \text{vagyis} \quad r \leqq r'. \tag{21a}$$

A (20) transzponáltja, vagyis az eredeti homogén l. egyenletrendszer $\mathbf{A}$ együtthatómatrixának rangjáról nyilván

$$r' \leqq r'' = r \tag{21b}$$

mondható; következésképpen

$$r = r' \quad \text{és így} \quad n - r' = n - r. \tag{21c}$$

Igaz tehát az alábbi

Tétel: *Bármely* $\underset{(m\times n)}{\mathbf{A}}$ *matrix és* $\mathbf{A}^*$ *transzponáltja megegyező rangszámú, azaz*

$$r \equiv \varrho(\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \ldots, \mathbf{a}_m) \equiv \varrho(\mathbf{A}) = \varrho(\mathbf{a}^1, \mathbf{a}^2, \ldots, \mathbf{a}^n) \equiv \varrho(\mathbf{A}^*) \equiv r'. \tag{22}$$

A fentiek értelmében a $\mathbf{r}^{r+1}, \ldots, \mathbf{r}^n$ l. ftl. vektor-$(n - r)$-es a (20) egyenletrendszer $E_n^{(n-r)}$ megoldásalterének egy $\mathbf{B}^{(n-r)}$ bázisát képezi, és így a (19*b*) alatti $\mathbf{a}_0 \perp \mathbf{r}^\nu$ $(\nu = r + 1, \ldots, n)$ ortogonalitási relációkból az $\mathbf{a}_0 \perp \mathbf{B}^{(n-r)}$ bázisortogonalitás, ebből pedig az $\mathbf{a}_0 \perp E_n^{(n-r)}$ altérortogonalitás adódik az $\mathbf{a}_0$ részére.

A fenti vizsgálatok alapján — a (14*a*) megoldhatóságának feltételeként — kimondható az alábbi

Tétel. *Az általános inhomogén l. vektoregyenletnek csak akkor létezik* $\mathbf{x}$ *megoldásvektora, ha az* $\mathbf{a}_0$ *zavaró vektor* o r t o g o n á l i s *a transzponált homogén l. vektoregyenlet* $E_n^{(n-r)} = \{\xi\}$ *megoldásalterére.*

3'. Vegyük szemügyre most az összetartozó

$$\mathbf{A}\mathbf{x} = \mathbf{a}_0 \quad \text{és} \quad \mathbf{A}\mathbf{x}' = \mathbf{0} \tag{23a, b}$$

inh. és hom. l. vektoregyenlet megoldásalterének kapcsolatát! A (15*c*) általános megoldási formula — szabad paramétereinek

$$x_\mu = c_\mu + t_\mu \qquad (\mu = r+1, \ldots, m; \qquad c_\mu = \text{const}) \tag{24a}$$

szerinti kialakításával — a még általánosabb

$$\mathbf{x} = (a_0' - \sum_{\mu=r+1}^{m} c_\mu a_\mu') - \sum_{\mu=r+1}^{m} t_\mu a_\mu' \equiv \mathbf{x}_0 + \mathbf{x}' \tag{24b}$$

$$\{\mathbf{x}_0 = \mathbf{const}, \qquad \mathbf{x}' = \mathbf{x}'(t_\mu)\}$$

alakot ölti, ahol $\mathbf{x}_0$ nyilván az inhomogén egyenlet egy tetszőleges partikuláris megoldásvektora, $\mathbf{x}'$ pedig a hozzá tartozó homogén egyenlet általános megoldásvektora. Így adódik az alábbi

Tétel. *A (23a) inhomogén l. vektoregyenlet* $\mathbf{x} = [x_j]$ *általános megoldásvektora előállítható a (23a) egy tetszőleges* $\mathbf{x}_0 = [x_{0j}]$ *partikuláris és a (23b) homogén l. vektoregyenlet* $\mathbf{x}' = [x_j']$ *általános megoldásvektorának összegeként.*

Más szóval — a (23*a*) általános megoldásának előállítása érdekében — a (23*a*) egy partikuláris és a (23*b*) általános megoldása *egymásra „szuperponálható"*.

IV°. További megoldhatósági kérdések. *1'.* Mint korábban már említettük, az áttekinthetőbb tárgyalás érdekében *a főismeretleneket és a főegyenleteket az első r helyre rendezve* képzeljük. Ennek következtében az $n \times m$ típusú $\mathbf{A}$ együtthatómatrix bal felső sarkában megjelenik az $\mathbf{A}_{rr}$ *reguláris főminor,* $D_r = |\mathbf{A}_{rr}| \neq 0$ *ődeterminánssal.*

Vegyük szemügyre most a (14*a*) l. egyenletrendszernek az első r (fő) egyenletéből álló és az első r (fő-) ismeretlent a bal oldalon tartalmazó *főrészét*, vagyis az

$$\mathbf{A}_{rr}\tilde{\mathbf{x}}_1 \equiv \sum_{\varrho=1}^{r} \tilde{x}_\varrho \mathbf{a}_\varrho = \mathbf{a}_{r0} - \sum_{\mu=r+1}^{m} \tilde{x}_\mu \mathbf{a}_\mu \equiv \mathbf{a}_{r0} - \mathbf{A}_{rm}\tilde{\mathbf{x}}_2 \tag{25}$$

vektoregyenletet! Ez az $\tilde{\mathbf{x}}_1 = [\tilde{x}_\varrho]$ főismeretlen-vektorra nézve *regulárisnak* tekinthető, lévén $|\mathbf{A}_{rr}| \neq 0$. A (14*a*) teljes l. egyenletrendszer $\mathbf{x}_0^* = [\mathbf{x}_{10}^*, \mathbf{x}_{20}^*]$ partikuláris megoldása nyilván a (25) főrésznek is *megoldása* [hiszen $\mathbf{x}_0$ az összes, n egyenlet között az első r (fő) egyenletet is kielégíti]. A (14*a*) egyenletrendszer $\mathbf{x}^* = [\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2]$ általános megoldása egyszersmind a (25) főrész $\tilde{\mathbf{x}}^* = [\tilde{\mathbf{x}}_1^*, \tilde{\mathbf{x}}_2^*]$ általános megoldását is *felöleli:* ui. az előbbi [ ]-es megjegyzés, valamint az III° 2' értelmében, a megfelelő homogén l. vektoregyenletek $E_m^{(m-r)} = \{\mathbf{x} - \mathbf{x}_0\}$, ill. $\tilde{E}_m^{(m-r)} = \{\mathbf{x} - \mathbf{x}_0\}$ megoldásaltere közül az első valamilyen altere lenne a másodiknak, ha a dimenzióegyezés miatt nem kellene az $E_m^{(m-r)} = \tilde{E}_m^{(m-r)}$ körülménynek fennállnia. Ebből — a közös $\mathbf{x}_0$ vektor szuperponálásával — az $\{\mathbf{x}\} = \{\tilde{\mathbf{x}}\}$ tény következik*. Igaz tehát az alábbi

Tétel: *Ha a (14a) általános l. egyenletrendszer egyáltalán megoldható, akkor megoldása azonos a (25) főrészével.*

Tételünk lehetővé teszi, hogy a továbbiakban csupán a (25) főrész megoldásával foglalkozzunk. *E főrész* s vele együtt a (14*a*) teljes l. egyenletrendszer *megoldása* — a reguláris

* Éppen ezért a továbbiakban mellőzhető az $\mathbf{x}$ és az $\tilde{\mathbf{x}}$ megkülönböztetése.

l. egyenletrendszer (12) megoldásának mintájára — így alakul:

$$(\mathbf{A}_{rr}^{-1}\mathbf{A}_{rr}\mathbf{x}_1 = \mathbf{E}_r\mathbf{x}_1 =)\,\mathbf{x}_1 = \mathbf{A}_{rr}^{-1}(\mathbf{a}_{r0} - \mathbf{A}_{rm}\mathbf{x}_2) \equiv \mathbf{a}'_{r0} - \mathbf{A}'_{rm}\mathbf{x}_2 = [x_\varrho] =$$

$$= \frac{1}{|\mathbf{A}_{rr}|}\tilde{\mathbf{A}}_{rr}\cdot(\mathbf{a}_{r0} - \mathbf{A}_{rm}\mathbf{x}_2) = \frac{1}{|\mathbf{A}_{rr}|}\Big[\underset{(r)}{\Delta}{}_\varrho^*(\mathbf{a}_{r0} - \mathbf{A}_{rm}\mathbf{x}_2)\Big] =$$

$$= \left[\frac{D_r(\mathbf{a}_{r1}, \ldots; \mathbf{a}_{r,\varrho-1}; \mathbf{a}_{r0} - \mathbf{A}_{rm}\mathbf{x}_2; \mathbf{a}_{r,\varrho+1}; \ldots, \mathbf{a}_{rr})}{D_r(\mathbf{a}_{r1}, \ldots, \mathbf{a}_{r\varrho}, \ldots, \mathbf{a}_{rr})}\right] \qquad (26)$$

$$\{\mathbf{x}_2 = [x_\mu] \quad \text{szabad}; \quad D_r = |\mathbf{A}_{rr}| \neq 0; \qquad \mathbf{a}_{r\varrho}, \mathbf{a}_{r0}, \underset{(r)}{\Delta}{}_\varrho \in E_n^{(r)}\},$$

ahol $\underset{(r)}{\Delta}{}_\varrho$ a D_r fődetermináns ϱ-adik oszlopához tartozó komplementer aldetermináns-vektor. A (26) utolsó alakja — láthatóan — a *Cramer*-szabály értelemszerű érvényesülését mutatja.

2'. Korábban - (2*a*) általános l. vektoregyenlet *megoldhatóságának* (szükséges és elégséges) feltételeként az

$$\mathbf{a}_0 \in \{\alpha_1\mathbf{a}_1 + \ldots + \alpha_m\mathbf{a}_m\} = E_n^{(r)} \qquad (27)$$

kompatibilitást emlegettük. Fennállása esetén $\mathbf{a}_0$ kifejezhető az $\mathbf{a}_1, \ldots, \mathbf{a}_m$ vektorok l. komb-jaként, így velük l. fs-ben van, tehát a köztük található l. ftl vektorok r száma $\mathbf{a}_0$ hozzávételével nem változik. Ily módon belátható lett a következő

Tétel: *A (2a) l. vektoregyenlet megoldhatóságának újabb (szükséges és elégséges) feltétele az, hogy az* $\mathbf{a}_1, \ldots, \mathbf{a}_m$ *és az* $\mathbf{a}_1, \ldots, \mathbf{a}_m, \mathbf{a}_0$ *vektorrendszer egyenlő rangú legyen*, azaz

$$\varrho(\mathbf{A}) \equiv \varrho(\mathbf{a}_1, \ldots, \mathbf{a}_m) = \varrho(\mathbf{a}_1, \ldots, \mathbf{a}_m, \mathbf{a}_0) \equiv \varrho(\mathfrak{A}). \qquad (28)$$

3'. Végül érintsünk még egy numerikus megoldhatósági feltételt. Legyen az r főismeretlen és főegyenlet ismét az első r helyre rendezve, mikor is $D_r = |\mathbf{A}_{rr}| \neq 0$. Ekkor $\mathbf{a}_0 \in E_n^{(r)}$ esetén az $\mathbf{a}_1, \ldots, \mathbf{a}_r, \mathbf{a}_0 \in E_n$ oszlop vektor-($r+1$)-es és a keresztező $\mathbf{a}^{10}, \ldots, \mathbf{a}^{r0}$, $\mathbf{a}^{\nu 0} \in E_{r+1}$ ($\nu = r+1, \ldots, n$) sorvektor-($r+1$)-esek egyaránt r-ed rangúak. Ily módon az utóbbiak által meghatározott

$$\mathbf{C}_\nu = \begin{bmatrix} \mathbf{a}^{10} \\ \vdots \\ \mathbf{a}^{r0} \\ \mathbf{a}^{\nu 0} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11} & \ldots & a_{1r} & a_{10} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{r1} & \ldots & a_{rr} & a_{r0} \\ a_{\nu 1} & \ldots & a_{\nu r} & a_{\nu 0} \end{bmatrix} \quad (\nu = r+1, \ldots, n) \qquad (29a)$$

kvadratikus, ($r+1$)-ed rendű, ún. *karakterisztikus matrixok* — mint r-ed rangúak — mind szingulárisak, s így determinánsaik mind zérus értékűek, vagyis — az utolsó oszlop szerint kifejtve, Γ_ϱ komplementer minorokkal —

$$C_\nu = |\mathbf{C}_\nu| = \Gamma_1 a_{10} + \ldots + \Gamma_r a_{r0} + D_r a_{\nu 0} =$$

$$= [\Gamma_1, \ldots, \Gamma_r; \underbrace{0}_{r+1}, \ldots, \underbrace{D_r}_{\nu}, \ldots, \underbrace{0}_{n}] \begin{bmatrix} a_{10} \\ \vdots \\ a_{n0} \end{bmatrix} \equiv \mathbf{c}^\nu \mathbf{a}_0 = 0 \qquad (\nu = r+1, \ldots, n), \qquad (29b)$$

továbbá — a ϱ-adik oszlop elemeivel és a Γ_ϱ-kkal —

$$[\Gamma_1, \ldots, \Gamma_r; 0, \ldots, D_r, \ldots, 0] \begin{bmatrix} a_{1\varrho} \\ \vdots \\ a_{n\varrho} \end{bmatrix} \equiv \mathbf{c}^\nu \mathbf{a}_\varrho = 0 \qquad (\varrho = 1, 2, \ldots, r). \qquad (29c)$$

Az utóbbi formulák szerint az $\mathbf{a}_0$ zavaró vektor *ortogonális* a l. ftl $\mathbf{c}^\nu$ vektor-(n — r)-esre s ezen keresztül a transzponált homogén l. vektoregyenlet (főrészénél) $E_n^{(n-r)}$ megoldás-alterére, — összhangban a (19*b*, *c*)-vel ($\mathbf{c}^\nu \equiv \mathbf{r}^\nu$). Igaz tehát az alábbi

Tétel: *A (2a) l. vektoregyenlet megoldhatóságának feltétele a C_r karakterisztikus determinánsok eltűnése, vagy másként, az $\mathbf{a}_0$ ortogonalitása a l. ftl $\mathbf{c}^\nu$ aldetermináns-vektorokkal generált $E_n^{(n-r)}$ altérre, amely egyébként azonos a transzponált homogén l. vektoregyenlet megoldásalterével.*

Ezzel a megoldhatósági kérdéseket áttekintettük, s befejezésül a megoldás *módszertani vonatkozásaira* kívánunk kitérni.

β) Megoldó matrix-algoritmusok (MMA)

I°. Megoldás normáló algoritmussal (MMA). *1'.* Mint már említettük, a l. egyenletrendszer gyakorlati megoldását $m, n > 3$ esetben általában nem a *Cramer*-szabály szerinti nehézkes, determinánsos számítással eszközöljük, hanem a különféle *többlépéses* (iteratív), pontos vagy közelítő *eljárások* (algoritmusok) valamelyikével. A szakirodalomban számos ilyen eljárást ismertetnek és alkalmaznak (olykor az együtthatómatrix egyes speciális tulajdonságainak kihasználásával); e tekintetben utaljunk pl. *Bodewig* [67], *Fagyejev* [68], *Egerváry* [66], *Hőnyi* [58], a *szerző* [69] és mások idevágó munkáira. Figyelemre méltó, hogy ezek az eljárások az utóbbi években mind gyakrabban matrixalgebrai alakban, tehát matrixalgoritmusként jelennek meg a szakcikkekben. Hazai viszonylatban éppen *Egerváry* volt a *matrixalgoritmikus módszerek* úttörője. Nevezetes rangcsökkentő módszerével — melyet a *b) β)* III°-ban már bevezettünk — több neves külföldi eljárást tudott a sajátja speciális eseteként előállítani.

A *szerző* kedvező tapasztalatokkal és bizonyos külföldi érdeklődést keltve alkalmazta *Egerváry* eljárásait különféle műszaki célokra [58], sőt később maga is adott meg matrixalgoritmusokat, nemcsak a l. egyenletrendszerek [50], hanem a l. programozás [48] céljaira is. Egyik matrixalgoritmusát a fentiekben már több változatban alkalmaztuk különféle célokra (pl. transzformáció, normálalak, rangmegállapítás, invertálás stb. céljaira); most ugyanezt az általános l. egyenletrendszer megoldására fogjuk felhasználni.

2'. Az általános inhomogén l. egyenletrendszert célszerűen — a (13*a*) mintájára — az

$$\underset{(n\times m)}{\mathbf{A}} \cdot \underset{(m)}{\mathbf{x}} - \underset{(n)}{\mathbf{a}_0} \equiv [\mathbf{A}, \mathbf{a}_0]\begin{bmatrix} \mathbf{x} \\ -1 \end{bmatrix} \equiv [\mathbf{a}_1, \ldots, \mathbf{a}_m \,\vdots\, \mathbf{a}_0]\begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_m \\ \hdashline -1 \end{bmatrix} \equiv \mathfrak{A}\mathfrak{x} = \mathbf{0} \qquad (30a)$$

$$\{x_{m+1} = -1; \quad \mathfrak{A} \equiv \mathfrak{A}_0; \quad r = \varrho(\mathbf{A}) = \varrho(\mathfrak{A}), \quad \text{ha} \quad \mathbf{a}_0 \in E_n^{(r)}\}$$

majoráns (bővített) homogén l. hipermatrixegyenletként fogjuk fel. Ha egyszerűség kedvéért éppen az első r helyen képzeljük az r főismeretlent és az r főegyenletet, más szóval, ha $\mathbf{A}_{rr}$ reguláris főminor (azaz $|\mathbf{A}_{rr}| \neq 0$), akkor a (30) egyenlet — az $\mathfrak{A}$ hipermatrix megfelelő további particionálásával, valamint az $x_{m+1} = -1$ figyelembevételével —

$$\mathfrak{A}_0\mathfrak{x} \equiv [\underset{(r)}{\mathbf{A}}, \underset{(m)}{\mathbf{A}}, \mathbf{a}_0] \begin{bmatrix} \mathbf{x}_1 \\ \mathbf{x}_2 \\ -1 \end{bmatrix} \equiv \begin{bmatrix} \mathbf{A}_{rr} & \mathbf{A}_{rn} & \mathbf{a}_{r0} \\ \mathbf{A}_{nr} & \mathbf{A}_{nm} & \mathbf{a}_{n0} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{x}_1 \\ \mathbf{x}_2 \\ -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{0}_1 \\ \mathbf{0}_2 \end{bmatrix} \equiv \mathbf{0} \qquad (30b)$$

módon, az ún. *normálalakban* pedig

$$\mathfrak{A}_r\mathfrak{x} \equiv \begin{bmatrix} \mathbf{E}_r & \mathbf{\Gamma A}_{rm} & \mathbf{\Gamma a}_{r0} \\ \mathbf{O} & \mathbf{O} & \mathbf{a}_{n0} - \mathbf{A}_{nr}\mathbf{\Gamma a}_{r0} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{x}_1 \\ \mathbf{x}_2 \\ -1 \end{bmatrix} \equiv \begin{bmatrix} \mathbf{E}_r & \mathbf{A}'_{rm} & \mathbf{a}'_{r0} \\ \mathbf{O} & \mathbf{O} & \mathbf{a}''_{n0} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{x}_1 \\ \mathbf{x}_2 \\ -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{0}_1 \\ \mathbf{0}_2 \end{bmatrix} \equiv \mathbf{0} \qquad (31a)$$

$$\{\mathfrak{A}_r = \mathbf{B}_r^{-1}\mathfrak{A}_0, \quad \mathbf{B}_r = [\underset{(r)}{\mathbf{A}}, \underset{(m)}{\mathbf{E}}]; \quad \mathbf{a}''_{n0} = \mathbf{a}_{n0} - \mathbf{A}_{nr}\mathbf{\Gamma a}_{r0} = \mathbf{0}, \quad \text{ha} \quad \mathbf{a}_0 \in E_n^{(r)}\}$$

módon írható fel. Inkompatibilitás ($\mathbf{a}_0 \notin E_n^{(r)}$) esetén $\mathbf{a}''_{n0} \neq \mathbf{0}$, viszont a jobb oldali $\mathbf{0}$-sal kellene egyenlőnek lenni, tehát ellentmondás jelzi, hogy a l. egyenletrendszernek nincs megoldása. Kompatibilitás ($\mathbf{a}_0 \in E_n^{(r)}$ s így $\mathbf{a}''_{n0} = \mathbf{0}$) esetén a (31*b*) lényegében a l. egyenletrendszer *főrészét* szolgáltatja, mégpedig az $\mathbf{x}_1$ főismeretlen-vektorra explicite megoldható alakban; nevezetesen

$$(\mathbf{E}_r\mathbf{x}_1 \equiv)\ \mathbf{x}_1 = \mathbf{\Gamma a}_{r0} - \mathbf{\Gamma A}_{rm}\mathbf{x}_2 \equiv \mathbf{a}'_{r0} - \mathbf{A}'_{rm}\mathbf{x}_2 \qquad (\mathbf{x}_2 \text{ tetszőleges}). \qquad (31b)$$

A főrész e megoldása — a IV° 1′-beli tétel értelmében — megegyezik a teljes egyenletrendszerével. A megoldás — láthatóan — az $\mathfrak{A}_r$ *normálalak* előállításán múlik, amely esetünkben ($\mathbf{A}_{rr}$ főminorral) — a *b)* β) II°-ban tanultak értelemszerű alkalmazásával — az

$$\mathfrak{A}_{q+1} = \mathfrak{A}_q - \gamma_q(\mathbf{a}_{q+1}^{(q)} - \mathbf{e}_{q+1})\mathfrak{a}_{(q)}^{q+1} \qquad (31c)$$

$$\{\mathfrak{A}_0 \equiv \mathfrak{A} = [\mathbf{A}, \mathbf{a}_0]; \quad q+1 = 1, 2, \ldots, r; \quad 1/\gamma_q \neq 0\}$$

megoldó matrixalgoritmus (MMA) zárómatrixaként nyerhető.

3′. A gyakorlatban ezt a matrixalgoritmust némileg bonyolultabb változatban használjuk, mert valójában az r rangszám, a $\mathbf{B}_r$ bázisba bevonandó $\mathbf{a}_{l_0}$, $\mathbf{a}_{l_1}$, $\ldots$, $\mathbf{a}_{l_{r-1}}^{(r-1)}$ vektor-r-es, az $\mathbf{a}''_{n0} = \mathbf{0}$ kompatibilitás stb. mind megállapításra várnak. E cél érdekében eljárásunkat úgy *módosítjuk*, hogy a $\mathbf{B}_0 \equiv \mathbf{E}_n$ induló bázisba — az $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \ldots, \mathbf{e}_n$ egységvektorok helyébe — egymás után olyan (célszerűen minél alacsonyabb indexű) $\mathbf{a}_{l_0}, \mathbf{a}_{l_1}, \ldots, \mathbf{a}_{l_{r-1}}^{(r-1)}$ vektorokat vonunk be

(rendre az $\mathfrak{A}_0, \mathfrak{A}_1, \ldots, \mathfrak{A}_{r-1}$ matrixból), amelyek nem ortogonálisak rájuk, azaz $\mathbf{e}^{q+1}\mathbf{a}^{(q)}_{l_q} = a_{q+1,l_q} = 1/\gamma_q \neq 0$. Matrixalgoritmusunk ekkor így alakul:

$$\mathfrak{A}_{q+1} = \mathfrak{A}_q - \gamma_q(\mathbf{a}^{(q)}_{l_q} - \mathbf{e}_{q+1})\mathfrak{a}^{q+1}_{(q)} \quad (q+1 = 1, 2, \ldots, r), \tag{32a}$$

az $\mathbf{a}^{(q)}_{l_q-1} = \mathbf{e}_q$ egységvektorok szokásos ('-vel jelzendő) *elhagyása* után pedig így:

$$\mathfrak{A}_{q+1} = \mathfrak{A}'_q - \gamma_q(\mathbf{a}^{(q)}_{l_q} - \mathbf{e}_{q+1})\mathfrak{a}'^{q+1}_{(q)} \quad (q+1 = 1, 2, \ldots, r). \tag{32b}$$

II°. Az (in)kompatibilitás feltétele. *1'.* Az eljárás azáltal nyer *automatikus befejezést,* hogy egy bizonyos (ti. éppen az r-edik) lépésben eljutunk az $\mathfrak{A}_0$ normálalakjához (ti. az $\mathfrak{A}_r$-hez), amelyben az a $\mathbf{B}_r = [\mathbf{a}_{l_0}, \ldots, \mathbf{a}_{l_{r-1}}; \mathbf{e}_{r+1}, \ldots, \mathbf{e}_n]$ bázison kifejezett $\mathbf{a}^{(r)}_j$ és $\mathbf{a}^{(r)}_0$ vektorok — mint a $\mathbf{B}^{(r)}_r = [\mathbf{a}_{l_0}, \ldots, \mathbf{a}_{l_{r-1}}]$ bázisú $E^{(r)}_n$ oszlopaltérrel *kompatibilisek* — csupa zérus $(r+1)$-edik, ..., n-edik koordinátával rendelkeznek, azaz

$$\mathfrak{a}^{r+1}_{(r)} = \mathfrak{a}^{r+2}_{(r)} = \ldots = \mathfrak{a}^{n}_{(r)} = \mathbf{0}^* \quad \text{és} \quad a^{(r)}_{r+1,0} = a^{(r)}_{r+2,0} = \ldots = a^{(r)}_{n0} = 0. \tag{33a, b}$$

Végül a normálalakból

$$\mathfrak{A}_r\mathfrak{x} = [\ldots\mathbf{e}_{rl_q}\ldots\underset{(j\neq l_q)}{\mathbf{a}^{(r)}_{rj}}\ldots\mathbf{a}^{(r)}_{r0}]\begin{bmatrix} \vdots \\ x_{l_q} \\ \vdots \\ x_j \\ \vdots \\ -1 \end{bmatrix} \equiv \sum_{q=0}^{r-1} x_{l_q}\mathbf{e}_{rl_q} + \sum_{j=1,\, j\neq l_q}^{m} x_j\mathbf{a}^{(r)}_{rj} - \mathbf{a}^{(r)}_{r0} \equiv \tag{34}$$

$$\equiv \mathbf{E}_r\mathbf{x}_1 + \mathbf{A}'_{rm}\mathbf{x}_2 - \mathbf{a}_{r0} = \mathbf{0}, \quad \mathbf{x}_1 = \mathbf{a}'_{r0} - \mathbf{A}'_{rm}\mathbf{x}_2$$

módon kapjuk a (30*a*) majoráns homogén 1. hipermatrix általános *megoldását,* $\mathbf{x}_2 = [x_j]$ $(j \neq l_q)$ szabad paramétervektorral.

Az eljárás automatikus megszakadását jelenti az is, ha a (33*a*) zérusfeltételek teljesülnek, de a (33*b*) *feltételek nem.* Ez azt jelenti, hogy eljutottunk ugyan az $\mathfrak{A}_0$-nak a saját $E^{(r)}_n$ oszlopalterére transzformált normálalakjához, de $\mathbf{a}_0$ *inkompatibilis* az $E^{(r)}_n$ altérrel, mikor is — tudvalevőleg — egyáltalán *nincs megoldás.*

2'. Hangsúlyozandó végül, hogy — *számítástechnikai előnyök* kedvéért — olykor a generáló sorindexek választásának (32*a, b*)-beli $k_q = q+1$ megkötését is elejtjük és *tetszőleges* l_q és k_q $(q = 0, 1, \ldots, r-1)$ *választással élünk,* természetesen a generáló elem választásának szokásos $a^{(q)}_{k_q l_q} = 1/\gamma_q \neq 0$ feltétele mellett, és célszerűen arra törekedve, hogy az $a^{(q)}_{k_q l_q}$ minél előnyösebb osztó legyen (pl. $\pm 1, \pm 2, \ldots, \pm n$). A generáló elemek e szabadabb választásánál

gondosan ügyelni kell (az $\mathfrak{A}_r$ normálalakban) az $\mathbf{e}_{rl_q}$, x_{l_q}, $\mathbf{a}_{rj}^{(r)}$, x_j mennyiségek összetartozásának helyes megállapítására, mert az itt kevésbé gépies, mint fentebbi, kötöttebb algoritmusnál.

Végül emeljük ki, hogy matrixalgoritmusunk — a benne szereplő egyszerű matrixalgebrai műveletek (diadikus szorzás, kivonás) miatt *könnyen programozható elektronikus számítógépre;* műszaki használhatóságát e körülmény nagyban fokozza.

Befejezésül oldjunk meg néhány, nagyobb méretű l. egyenletrendszert eljárásunkkal!

1. Pl. Oldjuk meg az alábbi l. egyenletrendszert a *b) β)* II°-beli 3. példa figyelembevételével:

$$\left.\begin{aligned} x_1 + 2x_2 + x_3 - x_4 + 2x_5 &= 4 \\ 2x_1 + 3x_2 + x_3 - 2x_4 + 3x_5 &= 0 \\ x_1 + x_2 - 4x_3 + 2x_4 - 3x_5 &= 2 \\ x_1 + 2x_2 + 5x_3 - 4x_4 + 6x_5 &= -2 \end{aligned}\right\}.$$

A megfelelő majoráns homogén l. hipermatrix-egyenlet nyilván ez lesz:

$$\mathfrak{A}_0\mathfrak{x} = \left[\begin{array}{ccccc|c} 1 & 2 & 1 & -1 & 2 & 4 \\ 2 & 3 & 1 & -2 & 3 & 0 \\ 1 & 1 & -4 & 2 & -3 & 2 \\ 1 & 2 & 5 & -4 & 6 & -2 \end{array}\right] \left[\begin{array}{c} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \\ \hline -1 \end{array}\right] = \mathbf{0}.$$

Normálalakja — az említett példában $a_{11} = 1$, $a'_{22} = -1$, $a''_{33} = -4$ generáló elemekkel végzett transzformációsorozat eredményeként — így írható fel (az ott elhagyott egységvektorokat újra beiktatva):

$$\mathfrak{A}_r\mathfrak{x} = \left[\begin{array}{ccc|cc|c} 1 & 0 & 0 & -1{,}75 & 1 & -13{,}5 \\ 0 & 1 & 0 & 0{,}75 & 0 & 9{,}5 \\ 0 & 0 & 1 & 0{,}75 & 1 & -1{,}5 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right] \left[\begin{array}{c} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ \hline x_4 \\ x_5 \\ \hline -1 \end{array}\right] = \mathbf{0}.$$

Esetünkben $r = \varrho(\mathbf{A}) = \varrho(\mathfrak{A}) = 3$, a lépések számának és az $\mathbf{a}_0 \in E_4^{(3)}$ kompatibilitásnak megfelelően. Az $\mathfrak{A}_r \equiv \mathfrak{A}_3$ normálalakban osztóvonalakkal elkülönítettük a jellegzetes blokkokat (pl. $\mathbf{E}_r$, $\mathbf{A}'_{rn}$, $\mathbf{a}'_{r0}$). Ezek figyelembevételével, a l. egyenletrendszer főrészének általános megoldása, a főismeretlenekre megol-

dott alakban ez lesz:

$$\mathbf{x}_1 \equiv \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \mathbf{a}'_{r0} - \mathbf{A}'_{rm}\mathbf{x}_2 \equiv \begin{bmatrix} -13,5 \\ 9,5 \\ -1,5 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} -1,75 & 1 \\ 0,75 & 0 \\ 0,75 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_4 \\ x_5 \end{bmatrix} \equiv$$

$$\equiv \begin{bmatrix} -13,5 + 1,75x_4 - x_5 \\ 9,5 - 0,75x_4 \\ -1,5 + 1,50x_4 - x_5 \end{bmatrix} \quad (x_4,\ x_5 \text{ tetszőleges}).$$

Egy partikuláris megoldás, pl. $x_4 = 2$, $x_5 = 1$ választással

$$\mathbf{x}^*_{10} = [-11,\ \ 8,\ \ -1].$$

Megjegyzendő, hogy az $\mathfrak{A}_0$ normálása s ennek során a főismeretlenek kiválasztása másként is történhet. Pl. $a_{14} = -1$, $a'_{25} = -1$, $a''_{42} = -4$ generáló elemekkel x_4, x_5, x_2 főismeretlenekkel dolgozva, az alábbi általános megoldást kapjuk:

$$\left.\begin{aligned} x_2 &= 0,5 + 0,75x_1 + 0,75x_3 \\ x_4 &= 12 + x_1 - x_3 \\ x_5 &= 7,5 + 0,75x_1 - 1,75x_3 \end{aligned}\right\}.$$

A változók cseréjével (pl. $x_4 \leftrightarrow x_1$, $x_5 \leftrightarrow x_3$)* megmutatható, hogy a két általános megoldás megegyezik. Az utóbbiból $x_1 = -11$, $x_3 = -1$ választással nyerhető a fenti $\mathbf{x}_{10}$ partikuláris megoldás.

2. Pl. Oldjuk meg az alábbi l. egyenletrendszert, a *b) β)* II°-beli 4. példa felhasználásával:

$$\left.\begin{aligned} 3x_1 + x_2 + x_3 + 2x_4 + 8x_5 + 2x_6 &= 3 \\ 3x_1 - 6x_2 + x_3 + x_4 + 7x_5 + 5x_6 &= -21 \\ 4x_1 + 2x_2 + 3x_3 + 3x_4 + 11x_5 + 5x_6 &= 7 \\ -2x_1 + 2x_2 - x_3 - x_4 - 5x_5 - 3x_6 &= 7 \\ 2x_1 + 4x_2 + 2x_3 + 2x_4 + 6x_5 + 2x_6 &= 14 \end{aligned}\right\}.$$

A megfelelő majoráns homogén l. hipermatrix-egyenlet nyilván ez lesz:

$$\mathfrak{A}_0\mathfrak{x} = \left[\begin{array}{cccccc|c} 3 & 1 & 1 & 2 & 8 & 2 & 3 \\ 3 & -6 & 1 & 1 & 7 & 5 & -21 \\ 4 & 2 & 3 & 3 & 11 & 5 & 7 \\ -2 & 2 & -1 & -1 & -5 & -3 & 7 \\ 2 & 4 & 2 & 2 & 6 & 2 & 14 \end{array}\right] \left[\begin{array}{c} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \\ x_6 \\ \hline -1 \end{array}\right] = \mathbf{0}.$$

* Ez szintén lebonyolítható matrixalgoritmusunkkal.

Normálalakja — az említett példában $a_{12} = 1$, $a'_{33} = 1$, $a''_{26} = 10$ generáló elemekkel végzett transzformációsorozat eredményeként, az egységvektorok újrabeiktatásával — ez lesz:

$$\mathfrak{A}_r\mathfrak{x} = \left[\begin{array}{cccccc|c} 1{,}5 & 1 & 0 & 1 & 4 & 0 & 3 \\ 3{,}4 & 0 & 0 & 2 & 9 & 1 & -1 \\ -5{,}5 & 0 & 1 & -3 & -14 & 0 & 2 \\ \hdashline 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right] \left[\begin{array}{c} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \\ x_6 \\ \hdashline -1 \end{array}\right] = \mathbf{0},$$

$$\{r = \varrho(\mathbf{A}) = \varrho(\mathfrak{A}) = 3\}.$$

Általános megoldása, az x_2, x_3 és x_6 főismeretlenekre megoldva, így alakul:

$$\mathbf{x}_1 \equiv \begin{bmatrix} x_2 \\ x_3 \\ x_6 \end{bmatrix} = \mathbf{a}'_{r0} - \mathbf{A}'_{rm}\mathbf{x}_2 \equiv \begin{bmatrix} 3 \\ 2 \\ -1 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 1{,}5 & 1 & 4 \\ 5{,}5 & -3 & -14 \\ 3{,}4 & 2 & 9 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_4 \\ x_5 \end{bmatrix}.$$

Ellenőrzés pl. az első egyenlettel ($x_1 = x_4 = x_5 = 0$ választás mellett):

$$3 \cdot 0 + 1 \cdot 3 + 1 \cdot 2 + 2 \cdot 0 + 8 \cdot 0 + 2 \cdot (-1) = 3 + 2 - 2 = 3.$$

3. Pl. Oldjuk meg az ismertetett megoldó matrixalgoritmussal (MMA) az alábbi homogén l. matrixegyenletet:

$$\mathbf{A}_0\mathbf{x} \equiv \begin{bmatrix} -3 & 2 & -1 & 7 & 3 \\ \boxed{1} & 0 & -1 & 2 & 3 \\ -1 & 2 & 3 & -3 & -5 \\ 0 & -2 & -2 & 0 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} = \mathbf{0}.$$

Első lépés ($a_{21} = 1$):

$$\mathbf{A}_1 = \mathbf{A}_0 - \frac{1}{a_{21}}(\mathbf{a}_1 - \mathbf{e}_2)\mathbf{a}^2 = \mathbf{A}_0 - 1 \cdot \begin{bmatrix} -3 \\ 0 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix} [1 \quad 0 \quad -1 \quad 2 \quad 3] =$$

$$= \begin{bmatrix} 0 & 2 & 2 & 1 & -6 \\ 1 & 0 & -1 & 2 & 3 \\ 0 & 2 & 2 & -1 & -2 \\ 0 & \boxed{-2} & -2 & 0 & 4 \end{bmatrix}.$$

Második lépés ($a'_{42} = -2$):

$$\mathbf{A}_2 = \mathbf{A}_1 - \frac{1}{a'_{42}}(\mathbf{a}'_2 - \mathbf{e}_4)\mathbf{a}^4_{\prime} = \mathbf{A}_1 + \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \\ 2 \\ -3 \end{bmatrix} [0 \quad -1 \quad -1 \quad 0 \quad 2] =$$

$$= \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & \boxed{1} & -2 \\ 1 & 0 & -1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & -2 \end{bmatrix}.$$

Harmadik lépés ($a''_{14} = 1$):

$$\mathbf{A}_3 = \mathbf{A}_2 - \frac{1}{a''_{14}}(\mathbf{a}''_4 - \mathbf{e}_1)\mathbf{a}^1_{\prime\prime} = \mathbf{A}_2 - \begin{bmatrix} 0 \\ 2 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix} [0 \quad 0 \quad 0 \quad 1 \quad -2] =$$

$$= \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 & -2 \\ 1 & 0 & -1 & 0 & 7 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & -2 \end{bmatrix}.$$

Ez már a keresett normálalak, mert a még szabad $\mathbf{e}_3$ bázisvektor egyik $\mathbf{a}'''_j$-vel sem cserélhető ki, lévén $\mathbf{e}^3\mathbf{a}'''_j = 0$. Az általános megoldás tehát a főismeretlenekre kifejezve ez lesz:

$$\mathbf{x}_1 \equiv \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_4 \end{bmatrix} = -\mathbf{A}'_{rm}\mathbf{x}_2 = -\begin{bmatrix} -1 & 7 \\ 1 & -2 \\ 0 & -2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_3 \\ x_5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_3 - 7x_5 \\ -x_3 + 2x_5 \\ 2x_5 \end{bmatrix}.$$

Megjegyzendő, hogy eljárásunk során az $a^{(q)}_{k_q l_q} \neq 0$ generáló elemeket most szabadabban választottuk. Érdekes, hogy az $\mathbf{A}_2$ matrix $\mathbf{a}''_3$ oszlopvektorából nem választhatunk generáló elemet, mert az a már bázisba vont $\mathbf{a}_1$, ill. $\mathbf{a}'_2$ visszacserélését eredményezné.

4. Pl. Oldjuk meg a megoldó matrixalgoritmussal (MAM) az alábbi majoráns homogén 1. hipermatrixegyenletet:

$$\mathfrak{A}_0\mathfrak{x} \equiv [\mathbf{A}, \mathbf{a}_0] \begin{bmatrix} \mathbf{x} \\ -1 \end{bmatrix} \equiv \left[\begin{array}{cccc:c} \boxed{1} & -1 & 2 & 0 & 1 \\ 2 & -1 & 5 & 2 & 2 \\ 3 & -3 & 6 & 2 & 7 \\ 1 & -2 & 1 & -5 & -5 \end{array}\right] \left[\begin{array}{c} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ \hdashline -1 \end{array}\right] = \mathbf{0}.$$

Első lépés ($a_{11} = 1$):

$$\mathfrak{A}_1 = \mathfrak{A}_0 - \frac{1}{a_{11}}(\mathbf{a}_1 - \mathbf{e}_1)\mathfrak{a}^1 = \mathfrak{A}_0 - 1 \cdot \begin{bmatrix} 0 \\ 2 \\ 3 \\ 1 \end{bmatrix} [1 \quad -1 \quad 2 \quad 0 \quad 1] =$$

$$= \left[\begin{array}{rrrr:r} 1 & -1 & 2 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & -1 & -1 & -5 & -6 \end{array}\right].$$

Második lépés ($a'_{22} = 1$):

$$\mathfrak{A}_2 = \mathfrak{A}_1 - \frac{1}{a'_{22}}(\mathbf{a}'_2 - \mathbf{e}_2)\mathfrak{a}'^2 = \mathfrak{A}_1 - 1 \cdot \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix} [0 \quad 1 \quad 1 \quad 2 \quad 0] =$$

$$= \left[\begin{array}{rrrr:r} 1 & 0 & 3 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & -3 & -6 \end{array}\right].$$

Harmadik lépés ($a''_{34} = 2$):

$$\mathfrak{A}_3 = \mathfrak{A}_2 - \frac{1}{a''_{34}}(\mathbf{a}''_4 - \mathbf{e}_3)\mathfrak{a}''^3 = \mathfrak{A}_2 - \begin{bmatrix} 2 \\ 2 \\ 1 \\ -3 \end{bmatrix} [0 \quad 0 \quad 0 \quad 1 \quad 2] =$$

$$= \left[\begin{array}{rrrr:r} 1 & 0 & 3 & 0 & -3 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & -4 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right].$$

Az algoritmus megszakadt, mert $\mathbf{e}^4\mathbf{a}'''_j = a'''_{4j} = 0$. Az általános megoldás tehát ez lesz:

$$\mathbf{x}_1 \equiv \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_4 \end{bmatrix} = \mathbf{a}'_{r0} - \mathbf{A}'_{rm}\mathbf{x}_2 \equiv \begin{bmatrix} -3 \\ -4 \\ 2 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 3 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} \cdot x_3 = \begin{bmatrix} -3 - 3x_3 \\ -4 - x_3 \\ 2 \end{bmatrix}.$$

III°. Megoldás rangcsökkentő algoritmussal (M'MA). *1'.* Végül röviden térjünk ki arra, hogy a *b) β)* III°.-ben bemutatott *Egerváry*-féle rangcsökkentő eljárás miként alkalmazható l. egyenletrendszerekre. Ismét elegendő lesz homogén egyenletrendszerről beszélni, mert az $\mathbf{Ax} = \mathbf{a}_0$ inhomogén l. matrixegyenlet általános megoldása — mint már utaltunk rá — felfogható az

$$\mathfrak{A}\mathfrak{x} \equiv [\mathbf{A}, \mathbf{a}_0] \begin{bmatrix} \mathbf{x} \\ x_{m-1} \end{bmatrix} = \mathbf{0} \quad (x_{m+1} = -1) \tag{35}$$

alakú, ún. majoráns homogén l. hipermatrix-egyenlet $x_{m+1} = -1$ feltételt kielégítő partikuláris megoldásaként. Ez természetesen csak akkor létezik, ha az x_{m+1} szabad paraméternek bizonyul (s így bármilyen értéket felvehet).

Egerváry említett algoritmusát célszerűen

$$\mathfrak{A}_{q+1} = \mathfrak{A}_q - \gamma_q \mathbf{a}_{q+1}^{(q)} \mathfrak{a}_{(q)}^{k_q} \tag{36a}$$

$$\{\mathfrak{A}_0 \equiv \mathfrak{A};\ q+1 = 1, 2, \ldots, r;\ a_{k_q, q+1}^{(q)} = 1/\gamma_q \neq 0;\ \mathfrak{A}_r = \mathbf{0}\}$$

módon alkalmazzuk, vagyis *lehetőleg sorrendben haladunk a generáló oszlopok választásával.* Ha esetleg a soron következő oszlop csupa zérus elemű, vagy csak az addigi generáló sorokban tartalmaz nem zérus elemet, akkor az illető oszlopot nyilván átugorjuk. A (tényleges) generáló oszlopok indexei jelölik ki a főismeretleneket, vagy másként a kötött ismeretleneket (összesen r számban), a többi oszlopok indexei pedig a szabad ismeretleneket, vagy paramétereket (összesen $m - r$ számban). Az $\mathfrak{A}_r$ záró hipermatrixban a generáló oszlopok (és sorok) mellett (amelyek — mint tudjuk — akár el is hagyhatók) az összes többi oszlopok, köztük az $(m + 1)$-edik is, csupa zérus elemekkel szerepelnek, az utóbbi nyilván a *kompatibilitás feltételeként.*

2'. A *b) β)* III.°-ban tanultak értelmében, a fenti algoritmus eredményeként (a $l_q = q + 1$ választás lehetősége esetén) az $\mathfrak{A}_0$ induló hipermatrix

$$\mathfrak{A}_0 = \sum_{q=0}^{r-1} \gamma_q \mathbf{a}_{q+1}^{(q)} \mathfrak{a}_{(q)}^{k_q} \equiv \sum_{q=0}^{r-1} \mathbf{b}_q \mathfrak{c}_q^* \equiv \underset{(n\times r)}{\mathbf{B}} \underset{[r\times(m+1)]}{\mathfrak{C}^*} \quad (\mathfrak{c}_q^* = \gamma_q \mathfrak{a}_{(q)}^{k_q}) \tag{36b}$$

diadikus, ill. *bázisfaktoros alakja* adódik (tudvalevőleg egy-egy l. ftl oszlop-, ill. sorvektor-r-essel). Itt — a generáló oszlopok (és a nyomukban fellépő csupa zérus elemű oszlopok) sorrendszerű választása, valamint a $c_{qq} = \gamma_q \cdot a_{k_q, q+1}^{(q)} = 1$ körülmény miatt — a $\mathfrak{C}^*$ bázisfaktor

$$\underset{[r\times(m+1)]}{\mathfrak{C}^*} = \begin{bmatrix} \mathfrak{c}_1^* \\ \mathfrak{c}_2^* \\ \vdots \\ \mathfrak{c}_r^* \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & c_{12} & c_{13} & \ldots & c_{1r} & \ldots & c_{1,m+1} \\ 0 & 1 & c_{23} & \ldots & c_{2r} & \ldots & c_{2,m+1} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & \ldots & 1 & \ldots & c_{r,m+1} \end{bmatrix} \tag{36c}$$

szerkezetű, vagyis ún. *trapézmatrix.*

A (36*b*) felhasználásával a (35) l. hipermatrixegyenlet

$$\mathbf{B}\mathfrak{C}^*\mathfrak{x} = \mathbf{0} \tag{37a}$$

alakba írható át. Nyilván létezik olyan $\mathbf{B}_b^{-1}$ (bal oldali inverz) matrix,* amellyel balról megszorozva a (37a)-t, ez a

$$(\mathbf{B}_b^{-1}\mathbf{B})\mathfrak{C}^*\mathfrak{x} \equiv \mathbf{E}_r\mathfrak{C}^*\mathfrak{x} = \mathfrak{C}^*\mathfrak{x} = \mathbf{0} \equiv$$

$$\equiv \begin{bmatrix} x_1 + c_{12}x_2 + c_{13}x_3 + \dots + c_{1r}x_r + \dots + c_{1,m+1}x_{m+1} \\ x_2 + c_{23}x_3 + \dots + c_{2r}x_r + \dots + c_{2,m+1}x_{m+1} \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ x_r + \dots + c_{r,m+1}x_{m+1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix} \tag{37b}$$

alakra *redukálódik.* Ebből alulról felfelé haladva, ismételt rendezéssel és helyettesítéssel** nyerhetők az

$$x_r,\ x_{r-1},\ \dots,\ x_3,\ x_2,\ x_1 \tag{38a}$$

fő- vagy kötött ismeretlenek, az

$$x_{r+1},\ x_{r+2},\ \dots,\ x_m,\ x_{m+1} \tag{38b}$$

szabad ismeretlenek, vagy paraméterek l. komb-jaként. Végül a már említett $x_{m+1} = -1$ feltétel érvényesítésével nyerjük a (35)-be összefoglalt inhomogén l. egyenletrendszer általános megoldását.

A fentiekben tárgyalt két matrixalgoritmikus megoldási módszeren túlmenően *további ilyen jellegű eljárások* ismertetésére itt nincs terünk; ezek tekintetében pl. *Egerváry* [66], *Bodewig* [67] és a szerző [69] munkájára utalhatunk.

Lássunk most *Egerváry* módszerére egy-két példát!

6. Pl. Oldjuk meg az imént vázolt rangcsökkentő matrixalgoritmussal (M'MA) az alábbi l. matrixegyenletet:

$$\mathbf{A}_0\mathbf{x} \equiv \begin{bmatrix} 1 & -1 & 2 & 0 \\ 2 & -1 & 5 & 2 \\ 3 & -3 & 6 & 2 \\ 1 & -2 & 1 & -5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 8 \\ -0 \end{bmatrix} \equiv \mathbf{a}_0.$$

A megfelelő majoráns homogén l. hipermatrixegyenlet nyilván ez lesz:

$$\mathfrak{A}_0\mathfrak{x} \equiv [\mathbf{A},\ \mathbf{a}_0] \begin{bmatrix} \mathbf{x} \\ x_{m+1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \boxed{1} & -1 & 2 & 0 & \vdots & 1 \\ 2 & -1 & 5 & 2 & \vdots & 2 \\ 3 & -3 & 6 & 2 & \vdots & 7 \\ 1 & -2 & 1 & -5 & \vdots & -5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \end{bmatrix} = \mathbf{0}\ \ (x_5 = -1).$$

Az algoritmus első lépése ($a_{11} = 1$):

$$\mathfrak{A}_1 = \mathfrak{A}_0 - \frac{1}{a_{11}}\mathbf{a}_1\mathfrak{a}^1 = \mathfrak{A}_0 - 1 \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 1 \end{bmatrix} [1\ \ -1\ \ 2\ \ 0\ \ 1] = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & \vdots & 0 \\ 0 & \boxed{1} & 1 & 2 & \vdots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & \vdots & 4 \\ 0 & -1 & -1 & -5 & \vdots & -6 \end{bmatrix}.$$

* L. bővebben *Bodewig* [67].

** E rekurzív helyettesítésre a másik eljárásnál nincs szükség, ami előnye annak.

Második lépés ($a'_{22} = 1$):

$$\mathfrak{A}_2 = \mathfrak{A}_1 - \frac{1}{a'_{22}}\mathfrak{a}'_2\mathfrak{a}'^2 = \mathfrak{A}_1 - 1\cdot\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix}[0 \quad 1 \quad 1 \quad 2 \quad 0] = \left[\begin{array}{cccc|c} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \boxed{2} & 4 \\ 0 & 0 & 0 & -3 & -6 \end{array}\right].$$

Harmadik lépés ($a''_{34} = 2$):

$$\mathfrak{A}_3 = \mathfrak{A}_2 - \frac{1}{a''_{34}}\mathfrak{a}''_3\mathfrak{a}''^3 = \mathfrak{A}_2 - \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 2 \\ -3 \end{bmatrix}[0 \quad 0 \quad 0 \quad 1 \mid 2] = \left[\begin{array}{cccc|c} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right] = \mathbf{0}.$$

A $\mathfrak{C}^*$ bázisfaktoros, redukált homogén egyenlet tehát így alakul:

$$\mathfrak{C}^*\mathfrak{x} \equiv \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & -1 & 2 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 4 \end{array}\right]\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \end{bmatrix} \equiv \begin{bmatrix} x^1 - x^2 + 2x^3 \qquad + x_5 \\ x^2 + x^3 + 2x_4 \\ 2x_4 + 4x \end{bmatrix} \equiv \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \equiv \mathbf{0}.$$

Általános megoldása:

$$\left.\begin{aligned} x_4 &= && -2x_5 \\ x_2 &= \quad -x_3 - 2x_4 &&= -x_3 + 4x \\ x_1 &= x_2 - 2x_3 - x_5 &&= -3x_3 + 3x_5 \end{aligned}\right\}.$$

Az inhomogén egyenletrendszer általános megoldása, mint a homogén $x_5 = -1$ feltételes partikuláris megoldása végül ez lesz:

$$\left.\begin{aligned} x_4 &= 2 \\ x_2 &= -4 - x_3 \\ x_1 &= -3 - 3x_3 \end{aligned}\right\}.$$

6. Pl. Oldjuk meg a rangcsökkentő matrixalgoritmussal (M'MA) az alábbi homogén l. matrixegyenletet:

$$\mathbf{A}_0\mathbf{x} \equiv \begin{bmatrix} 3 & 2 & -1 & 7 & 3 \\ 1 & 0 & -1 & 2 & 3 \\ -1 & 2 & 3 & -3 & -5 \\ 0 & -2 & -2 & 0 & 4 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \end{bmatrix} = \mathbf{0}.$$

Az algoritmus első lépése ($a_{21} = 1$):

$$\mathbf{A}_1 = \mathbf{A}_0 - \frac{1}{a_{21}}\mathbf{a}_1\mathbf{a}^2 = \mathbf{A}_0 - 1\cdot\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix}[1 \quad 0 \quad -1 \quad 2 \quad 3] = \begin{bmatrix} 0 & 2 & 2 & 1 & -6 \\ 0 & 0 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 2 & -1 & -2 \\ 0 & \boxed{-2} & -2 & 0 & 4 \end{bmatrix}.$$

Második lépés ($a'_{42} = -2$):

$$\mathbf{A}_2 = \mathbf{A}_1 - \frac{1}{a'_{42}}\mathbf{a}'_2\mathbf{a}'^4 = \mathbf{A}_1 + \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \\ 2 \\ -2 \end{bmatrix}[0 \quad -1 \quad -1 \quad 0 \quad 2] = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & \boxed{1} & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Harmadik lépés ($a''_{14} = 1$):

$$\mathbf{A}_3 = \mathbf{A}_2 - \frac{1}{a''_{14}}\mathbf{a}''_4\mathbf{a}''^1 = \mathbf{A}_2 - 1 \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix}[0 \quad 0 \quad 0 \quad 1 \quad -2] = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

A redukált homogén egyenlet:

$$\mathbf{C}^*\mathbf{x} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \end{bmatrix} \equiv \begin{bmatrix} x_1 - x_3 + 2x_4 + 3x_5 \\ x_2 + x_3 - 2x_5 \\ x_4 - 2x_5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \equiv \mathbf{0}.$$

Általános megoldása:

$$\left.\begin{aligned} x_4 &= 2x_5 \\ x_2 &= -x_3 + 2x_5 \\ x_1 &= +x_3 - 7x_5 \end{aligned}\right\}.$$

7. Pl. Igazoljuk valamelyik matrixalgoritmikus módszerrel az alábbi l. egyenletrendszerek adott megoldásainak helyességét.

A)
$$\left.\begin{aligned} x_1 - 2x_2 + 3x_3 \qquad\quad &= -5 \\ 2x_1 - x_2 - 4x_3 + x_4 &= 1 \\ 3x_1 - \quad - x_3 - 2x_4 &= 9 \\ 4x_1 + x_2 + 2x_3 + x_4 &= -7 \end{aligned}\right\}.$$

Megoldás: $x_1 = -\frac{2}{15}$, $x_2 = \frac{1}{3}$, $x_3 = -\frac{7}{5}$, $x_4 = -4$.

B)
$$\left.\begin{aligned} 8x_1 + 6x_2 + 5x_2 + 2x_4 &= 21 \\ 3x_1 + 3x_2 + 2x_3 + x_4 &= 10 \\ 4x_1 + 2x_2 + 3x_3 + x_4 &= 8 \\ 3x_1 + 5x_2 + x_3 + x_4 &= 15 \\ 7x_1 + 4x_2 + 5x_3 + 2x_4 &= 18 \end{aligned}\right\}.$$

Megoldás: $x_1 = 3$, $x_2 = 0$, $x_3 = -5$, $x_4 = 1$.

C)
$$\left.\begin{aligned} 3x_1 + 2x_2 + 2x_3 + 2x_4 &= 2 \\ 2x_1 + 3x_2 + 5x_3 + 5x_4 &= 3 \\ 9x_1 + x_2 + 4x_3 - 5x_4 &= 1 \\ 2x_1 + 2x_2 + 3x_3 + 4x_4 &= 5 \\ 7x_1 + x_2 + 6x_3 - x_4 &= 7 \end{aligned}\right\}.$$

Megoldás:
$$\begin{aligned} x_1 &= \frac{1}{7}(-6 + 8t_1), \\ x_2 &= \frac{1}{7}(\ 1 - 13t_1), \\ x_3 &= \frac{1}{7}(\ 15 - 6t_1), \\ x_4 &= t_1. \end{aligned}$$

D)
$$\left.\begin{aligned} 2x_1 - x_2 + x_3 + 2x_4 + 3x_5 &= 2 \\ 6x_1 - 3x_2 + 2x_3 + 4x_4 + 5x_5 &= 3 \\ 6x_1 - 3x_2 + 4x_3 + 8x_4 + 13x_5 &= 9 \\ 4x_1 - 2x_2 + x_3 + x_4 + 2x_5 &= 1 \end{aligned}\right\}.$$

Megoldás: $x_1 = t_1$, $x_4 = 0$, $x_2 = t_2$, $x_3 = -1 - 8t_1 + 4t_2$, $x_5 = 1 + 4t_1 - 2t_2$.

E)
$$\left.\begin{aligned} x_1 + x_2 + 3x_3 - 2x_4 + 3x_5 &= 1 \\ 2x_1 + 2x_2 + 4x_3 + x_4 + 3x_5 &= 2 \\ 3x_1 + 3x_2 + 5x_3 - 2x_4 + 3x_5 &= 1 \\ 2x_1 + 2x_2 + 8x_3 - 3x_4 + 9x_5 &= 2 \end{aligned}\right\}.$$

Megoldás: nincs.

F)
$$\left.\begin{aligned} 5x_1 - 3x_2 + 3x_3 + 4x_4 &= 4 \\ 4x_1 - 2x_2 + 3x_3 + 7x_4 &= 1 \\ 8x_1 - 6x_2 - x_3 + 5x_4 &= 9 \\ 7x_1 - 3x_2 + 7x_3 + 17x_4 &= \lambda \end{aligned}\right\}.$$

Megoldás: $\lambda \neq 0$ esetén nincs; $\lambda = 0$ esetén pedig

$$x_1 = \frac{1}{2}(-3 - 5t_1 - 13t_2),$$

$$x_2 = \frac{1}{2}(-7 - 7t_1 - 19t_2),$$

$$x_3 = t_1, \qquad x_4 = t_2.$$

2. §. LINEÁRIS PROGRAMOZÁS, MATRIXALGORITMIKUS MÓDSZEREKKEL (LP—MAM)

a) A matematikai programozás bevezetése

α) A matematikai programozás helye a modern üzemvezetésben

I°. Módszertani alapok. Az utolsó 1—2 évtizedben a nagyüzemi vezetésnek világszerte sajátos tudományos módszerei alakultak ki. E modern üzemvezetési módszerek már eddig is igen jelentős gazdasági eredményeket mutattak fel, noha alkalmazásuk csak most, napjainkban bontakozik szélesebbben. Ez az átütő siker azzal magyarázható, hogy a szóban forgó új módszerek erőteljes tudományos és műszaki alapon állnak, sőt ezek történetileg azonos időszakban jutottak a fejlődés magas fokára. Az üzemmérnöki szakirodalomban* *négy új tudományos műszaki vívmányt emelnek ki* a modern üzemvezetési módszerek alappillléreiként, nevezetesen

*az ún. operációkutatást, a lineáris algebrát,***

az elektronikus számítógépeket és az információelméletet.

Elsősorban ezeknek köszönhető, hogy — a tömegesen ismétlődő műveletekkel dolgozó és gyakorlatilag folyamatosnak tekinthető (termelői, közlekedési stb.) üzemekben — a vezetés, irányítás nagymértékben automatizálható. Szóljunk most róluk (főleg az első kettőről) külön-külön, a *matematikai programozás**** *helyének kijelölése* céljából, utalva a probléma irodalmára.*

II°. Operációkutatás. Ez a modern, tudományos nagyüzemi vezetés egyik alappillére, másként elvi alapja (angolul: operations research). Feladatának tekinti az üzemi tényezők, mozzanatok, valamint az üzemi eredmények *kapcsolatának* megállapítását.□ E kapcsolatok többnyire *stochasztikusak* (mint véletlen tömegjelenségek kapcsolatai), s ennek megfelelően paraméterei —az üzem műszaki és gazdasági (tapasztalatainak) karakterisztikáinak figyelembevételével — főleg matematikai statisztikai eszközökkel (regresszió-, korrelációszámítás, reprezentatív mintavétel stb.) kerülnek a kívánt pontossággal megállapításra. E kapcsolatok együttese határozza meg az üzemi folyamat ún. elméleti vagy *matematikai modelljét*. Az ilyen modell — a bonyolult valóságos folyamathoz képest — mindig

* L. *Kádas* [14].

** Újabban más matematikai diszciplínák is alkalmazásra kerülnek.

*** A továbbiakban így **rövidítve:** mat. prs.

□ Az operációkutatás kialakulását és helyzetét, a nagyüzemi igazgatásban betöltött szerepét, ismertebb meghatározásait, továbbá problémáit és modelljeit l. bővebben pl. a szerző [77] munkájában.

több-kevesebb egyszerűsítéssel, közelítéssel, egyes mozzanatainak figyelmen kívül hagyásával, ún. absztrakcióval készül, elsősorban azért, hogy a modellre alapozott optimumfeladat megoldása számítástechnikailag kivihető legyen. Az operációkutatási tevékenységet különféle szakemberek (pl. matematikusok, mérnökök, közgazdászok) munkacsoportos (team) együttműködése jellemzi.

III°. L i n e á r i s a l g e b ra. Ez a tudományos üzemvezetés második fontos alappillére. A modern szakirodalomban az *n*-dimenziós vektoralgebrát, a matrixalgebrát, a lineáris egyenletrendszerek és transzformációk elméletét, a determinánselméletet, a tenzoralgebrát és rendszerint a kvadratikus alakok algebráját szokták a l. algebrába sorolni.* E matematikai diszciplinák (főleg az első három) főképpen olyankor kerülnek alkalmazásra (üzemgazdasági vizsgálatokban, midőn — bizonyos érvényességi tartományban — *lineáris matematikai modellel* sikerül megközelíteni a valóságos, üzemi folyamatot. Ilyen esetekben az üzemi hozam, termelés, valamint az üzemi, ún. akcióparaméterek között l. kapcsolat áll fenn, amely l. hozamfüggvény és l. feltételi egyenletek (ill. egyenlőtlenségek) alakjában jelenik meg. A teendő ilyenkor az ún. l. program elkészítése, röviden a *lineáris programozás,* vagyis az akcióparaméterek olyan kombinációinak, ún. optimális programoknak a megállapítása, amelyeknél a legkedvezőbb üzemi eredmény adódik. A l. prs-i feladatok elméleti vizsgálata és numerikus megoldása során a l. algebra jól kidolgozott általános (pl. vektor- és matrixalgebrai) és különleges (pl. ún. szimplex-, disztribúciós) módszerei állnak rendelkezésünkre s ezek nagyszámú feladattípus (pl. termelési, szállítási, telepítési, ágazatkapcsolati stb. feladatok) elméleti-numerikus letárgyalására bizonyulnak megfelelőnek, sőt célszerűnek. E körülmények érthetővé teszik a l. prs-nak mint *a legegyszerűbb matematikai programozási módszernek* széleskörű elterjedését, mondhatni, divatba jöttét. Ugyanakkor fennáll a l. prs mechanikus alkalmazásának veszélye is; ezért hangsúlyozottan ellenőrizni kell általában a modell valósághűségét, különösen pedig esetleges linearitását.

Az üzemi folyamat modellje és így a reá támaszkodó programozás is bizonyos esetekben *nemlineáris,* pl. kvadratikus, hiperbolikus vagy még általánosabb jellegű. Tudományos üzemvezetésről ilyenkor is lehet szó, de sokkal bonyolultabb és részben még fejlődésben levő algebrai-analitikus apparátus igénybevételével.

IV°. E l e k t r o n i k u s s z á m í t ó g é p e k. I n f o r m á c i ó e l m é l e t. Ezek szintén jelentékeny alappillérei a modern nagyüzemi vezetésnek. A legkedvezőbb akcióparaméter-kombinációk, röviden az optimumfeltételek numerikus meghatározása — az üzemi változók számának növelésével — egyre bonyolultabbá, áttekinthetetlenebbé, ellenőrizhetetlenebbé, hosszadalmasabbá válik a

* Könyvünk e l. algebrai apparátus jelentős részét áttekinti, sőt itt-ott bővebben is kifejti; más részeit l. pl. a sorozat A. IX., B. I—II—III. köteteiben.

hagyományos mechanikus és elektromos számológépek alkalmazása mellett. Ezzel szemben a korszerű üzemvitel sürgősen és megbízhatóan igényli az optimumfeltételeket, mert nem követni, hanem irányítani törekszik az üzemi jelenségeket. Ezért alkalmaznak a nagyüzemek mindinkább elektronikus számítógépeket, amelyek a hagyományosnál *mintegy ezerszer nagyobb számítási sebességgel* és gyakorlatilag szinte hibamentesen dolgoznak.* Így lehetővé válik az ún. *operatív üzemvezetés*, vagyis az idejében érkező optimumfeltételeknek, a megfelelő döntéseknek, utasításoknak, a folyamat irányításának, vezérlésének és lebonyolódása ellenőrzésének sorozata.

Korszerű nagyüzemben mindennek nem egyszer vagy alkalmilag, hanem rendszeresen, ismétlődő folyamatosságban, az időbeli változásokat nyomon követve és nem utolsósorban *automatikusan* kell végbemennie. Ehhez az információelmélet szolgáltatja a tudományos alátámasztást.** Így válik lehetővé, hogy az üzem az időben változó adottságokhoz folyamatosan igazodó optimumfeltételek, ún. *dinamikus programok* alapján végezze az irányítás, végrehajtás, ellenőrzés bonyolult teendőit. Említésre méltó egyébként, hogy az optimum kritériumait az üzem gazdasági—társadalmi célkitűzései határozzák meg, s így ezek a fennálló társadalmi rendszertől is függnek.

β) A matematikai programozás fejlődése

I°. Kezdeti eredmények. Gazdasági rendszerek matematikai vizsgálatára már századunkat megelőzően is történtek kísérletek. Példaként megemlíthetjük *Quesnayt*, aki *gazdasági tablójában* a nemzeti jövedelem eloszlását vizsgálta lineáris eszközökkel, továbbá *Marxot*, aki a *Tőkeben* megadta a *zavartalan újratermelésnek* (ezen belül az állandó tőkének és növekményének, a változó tőkének és az értéktöbbletnek) feltételi egyenleteit A múlt század 70-es éveiben a francia *Walras* az egész *gazdasági mechanizmust* próbálta kvantitatíve jellemezni sokismeretlenes lineáris egyenletrendszerrel, egyensúlyi feltételek (állandó kereslet, kínálat és termelési tényezők) mellett.

Nyomában többen alkalmaztak lineáris modelleket gazdasági rendszerek vizsgálatára. *Leontyev* századunk 20-as éveiben a *Szovjetunió népgazdasági merlegével* kapcsolatban végzett nagyszabású statisztikai analízist. Később Amerikában folytatta munkáját és „input-output" módszerével *az amerikai gazdaság szerkezetet* vizsgálta, kutatva pl. a makroökonómiai összefüggéseket, a termelési együtthatók változását. Eredményei még ma is érdekesek, noha pl. az alapul vett *Walras*-féle egyensúlyelmélet miatt hiányosságai is vannak.

Általánosabb alakban jelentkezett hazánkfia, *Neumann János gazdasági egyensúlymodellje* 1937-ben, lényegében a lineáris programozás keretei között. Még messzebb menő általánosítást és beláthatatlan lehetőségeket tárt fel *Neumann „A játékelmélet és a gazdasági magatartás"* c., 1947-ben *Morgenstern*nel együtt írt híres munkájában.

Nagy előrelépést hozott a szovjet *L. V. Kantorovics* munkássága. *„A termelés szervezésének és tervezésének matematikai módszerei"* c., 1939-ben kelt nevezetes művében az általa

* Az elektronikus számítógépekről l. bővebben a szerző [94] munkáját.
** Erről is l. a [94]-at.

javasolt *megoldó együtthatók módszerét* alkalmazta a különféle termelés- és elosztástervezési feladatok optimális megoldására, sőt optimális szállítástervezésre is. Ez utóbbi problémát *„A tömegek szállításáról"* c., 1942-ben kelt angol nyelvű értekezésében taglalta bővebben. A ma is aktív *Kantorovics volt az első, aki felismerte a lineáris programozás ipari és közlekedési alkalmazásának óriási gazdasági jelentőségét.* Sajnálatos, hogy *Kantorovics* és más szovjet kutatók, pl. *A. N. Tolsztüj* eredményei — az előző időszak egyes hibás közgazdasági nézetei miatt — akkor még nem érvényesülhettek kellő súllyal a szovjet népgazdaságban és tudományban.

Ugyanezen időszakban Amerikában ugrásszerűen fejlődött a lineáris programozás és ipari alkalmazásának ügye. *F. L. Hitchcock* 1941-ben megformulázta a szállítási problémát, *„Termékek elosztása néhány készletből számos helységbe"* c. cikkében. Tőle függetlenül *T. C. Koopmans* is taglalta a szállítási problémát, 1947-ben írt *„Szállítási rendszer optimális kihasználása"* c. dolgozatában.

A lineáris programozás gyakorlati alkalmazásainak próbaköve a *második világháború* lett, amikor is az amerikai és az angol hadvezetés nagyvolumenű *hadi termelési, elosztási; légi, vízi, szárazföldi szállítási; bombázási stb. feladatok gazdaságos tervezésére* használta fel, hatalmas megtakarításokat érve el ezúton. Megjegyzendő, hogy e programozási módszerek — éppen katonai vonatkozásuk miatt — akkoriban nem váltak közismertté.

II°. Fejlődés a második világháború után. A II. világháború után Amerikában — a hadászati alkalmazások sikerei láttán — még szélesebb polgári (és folytatólag hadászati) területen bontakozott ki a *lineáris programozás* alkalmazása, s vele együtt az elméleti — módszertani igények teljesítése. *G. B. Dantzig* 1947—1948-ban dolgozta ki az ún. *szimplex módszert*, amely az eltelt másfél évtized alatt a lineáris programozás legszélesebb körben alkalmazható és viszonylag jól gépesíthető módszerének bizonyult s mint ilyen, általánosan elterjedt. Az eljárás részletkérdéseit, valamint a szállítástervezésnél használható egyszerűsített *változatát* 1951-ben közölte *Dantzig*. A szimplex módszer elméleti, geometriai vonatkozásaival, módszertani, szimbolikai fejlesztésével, gépesítésének javításával, valamint — az első olajipari alkalmazását (1951) követőleg — *a termelési és elosztási alkalmazások* legkülönbözőbb variánsaival azóta is állandóan foglalkoznak a szerzők a különféle nemzetiségű szaklapokban, ill. az 50-es években egymás után jelentkező kézikönyvekben. Megállapítható, hogy a matematikai programozás eszméje a legtöbb országba *Dantzig* szimplex-módszerével az élén hatolt be. Egyébként *Dantzig* napjainkban is tevékenyen dolgozik a lineáris és nem lineáris programozás területén.

Az 50-es években szélesen kibontakozott lineáris programozási szakirodalomnak, gazdag problematikájának, változatos metódusainak, száztéle szimbolikájának részletes ismertetése, méltatása meghaladja e bevezető áttekintés kereteit, csupán *néhány kiemelésre* kívánunk szorítkozni. Ezen időszakban (1957) jelent meg az irodalomban a magyar *König* és *Egerváry* vizsgálataira támaszkodó s az amerikai *H. W. Kuhn* (1955) által bevezetett *„magyar módszer"*, amely azóta az ún. hozzárendelési (assignment) és a szállítási probléma megoldásának világszerte használt módszere lett.

Fontos kiemelni, hogy a lineáris programozás — a linearitásból folyó viszonylagos egyszerűsége és korlátai* ellenére — az *üzemgazdasági feladatok egész sokaságának megoldására alkalmas.* Így számítható pl. termelés tervezése maximális hozamra, termelési értékre, minimális ráfordításra; üzemanyag, takarmány gazdaságos keverése; összetett megrendelés, személyzet, üres teherkocsik optimális elosztása; raktárak, üzemek, gépek gazdaságos terü-

---

* L. erről a γ) II°-ot.

leti elhelyezése; géppark, áruellátás, energiatermelés, anyagfelhasználás optimális programozása; lemezanyagok darabolása minimális hulladékkal; gazdaságos létszám- és termelésütemezés; ágazati kapcsolatok optimális tervezése; szállítástervezés ismert adagok, igények és költségmutatók mellett; repülőgépek gazdaságos elosztása légi útvonalakra; gazdaságos termelés alternatív géphasználat, anyagválasztás esetén; vetéstervezés maximális termelésre adott terményarányok mellett stb. (E feladatok jó részével találkozni fogunk a későbbiekben.)

Az 50-es évek végétől kezdve szép számban megjelent *lineáris programozási kézikönyvek* közül emeljük ki a szovjet *L. V. Kantorovics* (1957), a magyar *Krekó—Bacskay* (1957), az amerikai *S. I. Gass* (1958), a német *Krelle—Künzi* (1958), a magyar származású amerikai *S. Vajda* (1958) és *A. Vázsonyi* (1958), *Jándy* (1960, szállítástervezés), a szovjet *V. Sz. Nyemcsinov* (1959) és *Jugyin—Goldstein* (1962), a francia *A. Kaufmann* (1959), a magyar *Krekó* (1962), a csehszlovák *B. Korda* (1962) művét (l. ezeket bővebben az irodalomjegyzékben [1—13]). A mellékelt megjelenési évszámok önmagukban is mutatják, hogy a lineáris programozás nemzetközi elterjedése egészen frissen, az utolsó 6—8 évben következett be. Egyúttal azt is jelzik, hogy a Szovjetunió és a szocialista országok szakkörei — az említett helytelen nézetek elültével — ismét a fejlődés sodrába kerültek.

Ugyancsak az 50-es évek vége felé vett lendületet a szakirodalomban a *diszkrét lineáris és a nem lineáris programozási problémák vizsgálata*, különös tekintettel az integer (egész számú) lineáris, a kvadratikus, a konvex programozás problematikájára, módszereire. Ez a periódus még napjainkban is javában tart, s még távol vagyunk az összes lényeges problémák tisztázásától. Megjegyzendő, hogy a lineáris programozáséhoz képest jócskán megnövekedett matematikai apparátus és méginkább a cikkek sokféle szimbolikája, vegyes színvonala eléggé megnehezíti a szakirodalom tanulmányozását.

A matematikai programozás eme újabb ágai is *sokoldalú üzemgazdasági alkalmazást* találnak. Ilyenek az *integer programozásnál* pl. termelésprogramozás oszthatatlan termékek vagy (és) termelési tényezők esetén; az ún. hozzárendelési (assignment) probléma; az irodaház (buro house) probléma; a körutazási (travelling salesman) probléma; a *kvadratikus programozásnál* pl. optimális közlekedési, elektromos stb. áramlás adott hálózaton, különböző extremálási szempontokkal; hozam maximálása lineáris termelési függvények és lineárisan változó határköltségek esetén; kvadratikus szállítási probléma; az ún. aktatáska-probléma stb.; a hiperbolikus programozás és általában a nem lineáris (konvex) programozás egyes konkrét gazdasági vonatkozásai stb.

Az integer programozás *neves szerzői* közül megemlítendő *Markovitz—Mann, R. E. Gomory, G. B. Dantzig, H. W. Kuhn, W. Krelle;* idézett munkáik (l. az irodalomjegyzékben [22—30]) az 1956—61 időszakban jelentek meg. A kvadratikus programozás irodalmából *Barankin—Dorfman, Markovitz, P. Wolfe* cikkeit (l. az irodalomjegyzékben [15—21]) emeljük ki, szintén az 1956 utáni évekből.

A nem lineáris, főleg konvex programozásról — *Kuhn—Tucker* úttörő vizsgálatai (1951) és mások, pl. *E. M. L. Beale* (1955) eredményei nyomán (l. az irodalomjegyzékben [19, 20]) — ugyancsak az utóbbi években láttak napvilágot az első összefoglaló művek, pl. *Arrow—Hurwicz—Uzavwa* [9] (1958), *Krelle—Künzi* (1963), a szerző e könyve (1964) stb. E megjelenési adatok meggyőzően bizonyítják, hogy a matematikai programozás — minden túlzás nélkül — *napjaink problémája.**

Az eddigiekben csak ok-okozatilag meghatározott, biztos adatokat és eredményeket felmutató, ún. *determinisztikus programozásról* esett szó. Ezzel szemben mind jobban elő-

* A nemlineáris, a dinamikus és a stochasztikus programozásról l. a szerző [78] munkáját.

térbe nyomul az ún. *stochasztikus programozás*, amelynél a tevékenységek és az erőforrások s így az optimális programok is valószínű (várható) értékekkel vannak jellemezve. A matematikai programozás ilyen stochasztizálásához vezet a vizsgált problémák ún. kevert stratégiás játékelméleti felfogása is.

Eddigi észrevételeink az egyszeri döntést, vagy többszöri, de időben változatlan döntéseket igénylő *statikus programozásra* vonatkoztak, mégpedig determinisztikus és stochasztikus változataikra egyaránt. Ugyanezek azonban előfordulnak, sőt egyre jobban tért hódítanak *dinamikus programozás* formájában is, amelyeknél több fokozatú és az időben változó döntésekről van szó.

A stochasztikus és a dinamikus programozás rendszerint bővebb *matematikai apparátussal* dolgozik, mint a közönséges (determinisztikus es statikus) matematikai programozás (lineáris algebra és analízis); pl. felhasználja a valószínűségszámítást, a funkcionálanalízist, a stochasztikus folyamatok elméletét, a Monte Carlo-módszereket, a variációszámítást stb. (Az ilyen programozásokkal e könyvben egyelőre nem foglalkozunk.)

III°. Fejlődés a szocialista államokban. A Szovjetunióban napjainkban már töretlen a fejlődés e szakterületen. Ezt elősegítik az *SZKP XXI. Kongresszusának* olyan pozitív megállapításai, mint pl. hogy *a gazdaságtudománynak egzakt tudománnyá kell válnia (Nyeszmejanov)*. Az elemző módszereket alkalmazó gazdaságtudománynak meg kell teremtenie a szükséges *tudományos alapokat a tervezesi és közgazdasági számításokhoz* — írja *Nyemcsinov**. Ugyancsak messzemenő elvi megállapítást tesz a gazdasági problémák matematikai elemző módszereiről (*Leonytyev* vizsgálataival kapcsolatban, de nyilván a nyugati eredmények többségére érvényesen) a lengyel *O. Lange*, mondván, hogy bár e módszereket első ízben kapitalista gazdaságra alkalmazták, mégis *túlmutatnak a kapitalizmus történelmi korlátain* és teljesen csupán a szocialista tervgazdaság viszonyai között fejleszthetők ki.

A szocialista országokban — monográfiák, cikkek, intézeti kiadványok, bel- és külföldi előadások, nemzetközi kollokvium rendezése és látogatása, szocialista együttműködés stb. formájában — *lendületesen fejlődik a matematikai programozás*. Tárgyilag a külföldi eredmények feldolgozása, ellenőrzése, javítása, sokirányú alkalmazása, az általános módszerek további simítása, célszerűsítése, kiszélesítése, különféle problémák megoldására alkalmas speciális módszerek kidolgozása, új problémák felvetése és vizsgálata, régiek újfajta megközelítése, a különféle eljárások gépesíthetőségének javítása, a népgazdasági igények állandó figyelemmel kísérése, a matematikai elemzés és a szocialista tervgazdaság egyre szorosabb kapcsolatának ideológiai alátámasztása stb. — ezek a szocialista államokban folyó kutató munka általános jellemzői.

Mellettük az egyes szocialista országok *sajátos jellemzői* is hasznosan érvényesülnek a matematikai programozásban. Hazánkban például szinte kötelező gyakorlattá vált a matematikai programozásban viszonylag nagy *matrixelméleti apparátus* használata (ennek előnyei már nemzetközi viszonylatban, pl. kollokviumokon is megmutatkoztak). Ez nem csupán *elegáns, modern szimbolikai* jelent (mint egyesek vélik), hanem *módszertani, számítástechnikai, elméleti előnyöket* is. Ezt könyvünk is igyekszik bizonyítani, pl. következetes matrixelméleti vizsgálataival, különféle rendeltetésű (hiper-) matrixalgoritmusaival, s ezek változatos számítástechnikai és műszaki-gazdasági alkalmazásaival.

---

* Könyve magyar nyelven is megjelent.

γ) **A lineáris programozás bevezetése (egyszerű termelési feladattal)**

I°. Műszaki szempontok. Az α)-ban — a korszerű nagyüzemvezetési módszerek tudományos és technikai alapjainak áttekintése során — kijelöltük a l. prs helyét a többi prs-i módszerek közt, elméleti alapját (l. algebra), fő jellegzetességét (linearitás), és sejteni engedtük gazdasági jelentőségét (optimális üzemeltetés). Az elmondottak — köztük a l. prs-ra vonatkozók is — értelemszerűen érvényesek a nemzetgazdaság valamennyi, korszerű nagyüzemi módszerekkel dolgozó ágára, pl. *a bányászatra, a nehéz- és könnyűiparra, az építőiparra, a közlekedésre, a mezőgazdaságra* stb. Szemünk előtt játszódik le a l. (és egyébfajta) prs előretörése e termelési ágakban.

Mindezekben az üzemvezetés teendőinek tekintélyes részét különböző szakú *mérnökök* látják el. Nyilvánvaló, hogy a mérnökök — soktényezős üzemi problémák eldöntésénél — mind kevésbé támaszkodhatnak a gyakorlati tapasztalatukon, mérnöki érzékükön nyugvó ösztönös becslésekre vagy durva kalkulációkra, hanem a modern, tudományos üzemvezetési módszereket kell elsajátítaniuk és alkalmazniuk, így pl. a l. prs-t is. Csakis ilyen irányító munkával tudják a nagyüzemek és végső soron a nemzetgazdaság *termelékenységét* lényegesen emelni. Nemzetgazdasági érdek is tehát, hogy minél jobban és gyorsabban kielégítést nyerjen a mérnökök ez irányú érdeklődése. Ilyen meggondolással került beiktatásra *sorozatunk* második kiadásába (mégpedig az A. IX. kötetbe) l. algebrai, (a C. IV kötetbe pedig) l. prs-i fejezet.

II°. Kétdimenziós termelési feladat. A l. prs bevezetése céljából olyan problémát választunk, amely egyrészt jól érzékelteti a l. prs mibenlétét, feladatát, másrészt közel áll a mérnök gondolatköréhez. Ez ún. l. termelési prs-i vagy röviden termelési probléma lesz, mégpedig *két gyártandó cikk (másként két változó) speciális esetére* szorítkozva. Az így nyert ún. kétdimenziós probléma ugyanis egyszerű analitikus geometriai, ill. gazdasági megfontolással lesz megoldható, s amellett az általános eset tanulmányozásához is hasznos útbaigazításokat fog szolgáltatni.

1. Pl. Tegyük fel, hogy egy üzem két különböző termék, *cikk* ($m = 2$) termeléséhez négy különböző gazdasági *erőforrást* (pl. alap-, nyersanyagot, energiafajtát, munkaerőt, termelési eszközt stb.; $n = 4$) használ fel. — Tegyük fel továbbá, hogy az A, B, C és D erőforrásból rendre 12, 8, 16, 12 egység, pl. kg áll rendelkezésre; ezek az erőforrások ún. *kapacitásai.* (A mértékegységek közömbösek a programozás szempontjából.) Erőforrásainkból az I. cikk egy darabjának előállításához rendre 2, 1, 4, 0, a II. cikknél pedig rendre 2, 2, 0, 4 kg szükséges; ezek a két cikk ún. *technikai koefficiensei.* — Tegyük fel végül, hogy a kalkuláció szerint az I. cikk darabonként 2, a II. pedig 3 Ft *fajlagos hozamot,* nyereséget jelent az üzem számára.

Kérdés ezek után, hogy *hány darabot gyártson* az üzem az I. és II. cikkből ($0 \leqq x_1, x_2 = ?$) *a maximális összes hozam biztosítása érdekében.*

A fenti és más hasonló prs-i feladat csak az alábbi *linearitási feltételek* teljesülése esetén tartoznak l. prs körébe:

α) bármely cikk valamely erőforrásszükséglete és

β) tiszta hozama e cikk termelésének homogén lineáris függvénye, vagyis az említett mennyiségek között egyenes arányosság áll fenn.

E megszorítások ellenére a l. prs széles körben alkalmazható, mert az említett feltételek számos prs-i problémánál teljesülnek — bizonyos határok között — kielégítő pontossággal.

III°. A feladat grafikus megoldása. A fentebbi termelési probléma és más, ugyancsak kétdimenziós l. prs-i feladatok elemi *analitikus geometriai ismeretekre támaszkodó grafikus módszerrel* is megoldhatók. Alkalmazzuk most ezt a módszert az előbbi és egy-két hasonló feladat megoldására! Ez annál hasznosabb lesz, mert a grafikus módszer a l. prs-ról számos olyan tényt bocsájt előre és tesz szemléletessé, amelyet később behatóan tárgyalunk és igazolunk.

*2. **Pl.*** Visszatérve az 1. példára, számadatainkat az alábbi áttekintő *táblázatba* foglalhatjuk:

Termelés (db)		x_1	x_2
Összes, ill. fajlagos hozam (Ft)	$h = 2x_1 + 3x_2$	2	3
A	12	2	2
B	8	1	2
C	16	4	0
D	12	0	4
Erőforrások		Technikai koefficiensek	
jelölése	kapacitása kg	I. cikk	II. cikk
		kg/db	

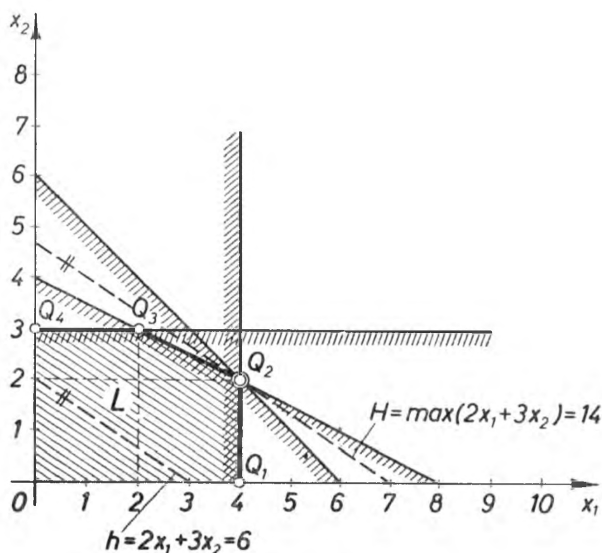
Az I. cikkből x_1, a II.-ból x_2 darab termelése esetén az egyes erőforrásokra és az összes hozamra az alábbi *egyenlőtlenségek,* ill. *maximumfeladat* írhatók fel, az

imént említett linearitási feltételek kihasználásával:

$$\left.\begin{aligned} 2x_1 + 2x_2 &\leqq 12 \\ 1x_1 + 2x_2 &\leqq 8 \\ 4x_1 + 0x_2 &\leqq 16 \\ 0x_1 + 4x_2 &\leqq 12 \end{aligned}\right\}$$

$$H = \max h = \max (2x_1 + 3x_2) = ? \qquad (x_1 \geqq 0, \quad x_2 \geqq 0).$$

A fentebbi négy egyenlőtlenség azt fejezi ki, hogy egy-egy erőforrásból a két cikk együttes szükséglete kisebb vagy ugyanannyi, mint az illető erőforrás kapacitása.



1. ábra

Rátérve a grafikus megoldásra (*1. ábra*), a négy egyenlőtlenség valamelyike az x_1, x_2 sík $x_1 \geqq 0$, $x_2 \geqq 0$ negyedének egy háromszögét, ill. sávját, együttese pedig e háromszögek, ill. sávok közös részét képező *konvex poligont* (L) határozza meg (csúcspontjait jelöljük Q_1, Q_2, Q_3, Q_4 módon). Az L síkrész (x_1, x_2) pontjai szolgáltatják a *lehetséges programokat.* E pontok közül nyilván azok szemléltetik pl. a $h \geqq 6$ összes hozamú programokat, amelyek a $6 = 2x_1 + 3x_2$ szintvonalon és felette helyezkednek el, közülük az *optimális programokat* pedig azok, amelyek a legmagasabb összes hozamú $H = \max h = \max (2x_1 + 3x_2)$ szintvonalon fekszenek. Az ilyen pontok nyilván csak az L konvex poligon csúcspontjai és határpontjai közül kerülhetnek ki. Esetünkben *csak egy* ilyen pont van, még pedig a $Q_2(4,2)$ csúcspont, ahol $H = h(Q_2) = 2 \cdot 4 + 3 \cdot 2 = 14$ (Ft). Ellenőrzés:

$h(Q_1) = 8$, $h(Q_3) = 13$, $h(Q_4) = 9$ Ft. Az (egyetlen) *optimális program* tehát ez lesz:

$$x_1 = 4 \text{ db}, \quad x_2 = 2 \text{ db}, \quad H = \max h = 14 \text{ Ft}.$$

Egyébként optimális programunknál az erőforrások *kapacitáskihasználása* így alakul:

$$\begin{aligned} A&: \ (2\cdot 4 + 2\cdot 2) : 12 = 1 = 100\% \\ B&: \ (1\cdot 4 + 2\cdot 2) : 8 = 1 = 100\% \\ C&: \ (4\cdot 4 + 0\cdot 2) : 16 = 1 = 100\% \\ D&: \ (0\cdot 4 + 4\cdot 2) : 12 = 0{,}67 = 67\% \end{aligned}$$

3. Pl. Oldjuk meg grafikusan az előbbihez hasonló jellegű, nevezetesen a

$$\left.\begin{aligned} 2x_1 + x_2 &\leqq 50 \\ 2x_1 + 3x_2 &\leqq 80 \\ 3x_1 &\leqq 60 \\ 2x_2 &\leqq 40 \end{aligned}\right\}$$

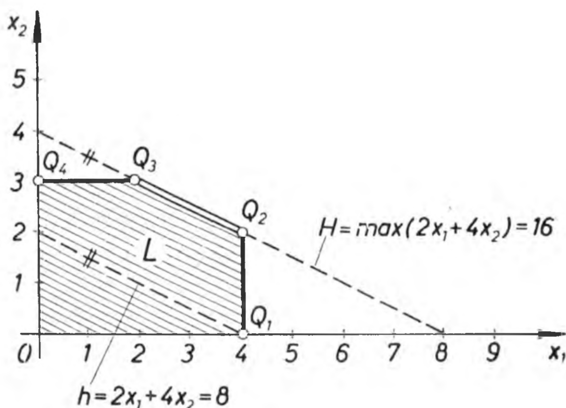
egyenlőtlenségekkel korlátozott

$$h = x_1 + x_2 = \text{Max!}$$

maximumfeladatot! — [*Megoldás:* $x_1 = 17{,}5$; $x_2 = 15$; $H = \max h = 32{,}5$.]

4. Pl. Módosítsuk az 1—2. példa adatait oly módon, hogy a II. cikk fajlagos hozama (3 helyett) 4 legyen; minden egyéb adat legyen változatlan.

A lehetséges programokat (megoldásokat) ábrázoló L konvex poligon nyilván változatlan marad (*2. ábra*), csupán a $h(x_1, x_2)$ szintvonalsereg módosul [$h = 2x_1 + 3x_2$-ről] $h = 2x_1 + 4x_2$-re. E szintvonalak azonban most párhuzamosak az L konvex poligon $x_1 + 2x_2 = 8$, azaz $2x_1 + 4x_2 = 16$ egyenletű Q_2Q_3



2. ábra

határvonalszakaszával, következésképpen *a Q_2Q_3 vonalszakasz minden egyes pontja optimális programot képvisel,* ugyanazon $H = \max h = 16$ (Ft) összes hozammal. Ilyen esetben más szempontok alapján választjuk ki a végtelen sok optimális program közül a megfelelőt.

Megjegyzendő, hogy *a l. prs-nak* — az 1—4. példában vizsgált ún. termelési probléma mellett — *sok más műszaki-gazdasági alkalmazása van.* Később, a *c)* és *d)* pontban adunk ezekből némi ízelítőt.

δ) A szimplex módszer bevezetése (egyszerű termelési feladattal)

I°. Eredeti (normál-) feladat (rendes esete). A *β)*-ban néhány egyszerű termelési feladattal megvilágítottuk a l. prs lényegét, sőt *analitikus geometriai alapon* nyugvó *grafikus módszerrel* meg is oldottuk e feladatokat. Most megformulázzuk említett feladataink közös algebrai alakját, majd megkíséreljük azt csupán *gazdasági megfontolásokkal* megoldani, s ez úton az ún. *szimplex módszert* s velejáróit, az ún. szimplex táblázatokat bevezetni. Ugyanerre később tisztán *algebrai megfontolásokkal* is kísérletet teszünk. E munkánk során kitűnik majd, hogy milyen jellegűek a felvetődő matematikai feladatok, és hogy milyen matematikai fegyverzetet célszerű felvonultatni azok általános és korszerű tárgyalására.

Megfigyelhető, hogy a *β)*-beli, $m = 2$ cikkel és $n = 4$ erőforrással kapcsolatos termelési feladatok — célszerű betűzéssel és indexeléssel* — az alábbi közös, ún. *eredeti alakban* formulázhatók meg:

$$x_1 \geqq 0, \quad x_2 \geqq 0; \tag{1a}$$

$$\left.\begin{aligned} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 &\leqq a_{10} \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 &\leqq a_{20} \\ a_{31}x_1 + a_{32}x_2 &\leqq a_{30} \\ a_{41}x_1 + a_{42}x_2 &\leqq a_{40} \end{aligned}\right\}; \tag{1b}$$

$$(0 \leqq)\ h = -a_{01}x_1 - a_{02}x_2\ (+a_{00}) = \text{Max!}\ (= H); \tag{1c}$$

itt (a *β)*-beli 2. példával való összevetés értelmében) x_1, x_2 rendre az I., II. cikkből *termelt mennyiséget;* a_{10}, a_{20}, a_{30}, a_{40} rendre az *A, B, C, D erőforrás kapacitását,* az a_{ij} *technikai koefficiens* az i-edik erőforrásból a j-edik cikk egységének gyártásához szükséges mennyiséget ($i = 1, 2, 3, 4$; $j = 1,2$); $-a_{01}$, $-a_{02}$ (> 0) rendre az I., II. cikk egységének *(fajlagos) hozamát,* végül h a teljes termelési program *összes hozamát* jelenti ($a_{00} = 0$).

Vizsgálatainkkal egyelőre a l. prs. ún. *normálfeladatára* s annak is csak az ún. *rendes esetére* szorítkozunk, amelynél $a_{i0} > 0$. (Az eddigi számpéldáink is mind ilyenek voltak.)

* L. pl. *Gomory—Baumol* [22] cikkét.

Az (1*b, c*) formulák mind l-ak, a l. prs-nál mindig teljesülendő *linearitási feltételeknek* (az erőforrások és a termelés, valamint a termelés és az összes hozam arányosságának) megfelelően; az (1*a*) formulák a termelt cikkek mennyiségének nyilvánvalóan nem-negatív voltát juttatják kifejezésre. Az (1*a, b*) követelménynek elegettevő (x_1, x_2) számpárokat *lehetséges megoldásoknak (programoknak)*, közülük az (1*c*) *cél-(v. tárgy-)függvényt* maximáló (x_1, x_2) számpárokat pedig *optimális megoldásoknak (programoknak)* nevezzük.

Az (1*a*-*c*) alakú feladatokat a *β)* III°-ban *grafikus módszerrel* oldottuk meg, kihasználva e feladatok kétváltozós (x_1, x_2), tehát x_1, x_2 koordinátasíkon szemléltethető jellegét. Nevezetesen, megállapíthattuk az (1*a*) síknegyedben az (1*b*) egyenlőtlenségnek megfelelő (háromszög vagy sáv alakú) ponthalmazok közös részét, vagyis éppen a lehetséges megoldások (konvex poligon alakú) halmazát, majd megkerestük ennek a $-a_{01}x_1 - a_{02}x_2 = h$ hozam-szintvonalsereg legmagasabb (max $h = H$) skalárú hozam-szintvonalára eső csúcs-, ill. határpontjait.

Sajnos, e szemléletes módszer kettőnél több változós feladat esetén közvetlenül nem használható. Közvetve azonban lehet róla szó; pl. a japán *Uzawa-féle eljárás** lényege éppen többváltozós feladatok kétváltozósra való redukálása.

II°. Bővített feladat. Induló szimplex táblázat. *1'.* Az előbb (1*a*-*c*) alatt termelési feladatunk közös *eredeti alakját* formuláztuk meg. Most, a szimplex módszer bevezetésére készülődvén — vele kapcsolatos módszertani és számítástechnikai előnyök kedvéért — írjuk át az (1*a*-*c*)-t más, célszerűbb alakra. Nevezetesen, az x_1, x_2 eredeti, ún. *primál* változók mellé vezessünk be olyan u_1, u_2, u_3, u_4 járulékos, ún. *duál* változókat, amelyek az (1*b*) egyenlőtlenségeket egyenlőségekké teszik. Velük — némi átrendezés után — termelési feladatunk alábbi, ún. *bővített alakjára* jutunk:

$$x_1 \geqq 0, \quad x_2 \geqq 0; \quad u_1 \geqq 0, \quad u_2 \geqq 0, \quad u_3 \geqq 0, \quad u_4 \geqq 0; \tag{2a}$$

$$\left.\begin{aligned} u_0 &= a_{00} + a_{01}(-x_1) + a_{02}(-x_2) = \text{Max!} \\ u_1 &= a_{10} + a_{11}(-x_1) + a_{12}(-x_2) \\ u_2 &= a_{20} + a_{21}(-x_1) + a_{22}(-x_2) \\ u_3 &= a_{30} + a_{31}(-x_1) + a_{32}(-x_2) \\ u_4 &= a_{40} + a_{41}(-x_1) + a_{42}(-x_2) \end{aligned}\right\} \tag{2b, c}$$

Itt az u_1, u_2, u_3, u_4 duál változók — a primál változók és az állandók korábbi jelentése mellett — nyilván rendre az *A, B, C, D* erőforrás $a_{10}, a_{20}, a_{30}, a_{40}$ *kapacitásának fel nem használt részét, tartalékát* jelentik. Ez gazdasági szempontból nem érdektelen, mert a kapacitáskihasználás közvetlen ellenőrzését teszi lehetővé. Ugyanitt u_0 nyilván a termelési program összes hozamát vagy értékét, más fogalmazásban a *cél- (tárgy-) függvény értékét* jelenti.

* L. *Arrow—Hurwicz—Uzawa* [9].

2'. A (2b, c) egyenletrendszer alapján legújabban a következő elrendezésű *induló szimplex táblázatot** írják fel:

S_0	1	$-x_1$	$-x_2$
u_0	a_{00}	a_{01}	a_{02}
u_1	a_{10}	a_{11}	a_{12}
u_2	a_{20}	a_{21}	a_{22}
u_3	a_{30}	a_{31}	a_{32}
u_4	a_{40}	a_{41}	a_{42}

(3)

Korábbi megjegyzések értelmében itt $a_{00} = 0$, továbbá $a_{01} < 0$, $a_{02} < 0$ (lévén $-a_{01} > 0$, $-a_{02} > 0$). Induló táblázatunkat egyébként így *értelmezzük:*

az induló termelési program: $x_1 = 0$, $x_2 = 0$;
az induló tartalékolási program: $u_1 = a_{10}, \ldots, u_4 = a_{40}$; (4)
az induló program értéke: $u_0 = a_{00} = 0$.

Egyelőre feltesszük, hogy $a_{i0} > 0$ ($i = 1, 2, 3, 4$), vagyis *normálfeladat rendes esetéről* beszélünk.

3'. Megjegyzendő, hogy a (2b, c) alapján *más szerkezetű induló szimplex táblázatokat is használnak* a l. prs irodalomban. Természetesen, e különböző induló táblázatok között — éppen a (2b, c) mint közös alap miatt — nincs lényeges eltérés, legfeljebb elrendezési, előjelzési (és természetesen betűzési és indexelési) eltérések lehetségesek. Pl. a *Krekó* [2] által használt táblázat — a mi jelölésünkkel (5a), majd az övével (5b) — így alakul:

(5a)

S_0	$-x_1$	$-x_2$	1
u_1	a_{11}	a_{12}	a_{10}
u_2	a_{21}	a_{22}	a_{20}
u_3	a_{31}	a_{32}	a_{30}
u_4	a_{41}	a_{42}	a_{40}
$-u_0$	$-a_{01}$	$-a_{02}$	$-a_{00}$

(5b)

S_0	x_1	x_2	
u_1	a_{11}	a_{12}	a_{10}
u_2	a_{21}	a_{22}	a_{20}
u_3	a_{31}	a_{32}	a_{30}
u_4	a_{41}	a_{42}	a_{40}
	c_1	c_2	$-z$

A (3) és az (5a) táblázat között mindössze annyi az eltérés, hogy a (3) első oszlopa ⟨1⟩ és sora ⟨u_0⟩ az utolsó helyre kerül, mégpedig az utóbbi ⟨u_0⟩ ellenkező

* Ez az *A. W. Tucker*-féle elrendezés, amelyet újabban mind több szerző alkalmaz.

előjellel $\langle -u_0 \rangle$; az (5*a*) és az (5*b*) táblázat között csak jelentéktelen felirati ($-x_1$, $-x_2$) helyett (x_1, x_2) és betűzési ($-a_{01}$, $-a_{02} > 0$ helyett c_1, $c_2 > 0$, a_{00} helyett z) különbségek vannak. Ennek tisztázásával a továbbiakban bármikor *áttérhetünk* egyik táblázatról a másikra.

4'. A magunk részéről egyelőre *a (3) alakú táblázatot fogjuk használni,* mert *α)* a betűzési és indexelési rendszer ésszerű kiterjesztése, *β)* az indexelés és az elrendezés összhangja, *γ)* az $u_0 = a_{00}$ programérték előjelhelyes szerepeltetése, *δ)* az u_i változók és numerikus értékük szomszédos elhelyezése stb. mind az elvi tárgyalásban, mind a számolási munkában némi *előnyöket* biztosít. Később a szimplex táblázatokat teljesen mellőzni fogjuk (ti. szimplex matrixokkal helyettesítjük majd).

5. ***Pl.*** Adva van az alábbi I. termelés prs-i feladat:

$$x_1 \geqq 0, \quad x_2 \geqq 0; \quad \left.\begin{aligned} 2x_1 + 2x_2 &\leqq 12 \\ x_1 + 2x_2 &\leqq 8 \\ 4x_1 \qquad &\leqq 16 \\ 4x_2 &\leqq 12 \end{aligned}\right\}; \quad 2x_1 + 3x_2 = \text{Max!}$$

Állítsuk össze és értelmezzük a feladat induló szimplex táblázatát! — Minthogy feladatunk az eredeti (1*a*-*c*) alakban van megadva, írjuk át először a duál változókkal *bővített* (2*a*-*c*) alakra:

$$x_1 \geqq 0, \quad x_2 \geqq 0; \quad u_1 \geqq 0, \quad u_2 \geqq 0, \quad u_3 \geqq 0, \quad u_4 \geqq 0;$$

$$\begin{aligned} u_0 &= 0 - 2(-x_1) - 3(-x_2) = \text{Max!} \\ u_1 &= 12 + 2(-x_1) + 2(-x_2) \\ u_2 &= 7 + 1(-x_1) + 2(-x_2) \\ u_3 &= 16 + 4(-x_1) + 0(-x_3) \\ u_4 &= 12 + 0(-x_1) + 4(-x_2) \end{aligned}$$

Ennek alapján az alábbi (3) alakú S_0 *induló szimplex táblázat* írható fel:

S_0	1	$-x_1$	$-x_2$
u_0	0	-2	-3
u_1	12	2	2
u_2	8	1	2
u_3	16	4	0
u_4	12	0	4

Maga az *induló* (termelési-tartalékolási) *program és értéke* (összes hozama) így alakul:

$$x_1 = x_2 = 0; \quad u_1 = 12, \quad u_2 = 8, \quad u_3 = 16, \quad u_4 = 12; \quad u_0 = 0.$$

Az induló program tehát így *értelmezhető:* termelés nincs, az erőforrások teljes kapacitása tartalékban van, a program értéke zérus.

Gyakorlásul írjuk fel a l. prs-i feladatunkhoz tartozó (5*b*) alakú (tehát a *Krekó* által használt) induló szimplex táblázatokat is:

S_0	x_1	x_2	
u_1	2	2	12
u_2	1	2	8
u_3	4	0	16
u_4	0	4	12
	2	3	0

(Az induló program és értéke — természetesen — itt is az előbbi.)

III°. A javító szimplex táblázatok gazdasági felépítése. *1'.* Térjünk rá most — az (1*a*-*c*) eredeti, illetve (2*a*-*c*) módosított alakban megformulázott l. prs-i feladatunkkal kapcsolatban — a (3) induló szimplex táblázat, pontosabban a belőle kiolvasott (4) induló program javítására. (Mint láttuk, az induló programot a termelés és a hozam teljes hiánya, a kapacitások teljes tartalékolása jellemzi.)

A program (értékének) javítása első lépésben a következő gazdasági szempontok szerint történik:

α) bevonjuk a termelésbe az egyik pozitív, célszerűen *a magasabb fajlagos hozamú cikket;*

β) e cikket azon mennyiségben vesszük programba, amelyet az általa igényelt és reá nézve különböző keresztmetszetű (értsd: pozitív technikai koefficienséhez viszonyítva különböző kapacitású) erőforrások közül a legkisebb, ún. *szűk keresztmetszetű erőforrás, teljes kihasználás mellett,* megenged.

γ) kiszámítjuk, hogy e termelési program végrehajtása miként befolyásolja a tartalékolási programot, a fajlagos hozamot (ill. veszteséget), az összes hozamot és a termelési koefficienseket.

A *β)*-val kapcsolatban egyelőre feltételezzük, hogy csak *egyetlen* szűk keresztmetszetű erőforrás található; az ellenkező esetről, az ún. degenerációról (midőn több, egyenlően szűk keresztmetszetű erőforrás akad) később lesz szó.

2'. Legyen pl. ⟨miként a folytatandó előbbi számpéldában is így van⟩

$$-a_{01} < -a_{02} \quad (> 0), \tag{6a}$$

tehát *α)* szerint a II. cikket vonjuk be a termelésbe. Legyenek továbbá pl. ⟨miként a számpéldában is⟩ az igényelt erőforrásoknak e cikkre vonatkozó keresztmetszetei

$$(0 \leqq)\,\frac{a_{40}}{a_{42}} < \frac{a_{10}}{a_{12}},\ \frac{a_{20}}{a_{22}},\ \frac{a_{30}}{a_{32}} \quad (a_{i2} > 0)^{*} \tag{6b}$$

nagyságrendűek, bagyis a II. cikkre nézve a D erőforrás legyen a szűk keresztmetszetű. Megjegyzendő, hogy a termelésbe bevont (II.) cikknek a szűk keresztmetszetű erőforrásra (D) vonatkozó termelési koefficiensét ($a_{42} > 0$) *generáló* (vagy forduló) *elemnek* szokás nevezni.

Új termelési programunk és értéke esetünkben — a D erőforrás teljes kihasználása mellett —

$$x_1' = 0, \quad x_2' = \frac{a_{40}}{a_{42}} = \delta_0' \ \text{[db]}; \quad u_0' = a_{00}' = -a_{02}x_2' = -a_{02}\delta_0' \geqq u_0 = 0 \ \text{[Ft]},$$

új tartalékolási programunk pedig (7*a*, *b*)

$$u_1' = a_{10} - a_{12}\delta_0', \quad u_2' = a_{20} - a_{22}\delta_0', \quad u_3' = a_{30} - a_{32}\delta_0', \quad u_4' = 0 \ \text{[kg]}.$$

Ami *az új fajlagos hozamot, ill. a veszteséget* illeti, a II. cikk termelésébe teljes kapacitásával bevont D erőforrás egy kg-jának visszatartalékolása (más szóval a termelésből való felszabadítása) — a II. cikk termelésének $1/a_{42}$ darabbal való csökkenése útján — nyilván

$$-a_{02}' = \frac{a_{02}}{a_{42}} \quad (< 0) \quad \text{[Ft/kg]} \tag{7c}$$

(fajlagos) veszteséggel, az I. cikk egy darabjának megtermelése pedig — a D erőforrás a_{41} kg-jának visszatartalékolása kárán — (csupán)

$$-a_{01}' = -a_{01} + a_{41}a_{02}' = -\left(a_{01} - \frac{a_{41}}{a_{42}}a_{02}\right) = -(a_{01} - \delta_1' a_{02}) \leqq -a_{01} \quad \text{[Ft/db]} \tag{7d}$$

(fajlagos) hozammal (sőt esetleg veszteséggel) jár, a régi fajlagos hozamok változatlan értéke mellett ⟨példánkban $a_{41} = \delta_1' = 0$ miatt $a_{01}' = a_{01}$⟩. Az új fajlagos hozam, ill. veszteség — láthatóan — primál változónál egy db cikk megtermelésének, duál változónál egy kg erőforrás visszatartalékolásának pénzügyi következményét mutatja Ft-ban.

---

* Ha esetleg $a_{i2} = 0$ ($i \neq 4$) [példánkban $a_{32} = 0$], akkor a 2-es cikk termelésénél nincs szükség az i-edik erőforrásra, ha pedig netán $a_{i2} < 0$, akkor meg egyenesen keletkezik (pl. melléktermékként); az esetleges $a_{i2} \leqq 0$ körülmény tehát semmiképpen nem korlátozza a 2-es cikk termelését.

Végül ami *az új technikai koefficienseket* illeti, a D erőforrás egy kg-jának visszatartalékolása — a II. cikk termelésének $1/a_{42}$ darabbal való csökkentése után — a többi erőforrásnál is visszatartalékolást tesz lehetővé, nevezetesen

$$a'_{42} = \frac{1}{a_{42}} = \gamma' \text{ [db/kg]}; \quad a'_{12} = -\gamma' a_{12}, \quad a'_{22} = -\gamma' a_{22}, \quad a'_{32} = -\gamma' a_{32} \quad [\sim]. \tag{7e}$$

Továbbá az I. cikk egy darabjának megtermelése a D erőforrás a_{41} egységnek visszatartalékolását, ez pedig a II. cikk termelésének a_{41}/a_{42} darabbal való csökkentését igényli, s végül a többi erőforrásnál így felszabaduló anyag a tartalék csökkentett terhelését eredményezi (a régi technikai koefficiensek változatlan értéke mellett), mégpedig

$$a'_{41} = \frac{a_{41}}{a_{42}} = \delta'_1 \quad [\sim]; \quad a'_{11} = a_{11} - \delta'_1 a_{14}, \quad a'_{21} = a_{22} - \delta'_1 a_{24},$$

$$a'_{31} = a_{32} - \delta'_1 a_{34} \quad \text{[kg/db]}; \tag{7f}$$

⟨példánkban $a_{41} = \delta'_1 = 0$ miatt $a'_{i1} = a_{i1}$; $i = 1, 2, 3, 4$⟩. Az új technikai koefficiensek — láthatóan — egy db cikk termelésének, ill. egy kg erőforrás visszatartalékolásának a tartalékokra és a termelésre gyakorolt hatását mutatják.

3'. Az első javító program termelési és tartalékolási mutatóinak, értékének, az új fajlagos hozamnak, ill. veszteségnek, valamint az új technikai koefficiensnek birtokában most elkészíthetjük az első javító szimplex táblázatot. E táblázat szerkezetét — ésszerűen — az induló szimplex táblázatéval azonosnak választhatjuk (sőt erre a már fentebb bevezetett ⟨$a'_{00}, a'_{01}, \ldots, a'_{10}, \ldots$⟩ jelölésekkel is elköteleztük magunkat). Itt egyedül az új primál és duál változók elhelyezése (a táblázat fel- és oldaliratán), valamint az új technikai koefficiensek megfelelő elrendezése (a táblázat belsejében) igényel némi meggondolást. Nevezetesen, e vonatkozásokban *a szimplex táblázatok* azon (az induló táblázattal már megszabott) *szerekezeti alapelvéhez* kell igazodni, miszerint

α) a szóban forgó *programba bevont* termelési ($x'_\mu \neq 0$) és tartalékolási ($u'_\nu \neq 0$) változókat a programnak megfelelő szimplex táblázat oldaliratán,

β) a *programba be nem vont* változókat ($x'_\lambda = u'_\varkappa = 0$) pedig a szimplex táblázat feliratán,

γ) a $\Delta u'_\varkappa = 1$ visszatartalékolásnak a tartalékokra, ill. a termelésre gyakorolt $\underset{(\varkappa)}{\Delta u'_\nu}$, $\underset{(\varkappa)}{\Delta x'_\mu}$ hatását $a'_{\nu\varkappa}$, $a'_{\mu\varkappa}$ *technikai koefficiensként,* a $\Delta x'_\lambda = 1$ termelésbeiktatás hasonló $\underset{(\lambda)}{\Delta u'_\nu}$, $\underset{(\lambda)}{\Delta x'_\mu}$ hatását pedig $a'_{\nu\lambda}$, $a'_{\mu\lambda}$ technikai koefficiensként, az indexének megfelelő táblázati helyen kell szerepeltetni.

(Ezen alapelveket — hallgatólagosan — már az S_0 táblázatba bevezetett $u_1, \ldots, x_2, a_{11}, \ldots, a_{42}$ jelöléseknél is figyelembe vettük.) A teljesség kedvéért lerögzíthetjük még, hogy,

δ) a szóban forgó *program értéke* a hozzátartozó szimplex táblázat 00 indexű helyén (előjelhelyesen!), a *fajlagos hozamok, ill. veszteségek* a 01, 02, ... indexű helyeken (ellenkező előjellel!), végül *a programba vett tartalékok, ill. termelések mutatószámai* az 10, 20, ... helyeken szerpeltetendők.

(A programba nem vett tartalékok, ill. termelések 0 mutatószámai — tudvalevőleg — nem szerepelnek a táblázatban!)

Ezek után nincs semmi akadálya annak, hogy az *első javító szimplex táblázatot* a (7*a*-*f*) elemekből összeállítsuk:

S_1	$1'$	$-x_1'$	$-u_4'$
u_0'	$a_{00} - \delta_0' a_{02}$	$a_{01} - \delta_1' a_{02}$	$-\gamma' a_{02}$
u_1'	$a_{10} - \delta_0' a_{12}$	$a_{11} - \delta_1' a_{12}$	$-\gamma' a_{12}$
u_2'	$a_{20} - \delta_0' a_{22}$	$a_{21} - \delta_1' a_{22}$	$-\gamma' a_{22}$
u_3'	$a_{30} - \delta_0' a_{32}$	$a_{31} - \delta_1' a_{32}$	$-\gamma' a_{32}$
x_2'	δ_0'	δ_1'	γ'

(8)

$$\left(\gamma' = \frac{1}{a_{42}}, \quad \delta_0' = \frac{a_{40}}{a_{42}}, \quad \delta_1' = \frac{a_{41}}{a_{42}}\right)$$

A δ_0', δ_1', γ' hányadosokat — láthatóan — indokolt *oszlopfaktoroknak* nevezni.

Az S_1 táblázatban jól felismerhető *az* a_{ij}' *új elemek négy csoportja;* nevezetesen α) $a_{kl}' = \gamma$, β) $a_{il}' = -\gamma a_{il} (i \neq k)$, γ) $a_{kj}' = \delta_j (j \neq l)$ és δ) $a_{ij}' = a_{ij} - \delta_j a_{il} (i \neq k, j \neq l)$.

4'. *A második javító programban* már csak az I. cikk termelésbe vonásáról lehet szó, ha ez

$$-a_{01}' > 0 \tag{9a}$$

fajlagos hozammal jár. Tegyük fel, hogy e cikkre nézve a *B* erőforrás a szűk keresztmetszetű (mint példánkban is), azaz

$$(0 \leqq) \frac{a_{20}'}{a_{21}'} < \frac{a_{30}'}{a_{31}'}, \quad \frac{a_{10}'}{a_{11}'} \tag{9b}$$

(pl. $a'_{41} = 0$ esettel számolva ⟨mint példánkban is⟩.) *Generáló* (forduló) *elemük* tehát most $a'_{21} > 0$, az új *oszlopfaktorok* pedig

$$\delta''_0 = \frac{a'_{20}}{a'_{21}}, \quad \lambda'' = \frac{1}{a'_{21}}, \quad \delta''_2 = \frac{a'_{22}}{a'_{21}}. \tag{9c}$$

Ezek, valamint az S_1 szimplex táblázat értelemszerű alkalmazásával *az S_2 szimplex táblázatot* a következő alakban állíthatjuk össze:

S_2	$1''$	$-u''_2$	$-u''_4$
u''_0	$a'_{00} - \delta''_0 a'_{01}$	$-\gamma'' a'_{01}$	$a'_{02} - \delta''_2 a'_{01}$
u''_1	$a'_{10} - \delta''_0 a'_{11}$	$-\gamma'' a'_{11}$	$a'_{12} - \delta''_2 a'_{11}$
x''	δ''_0	γ''	δ''_2
u''	$a'_{30} - \delta''_0 a'_{31}$	$-\gamma'' a'_{31}$	$a'_{32} - \delta''_2 a'_{31}$
x''	$a'_{40} - \delta''_0 a'_{41}$	$-\gamma'' a'_{41}$	$a'_{42} - \delta''_2 a'_{41}$

(9d)

A második javító program és értéke ebből így olvasható ki:

$$x''_1 = \delta''_0, \quad x''_2 = a'_{40} - \delta''_0 a'_{41}; \quad u''_1 = a_{10} - \delta''_0 a'_{11}, \quad u''_2 = 0. \tag{10}$$
$$u''_3 = a'_{30} - \delta''_0 a'_{31}, \quad u''_4 = 0; \quad u''_0 = a'_{00} - \delta''_0 a_{01} \geqq u'_0.$$

5'. Előfordulhat ⟨példánkban is így lesz⟩, hogy *e program még nem optimális* (bár mindkét cikket bevontuk már a termelésbe), hanem *tovább javítható*, ha valamelyik termelésbe vont erőforrás, pl. a *D* visszatartalékolása haszonnal, mégpedig

$$-a_{02} > 0 \tag{11a}$$

fajlagos hozammal jár ⟨példánkban is így lesz⟩. Előfordulhat továbbá, hogy most két egyenlően szűk keresztmetszet adódik,
pl.

$$\frac{a''_{10}}{a''_{12}} = \frac{a''_{30}}{a''_{32}} < \frac{a''_{40}}{a''_{42}} \quad \text{(és pl. } a_{22} < 0\text{)}, \tag{11b}$$

vagyis a *degeneráció* esete lép fel ⟨példánkban is így lesz⟩.

Mivel ezt egyelőre még nem tanulmányoztuk, ezért célszerű mindkét generáló elemmel (a''_{12}, a''_{32}) szerkeszteni egy-egy szimplex táblázatot (S_3, $\tilde{S}_3$). E *két program* egyébként *egyenlő értékű* lévén,

$$u''_0 = a''_{00} - \frac{a''_{10}}{a''_{12}} a''_{02} = a''_{00} - \frac{a''_{30}}{a''_{32}} a''_{02} = \tilde{u}'''_0. \tag{11c}$$

Amennyiben a fajlagos mutatók mindkét táblázatban pozitívok, azaz

$$a_{0j}''' > 0, \quad \tilde{a}_{0j}''' > 0 \quad (j = 1,2), \tag{11d}$$

vagyis a lehetséges visszatartalékolások csak veszteséggel eszközölhetők, akkor e két egyenlő értékű program már a keresett *optimális program* (példánkban is így lesz).

Befejezésül célszerű még az erőforrások kapacitáskihasználásának

$$\frac{\Delta u_i}{u_i} = \frac{u_i - u_i'''}{u_i} \ (\geqq 0) \quad (i = 1,\ 2,\ 3,\ 4) \tag{11e}$$

mutatószámait megállapítani.

6. Pl. Készítsük el az 5. példában megadott 1. termelés prs-i feladat *javító szimplex táblázatait*, az ugyanott már összeállított induló szimplex táblázat alapján. — A fentebbi részletes gazdasági megvilágítás, a reá támaszkodó (8) táblázat, valamint e számpéldára történt ⟨ ⟩-es utalások birtokában most már csak rövid megjegyzésekkel kísérjük a számítást. Esetünkben (l. az S_0 táblázatot)

$$-a_{01} = 2 < 3 = -a_{02} \ (> 0),$$

tehát — az α) szerint *az első javító programban* a II. cikket vonjuk be a termelésbe. E cikknek az egyes erőforrásokra vonatkozó keresztmetszetei

$$(0 <) \frac{a_{40}}{a_{42}} = \frac{12}{4} = 3 < \frac{a_{20}}{a_{22}} = \frac{8}{2} = 4 < \frac{a_{10}}{a_{12}} = \frac{12}{2} = 6$$

nagyságrendűek, vagyis a II. cikkre nézve a D erőforrás a szűk keresztmetszetű. Az első generáló (forduló) elem tehát $a_{42} = 4$. A (8) táblázat oszlopfaktorai most nyilván a következők lesznek:

$$\delta_0' = \frac{a_{40}}{a_{42}} = \frac{12}{4} = 3, \quad \delta_1' = \frac{a_{41}}{a_{42}} = \frac{0}{4} = 0, \quad \gamma' = \frac{1}{a_{42}} = \frac{1}{4}.$$

Egyszerű részletszámítások (szorzások, kivonások) elvégzése után a (8) S_1 *táblázat* így alakul:

S_1	$1'$	$-x_1'$	$-u_4'$
u_0'	9	-2	3/4
u_1'	6	2	$-1/2$
u_2'	2	1	$-1/2$
u_3'	16	4	0
x_2'	3	0	1/4

Az első javító program és értéke tehát így alakul:

$$x_1' = 0, \quad x_2' = 3; \quad u_1' = 6, \quad u_2' = 2, \quad u_3' = 16, \quad u_4' = -3/4; \quad u_0' = 9 > 0 = u_0.$$

A második javító programban már csak az I. cikket vonhatjuk be a termelésbe, mégpedig

$$-a_{01}' = +\,2\,(> 0)$$

fajlagos hozammal, (viszont a D erőforrás visszatartalékolása $-a_{02}' = -3/4 < 0$ fajlagos veszteséggel járna). Az I. cikkre nézve a B erőforrás a szűk keresztmetszetű, lévén

$$(0 <) = \frac{a_{20}'}{a_{21}'} = \frac{2}{1} = 2 < \frac{a_{10}'}{a_{11}'} = \frac{6}{2} = 3 < \frac{a_{30}'}{a_{31}'} = \frac{16}{4} = 4.$$

A második generáló (forduló) elem tehát esetünkben $a_{21}' = 1$, az új oszlopfaktorok pedig

$$\delta_0'' = \frac{a_{20}'}{a_{21}'} = \frac{2}{1} = 2, \quad \gamma'' = \frac{1}{a_{21}'} = \frac{1}{1} = 1, \quad \delta_2'' = \frac{a_{22}'}{a_{21}'} = \frac{1}{2}.$$

Ezek, valamint az S_1 táblázat felhasználásával a (10) S_2 *táblázat* így alakul:

S_2	$1''$	$-u_2''$	$-u_4''$
u_0''	13	2	$-1/4$
u_1''	2	-2	$1/2$
x_1''	2	1	$-1/2$
u_3''	8	-4	2
x_2''	3	0	$1/4$

A második javító program és értéke innen a következő:

$$x_1'' = 2, \quad x_2'' = 3; \quad u_1'' = 2, \quad u_2'' = 0, \quad u_3'' = 8, \quad u_4'' = 0; \quad u_0'' = 13 > 9 = u_0'.$$

Noha mindkét cikket bevontuk már a termelésbe, ez még nem az optimális program, hanem *tovább javítható,* nevezetesen a D erőforrás visszatartalékolása útján, mégpedig

$$-a_{02}'' = +\,1/4 \quad (> 0)$$

fajlagos hozammal. Erre nézve a keresztmetszetek

$$\frac{a_{10}''}{a_{12}''} = \frac{2}{1/2} = \frac{a_{30}''}{a_{32}''} = \frac{8}{2} = 4 < \frac{a_{40}''}{a_{42}''} = \frac{3}{1/4} = 12$$

nagyságrendűek, vagyis az A és a C erőforrás egyenlően szűk keresztmetszetű; a *degeneráció* esetével állunk tehát szemben. Erre vonatkozó ismeretek átmeneti hiányában, szerkesszük meg mindkét szűk keresztmetszetre nézve a harmadik javító szimplex táblázatot! Az $a_{12}'' = \frac{1}{2}$ generáló elemmel dolgozva, az oszlopfaktorok

$$\delta_0''' = 4, \quad \delta_1''' = -4, \quad \gamma''' = 2,$$

az $a_{12}'' = 2$-nél pedig

$$\tilde{\delta}_0''' = 4, \quad \tilde{\delta}_1''' = -2 \quad \tilde{\gamma}''' = \frac{1}{2}$$

értékűek. A megfelelő S_3 és $\tilde{S}_3$ *táblázat* tehát így alakul:

S_3	$1'''$	$-u_2'''$	$-u_1'''$
u_0'''	14	1	1/2
u_4'''	4	−4	2
x_1'''	4	−1	1
u_3'''	0	4	−4
x_2'''	2	−1	−1/2

$\tilde{S}_3$	$1'''$	$-u_2'''$	$-u_3'''$
u'''	14	3/2	1/8
u_1'''	0	−1	−1/4
x_1'''	4	0	1/4
u_4'''	4	−2	1/2
x_2'''	2	1/2	−1/8

Láthatóan *mindkét program optimális,* mert a lehetséges visszatartalékolások (a B, A, ill. a B, C erőforrásokból) csak

$$-a_{01}''' = -1 \ (< 0), \qquad -a_{02}''' = -1/2 \ (< 0), \qquad \text{ill.}$$

$$-a_{01}''' = -3/2 \ (< 0), \qquad -a_{02}''' = -1/8 \ (< 0)$$

fajlagos veszteséggel realizálhatók. Egyébként a *két program és értéke megegyezik,* nevezetesen

$$x_1''' = 4, \quad x_2''' = 2; \quad u_1''' = u_2''' = u_3''' = 0, \quad u_4''' = 4; \quad u_0''' = 14.$$

Az erőforrások kapacitáskihasználása az optimális programban nyilván

$$\frac{\Delta u_i}{u_i} = \frac{u_i - u_i'''}{u_i} = \frac{u_i - 0}{u_i} = 1 \ (i = 1, 2, 3), \text{ ill. } \frac{\Delta u_4}{u_4} = \frac{u_4 - u_4'''}{u_4} = \frac{12 - 4}{12} \approx 0{,}6$$

mértékű. Eredményeink — ellenőrizhetően — megegyeznek a β) III° pont 2. példájában (grafikus úton) nyert eredményekkel.

Végül jegyezzük meg, hogy esetünkben a degeneráció azért nem okozott nehézséget, mert az utolsó lépésben bukkant fel, s a generáló elem mindkét lehetséges

választása már az optimális programra vezetett; így azonos értékű programok ismétlődésére már nem került sor, megszüntetésével tehát nem kellett foglalkoznunk.*

IV°. A javító szimplex táblázatok algebrai felépítése. *1'.* A szimplex módszernek fentebbi, $m = 2$, $n = 4$ speciális esetre és gazdasági indokolásra szorítkozó bevezetése után adjuk elő most a módszert tetszőleges (természetes) *m és n szám általános esetére* vonatkozólag, mégpedig *algebrai indokolással,* ugyanakkor továbbra is a hagyományos *skaláris írás- és tárgyalásmódnál* maradva, de lehetőségeinek fokozott kihasználásával. E részben az olvasó már elemi apparátussal megértheti a szimplex eljárás lényegét, főbb meggondolásait, s e mellett hasznos módszertani előkészületet tehet általa könyvünk sajátos szimplex-matrixalgoritmusához (SMA).

Egyébként *szakirodalmunkban* egyelőre sem a most következő (skaláralgoritmikus), sem a később esedékes (matrixalgoritmikus) tárgyalás nem található meg másutt, noha számos továbbképző tanfolyamon a hazai mérnökök, közgazdászok, matematikusok százai sajátították el már, és alkalmazzák kedvező tapasztalatokkal. E tárgyalásmódok sok másnál *világosabbá teszik a szimplex eljárás lényegét,* ti. az alapegyenlet-rendszernek — lépésenként módosuló bázisváltozókra és zérusfeltételek mellett történő — partikuláris megoldássorozatát.

2'. A l. prs. maximumfeladata eredeti alakjában, rövidített írásmódon így hangzik:

$$x_j \geqq 0 \quad (j' = 1, 2, \ldots, m), \tag{12a}$$

$$-\sum_j a_{0j}x_j + a_{00} = \text{Max!} \quad (a_{00} = 0), \tag{12b}$$

$$\sum_j a_{ij}x_j \leqq a_{i0} \quad (i' = 1, 2, \ldots, n). \tag{12c}$$

Ugyanez, az u_0 célfüggvényértékkel és a (12*c*) baloldalait a jobboldalakra kiegyenlítő $u_i \geqq 0$ duál változókkal *bővített alakban* és a *Tucker*-féle elrendezésben, még rövidebb írásmódon eképpen alakul:

$$u_i \geqq 0, \quad x_j \geqq 0, \quad u_0 = \text{Max!} \tag{12a'}$$

$$u_i = \sum_j a_{ij}(-x_j) \quad (a_{00} = 0, \; -x_0 = 1), \tag{12b', c'}$$

$$(i = 0, 1, 2, \ldots, n; \quad j = 0, 1, 2, \ldots, m)$$

A (12*b'*, *c'*) egyesített formula a feladat ún. *alapegyenlet-rendszere.* A (12*a'*, *b'*, *c'*)-t kielégítő x_j, u_i programok ún. *optimálisak,* az $u_0 = \text{Max!}$ nélkül pedig ún. *lehetségesek.*

* A degenerációról l. a *b)* β) III°—IV° pontokat!

Itt csak a normálfeladat rendes esetének első (gyakorlati) alesetére szorítkozunk, ahol is

$$a_{i0} > 0 \quad \text{és akad} \quad -a_{0l} > 0, \quad a_{kl} > 0 \qquad (13a, b, c)$$

$$(i' = 1, 2, \ldots, n; \quad k, l \neq 0)$$

3'. A szimplex algoritmus indulása (SA_0). Az induló helyzetet *általánosan* a (12*b*', *c*')-vel elrendezésében is azonos és a bal oldali, ún. bázisváltozókra explicite megoldott

$$\underline{u_i = a_{i0} + \sum_j' a_{ij}(-x_j)} \quad (a_{00} = 0; \quad j' = 1, 2, \ldots, m) \qquad (14a)$$

induló alapegyenlet-rendszerrel (szimplexegyenlet-rendszerrel), ill. jobb oldali együtthatóit (változatlan elrendezésben) tartalmazó, alábbi S_0 *induló szimplex táblázattal* írjuk le:

S_0	1	$-x_1$	$-x_2$	.	$-x_j$	.	$-x_{l}$	.	$-x_m$
u_0	a_{00}	a_{01}	a_{02}	.	a_{0j}	.	a_{0l}	.	a_{0m}
u_1	a_{10}	a_{11}	a_{12}	.	a_{1j}	.	a_{1l}	.	a_{1m}
u_2	a_{20}	a_{21}	a_{22}	.	a_{2j}	.	a_{2l}	.	a_{2m}
.	.	.	.	. .		.	.	.	.
u_i	a_{i0}	a_{i1}	a_{i2}	.	a_{ij}	.	a_{il}	.	a_{im}
.	.	.	.	. .		.	.	.	.
u_k	a_{k0}	a_{k1}	a_{k2}	.	a_{kj}	.	a_{kl}	.	a_{km}
.	.	.	.	.	.	.	.	.	.
u_n	a_{n0}	a_{n1}	a_{n2}	.	a_{nj}	.	a_{nl}	.	a_{nm}

(14*b*)

Ez az S_0 táblázat természetes, értelemszerű általánosítása (tetszőleges *m*-re és *n*-re) a korábban megismert kisebb méretű ($m = 2, n = 4$) S_0 táblázatnak, s így semmi újat nem kell mondani róla.

Az indulóhelyzetet *különösen* a jobb oldali, ún. nembázis-változók eltűnésével, vagyis az

$$\underline{x_j = 0} \quad (j' = 1, 2, \ldots, m; \quad x_0 = -1 \neq 0) \qquad (15a)$$

nullfeltételekkel jellemezzük. ⟨Termelés-prs-ilag: még egyetlen cikkből sincs termelés.⟩ A (14*a*) alapegyenlet ezeknek eleget tevő *partikuláris megoldása* ez lesz:

$$u_i = a_{i0}, \quad \text{vagyis} \quad u_0 = a_{00} = 0, \quad u_{i'} = a_{0i'} > 0. \qquad (15b)$$

⟨Termelés-prs-ilag: a tartalékok megegyeznek az erőforrás-kapacitásokkal.⟩

E program nyilván „lehetséges". Megjegyzendő, hogy az alapegyenlet kezelésének itt kibontakozó *elvét** — kifejlesztve — az eljárás esedékes lépéseire is ki akarjuk terjeszteni.

4'. A szimplex algoritmus első lépése (SA_1).

α) Az új x_l' bázisváltozó (az l generáló oszlopindex) kiválasztása:

$$-a_{0l} = \max(-a_{0j}), \quad x_l' > 0, \quad x_j' = 0 \quad (j \neq l). \qquad (16a)$$

⟨Termelés-prs-ilag: egyetlen, célszerűen a legnagyobb fajlagos hozamú, l indexű cikk bevonása a termelésbe.⟩

Az új u_k' nembázis-változó (a k generáló sorindex) egyértelmű kiválasztása:

$$x_l' = \delta_0 \equiv \frac{a_{k0}}{a_{kl}} = \min\left(\frac{a_{i0}}{a_{il}^{(+)}}\right), \quad u_k' = a_{k0} - \delta_0 a_{kl} = 0, \qquad (16b)$$

feltéve, hogy nincs több ilyen minimális hányados.** ⟨Termelés-prs-ilag: a kiválasztott cikkhez szükséges erőforrások ($a_{il}^{(+)} > 0$) közül a reá nézve szűk keresztmetszetű, k indexű erőforrás kiválasztása és teljes felhasználása, feltéve, hogy nincs több ilyen szűk keresztmetszetű erőforrás.⟩

Az $u_k' \leftrightarrow x_l'$ bázisváltozó-csere lehetséges, mert e két változó l. függ egymástól, lévén (12*b'*, *c'*) alapegyenletrendszerben a $(-x_j)$-nek az explicit u_k-ra vonatkozó együtthatója, az ún. *generáló elem*

$$\underline{a_{kl} = 1/\gamma \neq 0} \quad (> 0). \qquad (16c)$$

β) Az alapegyenlet-rendszer (szimplexegyenlet-rendszer) *átrendezése,* az $u_k' \leftrightarrow x_l'$ csere végrehajtásával;

a k indexű egyenlet új (x_l'-re megoldott) alakja:

$$\underline{x_l' = \delta_0 + \sum_{j \neq l} \delta_j(-x_j') + \gamma(-u_k)} \quad (\gamma = 1/a_{kl}, \ \delta_j = a_{kj}\gamma), \qquad (17a)$$

a többi egyenlet új (x_l' helyett u_k'-t tartalmazó) alakja:

$$\underline{u_i} = a_{i0} + \sum_{j \neq l} a_{ij}(-x_j) + \qquad (i \neq k)$$

$$+ a_{il}(-\delta_0) - \sum_{j \neq l} \delta_j(-x_j) - \gamma(-u_k') = \qquad (17b)$$

$$\underline{= (a_{i0} - \delta_0 a_{il}) + \sum_{j \neq l} (a_{ij} - \delta_j a_{il})(-x_j) - \gamma(-u_k).}$$

* L. részletesen a *b)* α) II° helyen.

** Az ellenkező, ún. *elfajuló (degenerációs) esetről* l. a *β)* III°—IV° helyet.

γ) *Az új alapegyenlet-rendszer (jobb oldali) együtthatói* a régiekből — ellenőrizhetően — az alábbi *transzformációval* adódnak:

$$\boxed{a'_{ij} = a_{ij} - \gamma(a_{il} - \delta_{ik})(a_{kj} + \delta_{lj})} \qquad \left(\delta_{\alpha\beta} = \begin{cases} 0, & \text{ha} \quad \alpha \neq \beta; \\ 1, & \text{ha} \quad \alpha = \beta. \end{cases}\right) \tag{18}$$

δ) *Az új alapegyenlet-rendszer* részletes alakja — éppen az új bázisváltozókra *általánosan megoldva* — a következő:

$$\begin{aligned}
u_0 &= (a_{00} - \delta_0 a_{0l}) + \ldots + (a_{0j} - \delta_j a_{0l})(-x_j) + \ldots - \gamma a_{0l}(-u_k) + \ldots + (a_{0m} - \delta_m a_{0l})(-x_m) \\
u_1 &= (a_{10} - \delta_0 a_{1l}) + \ldots + (a_{1j} - \delta_j a_{1l})(-x_j) + \ldots - \gamma a_{1l}(-u_k) + \ldots + (a_{1m} - \delta_m a_{1l})(-x_m) \\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\
u_i &= (a_{i0} - \delta_0 a_{il}) + \ldots + (a_{ij} - \delta_j a_{il})(-x_j) + \ldots - \gamma a_{il}(-u_k) + \ldots + (a_{im} - \delta_m a_{il})(-x_m) \\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\
x'_l &= \delta_0 + \ldots + \delta_j(-x_j) + \ldots + \gamma(-u_k) + \ldots + \delta_m(-x_m) \\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\
u_n &= (a_{n0} - \delta_0 a_{nl}) + \ldots + (a_{nj} - \delta_j a_{nl})(-x_j) + \ldots - \gamma a_{nl}(-u_k) + \ldots + (a_{nm} - \delta_m a_{nl})(-x_m)
\end{aligned} \tag{19}$$

Ezen új alapegyenlet-rendszer jobb oldali (ún. nembázis-oldali) együtthatóit foglalhatjuk össze — változatlan elrendezésben — *az S_1 első szimplex táblázatba,* a következőképpen:

S_1	$1'$	$-x'_1$	$-x'_2$	.	$-x'_j$	.	$-u'_k$	.	$-x'_m$
u'_0	$a_{00} - \delta_0 a_{0l}$	$a_{00} - \delta_1 a_{0l}$	$a_{02} - \delta_2 a_{0l}$	.	$a_{0j} - \delta_j a_{0l}$	.	$-\gamma a_{0l}$	.	$a_{0m} - \delta_m a_{0l}$
u'_1	$a_{10} - \delta_0 a_{1l}$	$a_{11} - \delta_1 a_{1l}$	$a_{12} - \delta_2 a_{1l}$	.	$a_{1j} - \delta_j a_{1l}$	.	$-\gamma a_{2l}$	.	$a_{1m} - \delta_m a_{1l}$
u'_2	$a_{20} - \delta_0 a_{2l}$	$a_{21} - \delta_1 a_{2l}$	$a_{22} - \delta_2 a_{2l}$	.	$a_{2j} - \delta_j a_{2l}$	.	$-\gamma a_{2l}$	.	$a_{2m} - \delta_m a_{2l}$
.	.	.	.	.	.	.	.	.	.
u'_i	$a_{i0} - \delta_0 a_{il}$	$a_{i1} - \delta_1 a_{il}$	$a_{i2} - \delta_2 a_{il}$	.	$a_{ij} - \delta_j a_{il}$	.	$-\gamma a_{il}$	.	$a_{im} - \delta_m a_{il}$
.	.	.	.	.	.	.	.	.	.
x'_l	$\delta_0 = \frac{a_{k0}}{a_{kl}}$	$\delta_1 = \frac{a_{k1}}{a_{kl}}$	$\delta_2 = \frac{a_{k2}}{a_{kl}}$	.	$\delta_j = \frac{a_{kj}}{a_{kl}}$	.	$\gamma = \frac{1}{a_{kl}}$	.	$\delta_m = \frac{a_{km}}{a_{kl}}$
.	.	.	.	.	.	.	.	.	.
u'_n	$a_{n0} - \delta_0 a_{nl}$	$a_{n1} - \delta_1 a_{nl}$	$a_{n2} - \delta_2 a_{nl}$	.	$a_{nj} - \delta_j a_{nl}$	.	$-\gamma a_{nl}$	.	$a_{nm} - \delta_m a_{nl}$

Ez az S_1 táblázat természetes és értelemszerű *általánosítása* (tetszőleges m-re, n-re és $a_{kl} = 1/\gamma$-ra) a korábban megismert, kisebb méretű ($m = 2$, $n = 4$,

$a_{kl} \equiv a_{42}$) S_1 táblázatnak. Már ott is, de az itteni, általános S_1 táblázatban még világosabban felismerhető *az új együtthatók négy csoportja*. Nevezetesen,

α) az a_{kl} generáló elem helyére reciproka, $\gamma = 1/a_{kl}$ kerül;

β) a generáló (l indexű) oszlop többi $a_{il}(i \neq k)$ eleme helyére a $-\gamma a_{il}$ elem,

γ) a generáló (k indexű) sor többi $a_{kj}(j \neq l)$ eleme helyére a $\delta_j = a_{kj}/a_{kl} = a_{kj}\gamma$ ún. oszlopfaktor; végül

δ) az összes többi $a_{ij}(i \neq k, j \neq l)$ elem helyére az $a_{ij} - \delta_j a_{il}$ elem írandó. Látható, hogy az $a_{kl} = 1/\gamma = a_{kj}/\delta_j$ generáló elem* az egész S_1 táblázatra döntő befolyást gyakorol. Éppen ezért az a_{kl} megállapítása — a (13*a*, *b*, *c*) alapján — nagy körültekintéssel végzendő. Egyébként a (20) szimplex táblázat helyes értelmezéséhez éppen e fejtegetések — főleg a (17—19) formulák — szolgáltatják a kellő elméleti alátámasztást.

Jegyezzük meg végül, hogy könyvünkben — a szerzők zömétől eltérően — *alig fogjuk használni a szokásos szimplex táblázatokat*. Rövidesen bevezetendő matrixalgoritmikus módszerünk ugyanis, amely egyszerű matrixalgebrai úton s szinte mechanikusan szolgáltatja az egymást követő szimplex matrixokat, ill. az általánosan megoldott alapegyenleteket, módszertanilag és számítástechnikailag egyaránt teljesen feleslegessé teszi a szimplex táblázatokat.

ε) *Az új alapegyenlet-rendszer partikuláris megoldása* az új nembázis-változók eltűnése, mint *nullfeltételek mellett:*

$$x'_j = 0 \quad (j \neq l), \quad u'_k = 0; \tag{20a}$$

$$u'_0 = a_{00} - \delta_0 a_{0l} = a_{00} + \delta_0(-a_{0l}) > a_{00}(=0); \quad x'_l = \delta_0 > 0, \tag{20b, c}$$

$$u'_i = a_{i0} - \delta_0 a_{il} = \begin{cases} a_{i0} > 0, & \text{ha} \quad a_{il} = 0 \\ \left(\dfrac{a_{i0}}{a_{il}} - \delta_0\right) a_{il} > 0, & \text{ha} \quad a_{il} \neq 0 \end{cases} \quad (i \neq k). \tag{20d}$$

Az így nyert új program — láthatóan — *lehetséges és javított*, s nyilván *az S_1 szimplex táblázat* 0 *indexű oszlopából olvasható ki* [kivéve a (20*a*) nembázis-változók 0 értékét, melyet az S_1 nem tüntet fel].

5'. A szimplex algoritmus további lépései ($SA_2, \ldots, SA_{q+1}, \ldots, SA_p$) a most részletezettek ismételt *értelemszerű alkalmazásával* nyerhetők, s ezért *igen röviden* végezhetünk velük. Tételezzük fel, hogy mindvégig — mint eddig is — a normálfeladat rendes (és nem elfajuló!) esetének első (gyakorlati) alesetével állunk szemben.

* Egyes szerzők az a_{kl}-t *forduló elemnek* nevezik.

Második lépés (SA_2): $\alpha)$ $-a'_{0l_1} = \max(-a'_{0i})$, $\dfrac{a'_{k_1 0}}{a'_{k_1 l_1}} = \min\left(\dfrac{a'_{i0}}{a'^{(+)}_{il_1}}\right) \equiv$

$$\delta'_0 = x''_{l_1} > 0, \quad u''_{k_1} = 0; \quad a'_{k_1 l_1} = 1/\gamma_1 = a'_{k_1 j}/\delta'_j > 0; \tag{21a}$$

$\beta,\ \delta)$
$$v''_{k_1} \equiv x''_{l_1} = \delta'_0 + \sum_{j \neq l_1}' \delta'_j(-y''_j) + \gamma_1(-u''_{k_1}) \qquad (y''_{l_1} \equiv u''_{k_1}),$$

$$v''_i = (a'_{i0} - \delta'_0 a'_{il_1}) + \sum_{j \neq l_1}' (a'_{ij} - \delta'_j a'_{il})(-y''_j) - \gamma a_{il_1}(-u_{k_1}); \tag{21b, d}$$

$\gamma)$
$$a''_{ij} = a'_{ij} - \gamma_1(a'_{il_1} - \delta_{ik_1})(a'_{k_1 j} + \delta_{l_1 j}); \tag{21c}$$

$\varepsilon)$
$$x''_j = 0 \quad (j \neq l, l_1), \quad u''_{k_1} = 0; \quad x''_{l_1} = \delta'_0 > 0, \tag{21e}$$

$$x''_l = a'_{k0} - \delta'_0 a'_{kl_1} > 0,\ u''_0 = a''_{00} - \delta'_0 a'_{0l_1} > a'_{00},\ u''_i = a'_{i0} - \delta'_0 a'_{il_1} > 0 \quad (i \neq k, k_1).$$

Általános $(q+1)$*-edik lépés* (SA_{q+1}): $\alpha)$ $a^{(q)}_{k_q l_q} = 1/\gamma_q > 0;$ (22a)

$\beta,\ \delta)$
$$v^{(q+1)}_{k_q} \equiv x^{(+1)}_{l_q} = \delta^{(q)}_0 + \sum_{j \neq l_q}' \delta^{(q)}_j(-y^{(q+1)}_j) + \gamma_q(-u^{(q+1)}_{k_q}), \tag{22b, d}$$

$$v^{(q+1)}_i = (a^{(q)}_{i0} - \delta^{(q)}_0 a^{(q)}_{il_q}) + \sum_{j \neq l_q}' (a^{(q)}_{ij} - \delta^{(q)}_j a^{(q)}_{il_q})(-y^{(q+1)}_j) - \gamma_q a^{(q)}_{il_q}(-u^{(q+1)}_{k_q});$$

$\gamma)$
$$a^{(q+1)}_{ij} = a^{(q)}_{ij} - \gamma_q(a^{(q)}_{il_q} - \delta_{ik_q})(a^{(q)}_{k_q j} + \delta_{l_q j}); \tag{22c, e}$$

$\varepsilon)$ $x^{(q+1)}_{l_q} = \delta^{(q)}_0 > 0, \quad u^{(q+1)}_0 = a^{(q)}_{00} - \delta^{(q)}_0 a^{(q)}_{0l_q} > u^{(q)}_0, \quad u^{(q+1)}_i = a^{(q)}_{i0} - \delta^{(q)}_0 a^{(q)}_{il_q} > 0.$

Az algoritmus befejezését (SA_p) a

$$-a^{(p)}_{0j} \leqq 0, \quad \text{azaz} \quad a^{(p)}_{0j} \geqq 0 \tag{23a}$$

körülmény jelzi. ⟨Termelés-prs-ilag: már semmilyen programmódosítás nem járna haszonnal.⟩ A p-edik program már nemcsak lehetséges és javított, hanem *optimális* is, azaz

$$u_{0\,\mathrm{opt}} \equiv u^{(p)}_0, \quad v_{i\,\mathrm{opt}} \equiv v^{(p)}_i, \quad y_{j\,\mathrm{opt}} \equiv y^{(p)}_j = 0, \tag{23b}$$

sőt az *egyetlen* is, ha

$$-a^{(p)}_{0j} < 0, \quad \text{azaz} \quad a^{(p)}_{0j} > 0. \tag{23c}$$

Befejezésül felhívjuk a figyelmet a most ismertetett eljárásnak a *b)* $\alpha)$ I°—V°-ben tárgyalandó *matrixalgoritmikus* változatára és későbbi általánosításaira.

7. Pl. Oldjuk meg a fenti szimplex algoritmussal (SA), mégpedig szimplex táblázatok alkalmazásával az alábbi S_0 *induló szimplex táblázattal* megadott 1. prs-i feladatot*:

S_0	1	$-x_1$	$-x_2$	$-x_3$
u_0	0	-4	-5	-1
u_1	10	3	2	0
u_2	11	1	$\boxed{4}$	0
u_3	13	3	3	1

Láthatóan induláskor (SA_0) a normálfeladat rendes esetének gyakorlati alesetével állunk szemben. Az induló (lehetséges) program és értéke:

$$x_1 = x_2 = x_3 = 0; \quad u_1 = 10, \quad u_2 = 11, \quad u_3 = 13\ (> 0), \quad u_0 = 0.$$

Első lépés (SA_1): $-a_{02} = \max(-a_{0j}) = 5$,

$$\delta_0 \equiv \frac{a_{20}}{a_{22}} = \min\left(\frac{a_{i0}}{a_{i2}^{(+)}}\right) = \frac{11}{4}, \quad a_{22} = 1/\gamma = 4 > 0, \quad \delta_1 = \frac{1}{4}, \quad \delta_3 = 0.$$

S_1	$1'$	$-x_1'$	$-u_2'$	$-x_3'$
u_0'	$13\frac{3}{4}$	$-2\frac{3}{4}$	$1\frac{1}{4}$	-1
u_1'	$4\frac{1}{2}$	$\boxed{2\frac{1}{2}}$	$-\frac{1}{2}$	0
x_2'	$2\frac{3}{4}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{4}$	0
u_3'	$4\frac{3}{4}$	$2\frac{1}{4}$	$-\frac{3}{4}$	1

Az első (lehetséges és javított) program és értéke:

$$x_1' = u_2' = x_3' = 0; \quad u_1' = 4\frac{1}{2}, \quad x_2' = 2\frac{3}{4}, \quad u_3' = 4\frac{3}{4}(> 0); \quad u_0' = 13\frac{3}{4} > u_0.$$

* V. ö. a *b)* α)-beli 1—5. példával!

Második lépés (SA_2): $-a'_{0l} = \max(-a'_{0j}) = 2\frac{3}{4}$,

$$\delta'_0 \equiv \left(\frac{a_{01}}{a_{i1}^{(+)}}\right) = 1{,}8 \quad a'_{11} = 1/\gamma_1 = 2{,}5 > 0, \quad \delta'_3 = 0, \quad \delta'_2 = -0{,}2.$$

S_2	$1''$	$-u''_1$	$-u''_2$	$-x''_2$
u''_0	18,7	1,1	0,7	−1
x''_1	1,8	0,4	−0,2	0
x''_2	2,3	−0,1	0,3	0
u''_3	0,7	−0,9	−0,3	$\boxed{1}$

A második (szintén lehetséges és javított) program és értéke:

$$u''_1 = u''_2 = x''_2 = 0; \quad x''_1 = 1{,}8 \quad x''_2 = 2{,}3 \quad u''_3 = 0{,}7 \quad (> 0); \quad u''_0 = 18{,}7 > u'_0.$$

Harmadik lépés (SA_3): $a''_{33} = 1/\gamma_2 = 1 > 0$,

$$\delta''_0 = 1{,}8 \qquad \delta''_1 = -0{,}9 \qquad \delta''_2 = -0{,}3.$$

S_3	$1'''$	$-u'''_1$	$-u'''_2$	$-u'''_3$
u'''_0	19,4	0,2	0,4	1
x'''_1	1,8	0,4	−0,2	0
x'''_2	2,3	−0,1	0,3	0
x'''_3	0,7	−0,9	−0,3	1

Az eljárás befejezést nyert, mert a'''_{0j} : 0,2; 0,4; 1 (> 0). A harmadik (szintén lehetséges és javított) program tehát *optimális* is, s mint ilyen, *egyetlen*, nevezetesen:

$$x_{1\,\text{opt}} \equiv x'''_1 = 1{,}8; \quad x_{2\,\text{opt}} \equiv x'''_2 = 2{,}3; \quad x_{3\,\text{opt}} \equiv x'''_3 = 0{,}7 \quad (> 0);$$

$$u_{j\,\text{opt}} \equiv u'''_j = 0 \quad (j = 1, 2, 3); \qquad u_{0\,\text{opt}} = u'''_0 = 19{,}4.$$

b) Lineáris programozás, szimplex-matrixalgoritmussal (SMA)

α) A normálfeladat és megoldása hipermatrix-algoritmussal

I°. A rendes eset első alesete. *1'.* Miután az *a)* γ—δ)-ban egyszerű (kétváltozós) termelés-programozási példákon gazdasági és skalár algebrai szempontból megvilágítottuk a l. prs-t és a szimplex módszert, az 1. §.-ban pedig röviden összefoglaltuk korszerű matematikai (l. algebrai) segédeszközeit, most már rátérhetünk *általános matematikai tárgyalására,* majd fontos különleges kérdéseinek (pl. a degeneráció esetének) tisztázására. Kezdjük meg munkánkat a l. prs maximumfeladatának különféle alakokban és írásmódokon való általános megformulázásával.

Amint az *a)* γ—δ)-ban már láttuk, *a l. prs maximumfeladata eredeti alakjában és skaláris írásmódon* (célszerű betűzéssel, indexeléssel) így fogalmazható meg: Megoldandó az

$$x_1 \geqq 0,\ x_2 \geqq 0, \ldots, x_m \geqq 0 \qquad (1a')$$

nemnegatív változókra értelmezett és az

$$\left.\begin{matrix} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1m}x_m \leqq a_{10} \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2m}x_m \leqq a_{20} \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \ldots + a_{nm}x_m \leqq a_{n0} \end{matrix}\right\} \qquad (1b')$$

l. feltételi egyenlőtlenségrendszerrel korlátozott (és $a_{00} = 0$-val értendő)

$$u_0 = -a_{01}x_1 - a_{02}x_2 \ldots - a_{0m}x_m + a_{00} = \text{Max!} \qquad (1c')$$

(kötött) szélsőérték-feladat.

Ugyanez *matrixos írásmódon** is megadható, mégpedig — az

$$\mathbf{x}^* = [x_1, x_2, \ldots, x_m] \in E_m, \qquad \mathbf{a}_0 = [a_1, a_2, \ldots, a_{0m}] \in E_m,$$

$$\mathbf{a}_j^* = [a_{1j}, a_{2j}, \ldots, a_{nj}] \in E_n, \qquad \mathbf{a}_0^* = [a_{10}, a_{20}, \ldots, a_{n0}] \in E_n,$$

$$\mathbf{A} = [a_1, a_2, \ldots, a_m] = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \ldots a_{1m} \\ a_{21} & a_{22} \ldots a_{2m} \\ \ldots & \ldots \\ a_{n1} & a_{n2} \ldots a_{nm} \end{bmatrix}, \qquad \mathbf{0}^* = [0, 0, \ldots, 0] \in E_m$$

jelölésekkel élve — az ($a_{00} = 0$-val értendő)

$$\mathbf{x} \geqq \mathbf{0}, \qquad (1a)$$

$$\mathbf{Ax} \leqq \mathbf{a}_0 \qquad (1b)$$

$$u_0 = -\mathbf{a}^0\mathbf{x} + a_{00} = \text{Max!} \qquad (1c)$$

* *Krekónál* [2] $-\mathbf{a}^0 = [-a_{0j}]$ helyett $\mathbf{c}^* = [c_j]$ szerepel.

formulákkal. Tudvalevőleg, az $(1a, b)$ követelménynek megfelelő $\mathbf{x}$ vektorok az ún. *lehetséges megoldások* $L(\subset E_m)$ *halmazát*, a teljes $(1a, b, c)$ követelményhármasnak elegettevő $\mathbf{x}_{opt}$ vektorok pedig az *optimális megoldások* L_{opt} $(\subset L \subset E_m)$ *halmazát* képezik. (E halmazok vizsgálatát l. pl. *Krekó* [2] könyvében.)

2'. Amint korábban, az *a)* δ) II°-ben már említettük, az $(1a, b, c)$ feladatot át szoktuk írni egy másik, módszertanilag és számítástechnikailag előnyösebb, ún. *bővített alakra.* Nevezetesen, az $x_1, x_2, \ldots, x_m$ eredeti, elsődleges, ún. *primál változók* mellé bevezetünk olyan $u_1, u_2, \ldots, u_n$ járulékos, másodlagos, ún. *duál változókat,* amelyek az $(1b')$ egyenlőtlenségeket egyenlőségekké teszik, s így az $(1a', b', c')$ formulákat — némi átrendezés után — a *Tucker-féle elrendezés* néven ismert

$$x_1 \leqq 0,\ x_2 \geqq 0, \ldots, x_m \geqq 0;\ u_1 \geqq 0,\ u_2 \geqq 0, \ldots, u_n \geqq 0; \tag{2a'}$$

$$\left.\begin{array}{l} u_0 = a_{00} + a_{01}(-x_1) + a_{02}(-x_2) + \ldots + a_{0m}(-x_m) = \text{Max!} \\ u_1 = a_{10} + a_{11}(-x_1) + a_{12}(-x_2) + \ldots + a_{1m}(-x_m) \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ u_n = a_{n0} + a_{n1}(-x_1) + a_{n2}(-x_2) + \ldots + a_m(-x_m) \end{array}\right\} \tag{2b',c'}$$

alakra hozzák. Láttuk az *a)* δ) II°—III°-ban, hogy e duál változóknak jól definiálható gazdasági jelentőségük van.

A megfelelő *matrixos alak* — az újabb

$$\mathbf{u}^* = [u_1, u_2, \ldots, u_n] \in E_n$$

jelölés bevezetésével — az ($a_{00} = 0$-val értendő)

$$\mathbf{x} \geqq \mathbf{0}, \quad \mathbf{u} \geqq \mathbf{0}; \tag{2a}$$

$$\left.\begin{array}{l} u_0 = a_{00} + \mathbf{a}^0(-\mathbf{x}) = \text{Max!} \\ \mathbf{u}\ = \mathbf{a}_0\ + \mathbf{A}(-\mathbf{x}) \end{array}\right\} \tag{2b, c}$$

formulákban jelentkezik.

Végül a megfelelő *hipermatrixos alak*

$$\mathbf{x} \geqq \mathbf{0}, \quad \mathbf{u} \geqq \mathbf{0}, \quad u_0 = \text{Max!} \tag{3a, b}$$

$$\mathfrak{u} \equiv \begin{bmatrix} u_0 \\ \mathbf{u} \end{bmatrix} \equiv \begin{bmatrix} 1 & \mathbf{0}^* \\ \mathbf{0} & \mathbf{E} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_0 \\ \mathbf{u} \end{bmatrix} \equiv \mathfrak{E}\mathfrak{u} = \begin{bmatrix} a_{00} & \mathbf{a}^0 \\ \mathbf{a}_0 & \mathbf{A}_0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ -\mathbf{x} \end{bmatrix} \equiv \mathfrak{A}_0(-\mathfrak{x}) \equiv$$

$$\equiv \begin{bmatrix} a_{00} \\ \mathbf{a}_0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \mathbf{a}^0 \\ \mathbf{A}_0 \end{bmatrix} (-\mathbf{x}) \equiv \mathfrak{a}_0 + \mathfrak{A}_0'(-\mathbf{x})$$

lesz, ahol

$$\underset{(n)}{\mathbf{u}} = [u_i],\ \underset{(n\times n)}{\mathbf{E}} = [\delta_{ij}],\ \mathfrak{E} = [\mathfrak{e}^i] = [\mathfrak{e}_i],\ \mathfrak{A}_0 = [\mathfrak{a}^i] = [\mathfrak{a}_j]. \tag{3c}$$

Az utóbbit fogjuk használni az alábbiakban; előnye lesz, hogy szükségtelenné teszi a célfüggvény különálló vizsgálatát és alapjául szolgál hipermatrix-algoritmikus módszerünknek.

Egyébként tárgyalásunkban egyelőre az ún. *normálfeladat rendes esetére,* annak is csupán gyakorlatilag érdekes, *első alesetére* szorítkozunk, ahol ismeretesen

$$\mathbf{a}_0 > \mathbf{0} \quad \text{és található} \quad a_{0l} < 0,\ a_{kl} > 0. \qquad (4a\text{—}c)$$

3'. Említsük meg, hogy sűrűn előforduló *termelésprogramozási problémánál* j a cikkeket, i az erőforrásokat, x_j a termelési, u_i a tartalékolási változókat, a_{ij} a technikai koefficienseket, a_{i0} az erőforráskapacitásokat, $-a_{0j}$ a fajlagos hozamokat jelenti. A későbbiekben a lineáris programozás egyéb műszaki-gazdasági alkalmazásairól is megemlékezünk.

Végül még utalj unk a ($3a, b$) primál maximumfeladat

$$\mathbf{y} \geqq \mathbf{0}, \quad \mathbf{v} \geqq \mathbf{0}, \quad v_0 = \text{Min!} \qquad (5a)$$

$$\mathfrak{v}^* \equiv [v_0, \mathbf{v}^*] = [-1, \mathbf{y}^*]\begin{bmatrix} a_{00} & \mathbf{a}^0 \\ \mathbf{a}_0 & \mathbf{A}_0 \end{bmatrix} \equiv \mathfrak{y}^*\mathfrak{A}_0 \qquad (5b)$$

alakú *duál minimumfeladatára!*

1. Pl. Adva van a következő l. prs-i feladat:

$$x_1 \geqq 0,\ x_2 \geqq 0,\ x_3 \geqq 0;$$

$$\left.\begin{aligned} 3x_1 + 2x_2 \quad &\leqq 10 \\ x_1 + 4x_2 \quad &\leqq 11 \\ 3x_1 + 3x_2 + x_3 &\leqq 13 \\ 4x_1 + 5x_2 + x_3 &= \text{Max!} \end{aligned}\right\}.$$

Írjuk fel a (primál l. prs-i) feladatot bővített skaláris, majd matrixos alakban, továbbá a duál feladatot, az utóbbi alakban!

A *primál feladat* ($2a', b', c'$) szerinti *bővített skaláris alakja* esetünkben a következő:

$$x_1 \geqq 0,\ x_2 \geqq 0,\ x_3 \geqq 0;\ u_1 \geqq 0,\ u_2 \geqq 0,\ u_3 \geqq 0;$$

$$\left.\begin{aligned} u_0 &= \ \ 0 - 4(-x_1) - 5(-x_2) - 1(-x_3) = \text{Max!} \\ u_1 &= 10 + 3(-x_1) + 2(-x_2) \\ u_2 &= 11 + 1(-x_1) + 4(-x_2) \\ u_3 &= 13 + 3(-x_1) + 3(-x_2) + 1(-x_3) \end{aligned}\right\};$$

($2a, b, c$) szerinti *bővített matrixos alakja* ez:

$$\mathbf{x}^* = [x_1, x_2, x_3] \geqq \mathbf{0},^* \quad \mathbf{u}^* = [u_1, u_2, u_3] \geqq \mathbf{0}^*;$$

$$\left.\begin{aligned} u_0 &= a_{00} + \mathbf{a}^0(-\mathbf{x}) = 0 + [-4, -5, -1]\begin{bmatrix} -x_1 \\ -x_2 \\ -x_3 \end{bmatrix} = \text{Max!} \\ \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{bmatrix} &\equiv \mathbf{u} = \mathbf{a}_0 + \mathbf{A}_0(-\mathbf{x}) \equiv \begin{bmatrix} 10 \\ 11 \\ 13 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 3 & 2 & 0 \\ 1 & 4 & 0 \\ 3 & 3 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} -x_1 \\ -x_2 \\ -x_3 \end{bmatrix} \end{aligned}\right\};$$

a (3*a, b, c*) szerinti bővített *hipermatrixos alakja* pedig ez:

$$\mathbf{x}^* = [x_1, x_2, x_3] \geqq \mathbf{0}^*, \quad \mathbf{u}^* = [u_1, u_2, u_3] \geqq \mathbf{0}^*, \quad u_0 = \text{Max!};$$

$$\begin{bmatrix} u_0 \\ \hdashline u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{bmatrix} \equiv \begin{bmatrix} u_0 \\ \mathbf{u} \end{bmatrix} \equiv \mathfrak{u} = \mathfrak{A}_0(-\mathfrak{x}) \equiv \begin{bmatrix} a_{00} & \mathbf{a}^0 \\ \mathbf{a}_0 & \mathbf{A}_0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 \\ -\mathbf{x} \end{bmatrix} = \left[\begin{array}{c:ccc} 0 & -4 & -5 & -1 \\ \hdashline 10 & 3 & 2 & 0 \\ 11 & 1 & 4 & 0 \\ 13 & 3 & 3 & 1 \end{array}\right]\begin{bmatrix} 1 \\ \hdashline -x_1 \\ -x_2 \\ -x_3 \end{bmatrix} \equiv$$

$$\equiv \begin{bmatrix} 0 \\ \hdashline x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -4 & -5 & -1 \\ \hdashline 3 & 2 & 0 \\ 1 & 4 & 0 \\ 3 & 3 & 1 \end{bmatrix} \equiv \mathfrak{a}_0 + \mathfrak{A}_0'(-\mathbf{x}).$$

Itt a (4*a-c*) szerinti *normálfeladat rendes esetének első alesetével* állunk szemben, lévén

$$\left.\begin{aligned} \mathbf{a}_0^* = [10, 11, 13] > \mathbf{0}^*, \quad a_{0l} < 0, \quad a_{kl} > 0 \\ (l = 1, 2, 3) \quad (kl \neq 13, 23). \end{aligned}\right\}$$

A duál feladat (5*a, b*) szerinti *bővített matrixos alakja* most az alábbi:

$$\mathbf{v}^* \equiv [v_1, v_2, v_3] \geqq \mathbf{0}^*, \quad \mathbf{y}^* \equiv [y_1, y_2, y_3] \geqq \mathbf{0}^*;$$

$$\left.\begin{aligned} y_0 &= a_{00} + \mathbf{v}^*\mathbf{a} = 0 + [v_1, v_2, v_3]\begin{bmatrix} 10 \\ 11 \\ 13 \end{bmatrix} = \text{Min!} \\ \mathbf{y}^* &= -\mathbf{a}^0 + \mathbf{v}^*\mathbf{A} = [4, 5, 1] + [v_1, v_2, v_3]\begin{bmatrix} 3 & 2 & 0 \\ 1 & 4 & 0 \\ 3 & 3 & 1 \end{bmatrix}. \end{aligned}\right\}$$

II°. Az algoritmus indulása (SMA_0). *1'.* A (3*b*) formulát, mint *induló alapegyenletet (szimplexegyenletet)* — a (3*c*) jelölések felhasználásával — az

$$(\mathfrak{u} \equiv)\mathfrak{E}\mathfrak{u} \equiv u_0\mathfrak{e}_0 + u_1\mathfrak{e}_1 + \dots + u_i\mathfrak{e}_i + \dots + u_k\mathfrak{e}_k + \dots + u_n\mathfrak{e}_n = \quad (6)$$

$$= 1 \cdot \mathfrak{a}_0 + (-x_1)\mathfrak{a}_1 + \dots + (-x_j)\mathfrak{a}_j + \dots + (-x_l)\mathfrak{a}_l + \dots + (-x_m)\mathfrak{a}_m \equiv$$

$$\equiv \mathfrak{A}_0(-\mathfrak{x}) \equiv \mathfrak{a}_0 + \mathfrak{A}_0'(-\mathbf{x})$$

részletesebb alakban írhatjuk fel. Ennek alapján az *indulási helyzet* lineáris algebrailag úgy jellemezhető, hogy

balra van a *bázisoldal*, a $\mathfrak{B}_0 \equiv \mathfrak{E}$ bázismatrixszal, a $\mathfrak{b}_i \equiv \mathfrak{e}_i$ bázisvektorokkal és a $v_i^{(0)} \equiv u_i$ bázisváltozókkal (ezek most éppen a duál változók),

jobbra van a *nembázis-oldal*, az $\mathfrak{A}_0 \equiv \mathfrak{A}$ nembázis-matrixszal, másként az ún. induló szimplexmatrixszal, az $\mathfrak{a}_j^{(0)} \equiv \mathfrak{a}_j$ nembázis-vektorokkal (mindezek éppen a $\mathfrak{B}_0 = [\mathfrak{e}_i]$ bázisra vonatkoztatva) és az $y_j^{(0)} \equiv x_j$ nembázis-vektorokkal (ezek most éppen a primál változók),

a bázis- és nembázis-oldalon egyaránt ügyelve a *0 indexű* vektorok ($\mathfrak{e}_0$, $\mathfrak{a}_0$) és változók (u_0; $x_0 = -1$) különleges szerepére.

2'. Az indulóprogramot és értékét a (6) induló alapegyenletnek a nembázis-változók eltűnésénél ($\mathbf{v}_0 \equiv \mathbf{x} = \mathbf{0}$-nál) nyert

$$(\mathfrak{v}_0 \equiv)\ \mathfrak{u} \equiv \begin{bmatrix} u_0 \\ \mathbf{u} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{00} & \mathbf{a}^0 \\ \mathbf{a}_0 & \mathbf{A}_0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ -\mathbf{0} \end{bmatrix} \equiv \begin{bmatrix} a_{00} \\ \mathbf{a}_0 \end{bmatrix} \equiv \mathfrak{a}_0 \qquad (7)$$

partikuláris megoldása szolgáltatja, mégpedig a bázisváltozókra nézve explicite. E megoldás — a (3*a*) és a (4*a*) fényében — nyilván „lehetséges" is. E program az említett termelési problémánál nyilván úgy értelmezhető, hogy egyetlen cikkből sincs termelés ($x_j = 0$), minden erőforrás teljes kapacitásával tartalékban van ($u_i = a_{i0}$), s így az összes hozam is zérus ($u_0 = a_{00} = 0$).

Jegyezzük meg, hogy a további (javító) programok vizsgálatára — a várható változások mellett is — igyekszünk kiterjeszteni az alapegyenlet elrendezésének és megoldásának a fentiek alapján kifejlesztendő alábbi előnyös elvét:

a) Baloldalt legyen a mindenkori bázisvektorokat összefoglaló *bázismatrix*, a megfelelő bázisváltozókkal;

b) Jobboldalt legyen a mindenkori nembázis-vektorokat összefoglaló *nembázis-matrix*, a megfelelő nembázis-változókkal (mindkét oldalon a különleges szerepű 0 indexű vektorokkal, ill. skalárokkal együtt);

c) Mindkét oldal a mindenkori *bázisra vonatkoztatandó* (transzformálandó);

d) Ezúton nyerhető az alapegyenlet *általánosan megoldása* a bázisváltozókra,

e) Majd a nembázis-változók eltűnése (nullfeltételek) mellett, az alapegyenlet *partikuláris megoldása* a bázisváltozókra, éppen a nembázis-oldal 0-indexű oszlopa által.

Ezek után lássuk a szimplex-matrixalgoritmus (SMA) első, majd további lépéseit!

III°. Az algoritmus első lépése (SMA_1). Részletezzük az első lépés során eszközlendő különféle megfontolásokat!

1′. Az új $\mathfrak{a}_l$ *bázisvektor (ill. új* x_l' *bázisváltozó) kiválasztása,* a

$$-a_{0l} = \max(-a_{0j}) = -1 \cdot \min(a_{0j}),$$
$$x_l' > 0, \quad x_j' = 0 \quad (j \neq l) \tag{8a}$$

követelmény alapján. ⟨Termelés-prs-ilag: egyetlen, célszerűen a maximális fajlagos hozamú, l indexű cikk bevonása a termelésbe.⟩ Röviden: az l generáló oszlopindex kiválasztása.

Az új $\mathfrak{e}_k$ *nembázis-vektor (ill. új* u_k' *nembázis-változó) egyértelmű kiválasztása,* az

$$x_l' = \delta_0 \equiv \frac{a_{k0}}{a_{kl}} = \min\left(\frac{a_{i0}}{a_{il}^{(+)}}\right), \quad u_k' = a_{k0} - \delta_0 a_{kl} = 0 \quad (a_{kl} > 0) \tag{8b}$$

követelmény alapján, feltéve, hogy nincs több ilyen minimális hányados.* ⟨Termelés-prs-ilag: a kiválasztott cikk által igényelt erőforrások ($a_{il}^{(+)} > 0$) közül a reá nézve szűk keresztmetszetű, k indexű erőforrás kiválasztása és teljes, tartalékmentes felhasználása, feltéve, hogy nincs több, vele egyenlően szűk keresztmetszetű erőforrás*.⟩ Röviden: a k generáló sorindex határozott kiválasztása.

Az $\mathfrak{a}_l \leftrightarrow \mathfrak{e}_k$ *bázisvektorcsere (ill. az* $x_l \leftrightarrow u_k$ *bázisváltozó-csere) lehetséges***, mert — a (14) szerint —

$$\underline{\mathfrak{e}_k^*\mathfrak{a}_l = a_{kl} \equiv 1/\gamma \neq 0} \quad (\text{ui. } a_{kl} > 0). \tag{8c}$$

⟨Termelés-prs-ilag: a kiválasztott cikknek és erőforrásnak megfelelő, pozitív a_{kl} technikai koefficiens megállapítása.⟩ Röviden: az a_{kl} generáló elem megállapítása.

2′. Az új alapegyenlet (szimplexegyenlet) felírása, az $\mathfrak{a}_l(-x_l)$ és az $\mathfrak{e}_k u_k$ tagoknak a túloldalra (ellenkező előjellel) történő átrendezésével

$$\mathfrak{B}_1\mathfrak{v}_1 \equiv [\mathfrak{E} + (\mathfrak{a}_l - \mathfrak{e}_k)\mathfrak{e}^k][\mathfrak{u} - (x_l - u_k)\mathfrak{e}_k] \equiv \mathfrak{E}\mathfrak{u} + (x_l\mathfrak{a}_l - u_k\mathfrak{e}_k) = \mathfrak{A}_0(-\mathfrak{x}) +$$
$$+ (x_l\mathfrak{a}_l - u_k\mathfrak{e}_k) \equiv [\mathfrak{A}_0 + (\mathfrak{e}_k - \mathfrak{a}_l)\mathfrak{e}^l][-\mathfrak{x} - (u_k - x_l)\mathfrak{e}_l] \equiv$$
$$\equiv \mathfrak{A}_1(-\mathfrak{y}_1) \equiv \mathfrak{a}_0 + \mathfrak{A}_1'(-\mathfrak{y}_1) \tag{9}$$

módon, benne az új $\mathfrak{B}_1$, $\mathfrak{A}_1$, bázis- ill. nembázis-matrixszal, valamint az új $\mathfrak{v}_1$, $\mathfrak{y}_1$ bázis, ill. nembázis-vektorváltozóval.

Az új alapegyenlet reguláris, $\mathfrak{B}_1$ együtthatómatrixa valóban bázis, mert

$$|\mathfrak{B}_1| = |\mathfrak{E} + (\mathfrak{a}_l - \mathfrak{e}_k)\mathfrak{e}^k| = |\mathfrak{E} + (a_{kl} - 1)\mathfrak{e}_k\mathfrak{e}^k| =$$
$$= a_{kl} \cdot |\mathfrak{E}| = a_{kl} \cdot 1 = a_{kl} \neq 0. \tag{10a}$$

A $\mathfrak{B}_1$ *bázismatrix így invertálható is,* nevezetesen

$$\mathfrak{B}_1^{-1} = \mathfrak{E} - \gamma(\mathfrak{a}_l - \mathfrak{e}_k)\mathfrak{e}^k \quad (\mathfrak{B}_1\mathfrak{B}_1^{-1} = \mathfrak{E}). \tag{10b}$$

---

* Az ellenkező, ún. *elfajuló (degenerációs)* esetről a β) III°—IV° helyen lesz szó.

** Az $\mathfrak{a}_l \leftrightarrow \mathfrak{e}_k$ bázisvektorcsere feltétele — tudvalevőleg — az $\mathfrak{e}_k^*\mathfrak{a}_l \neq 0$ non-ortogonalitás.

3′. Az alapegyenlet transzformálása a $\mathfrak{B}_1$ *bázisra,* a megoldás előkészítése érdekében: $\mathfrak{B}_1^{-1}\mathfrak{B}_1 = \mathfrak{E}$,

$$\underline{\mathfrak{A}_1 \equiv \mathfrak{B}_1^{-1}\mathfrak{A}_1} = [\mathfrak{E} - \gamma(\mathfrak{a}_l - \mathfrak{e}_k)\mathfrak{e}^k][\mathfrak{A}_0 - (\mathfrak{a}_l - \mathfrak{e}_k)\mathfrak{e}^l],$$

$$\boxed{\mathfrak{A}_1 = \mathfrak{A}_0 - \frac{1}{a_{kl}}(\mathfrak{a}_l - \mathfrak{e}_k)(\mathfrak{a}^k + \mathfrak{e}^l) \equiv \mathfrak{A}_0 - \gamma\mathfrak{a}_l^{(-)}\mathfrak{a}^k_{(+)} \equiv [\mathfrak{a}_0^{(1)}, \mathfrak{A}_1'].} \qquad (11a)$$

Ugyanez az összefüggés, *oszlopvektorokra* lebontva

$$\mathfrak{a}_j' = \mathfrak{a}_j - \delta_j(\mathfrak{a}_l - \mathfrak{e}_k), \qquad \mathfrak{a}_l' = \mathfrak{e}_k - \gamma(\mathfrak{a}_l - \mathfrak{e}_k), \qquad (11b)$$

elemekre lebontva

$$a_{ij}' = a_{ij} - \gamma(a_{il} - \delta_{ik})(a_{kj} + \delta_{lj}) \qquad (11c)$$

alakot ölt, az *elemekig részletezett matrixok* kapcsolataként megadva pedig

$$\left[\begin{array}{c|ccccccc}
a_{00}' & a_{01}' & \dots & a_{0j}' & \dots & a_{0l}' & \dots & a_{0m}' \\
\hline
a_{10}' & a_{11}' & \dots & a_{1j}' & \dots & a_{1l}' & \dots & a_{1m}' \\
\dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\
a_{i0}' & a_{i1}' & \dots & a_{ij}' & \dots & a_{il}' & \dots & a_{im}' \\
\dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\
a_{k0}' & a_{k1}' & \dots & a_{kj}' & \dots & a_{kl}' & \dots & a_{km}' \\
\dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\
a_{n0}' & a_{n1}' & \dots & a_{nj}' & \dots & a_{nl}' & \dots & a_{nm}'
\end{array}\right] =
\left[\begin{array}{c|ccccccc}
a_{00} & a_{01} & \dots & a_{0j} & \dots & a_{0l} & \dots & a_{0m} \\
\hline
a_{10} & a_{11} & \dots & a_{1j} & \dots & a_{1l} & \dots & a_{1m} \\
\dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\
a_{i0} & a_{i1} & \dots & a_{ij} & \dots & a_{il} & \dots & a_{im} \\
\dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\
a_{k0} & a_{k1} & \dots & a_{kj} & \dots & a_{kl} & \dots & a_{km} \\
\dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\
a_{n0} & a_{n1} & \dots & a_{nj} & \dots & a_{nl} & \dots & a_{nm}
\end{array}\right] -$$

$$- \frac{1}{a_{kl}}\left[\begin{array}{c}
a_{0l} \\
\hline
a_{1l} \\
\dots \\
a_{il} \\
\dots \\
a_{kl} - 1 \\
\dots \\
a_{nl}
\end{array}\right][a_{k0} \mid a_{k1} \dots a_{kj} \dots a_{kl} + 1 \dots a_{km}] =$$

$$= \left[\begin{array}{c|ccccccc}
a_{00} - \delta_0 a_{0l} & a_{01} - \delta_1 a_{0l} & \dots & a_{0j} - \delta_j a_{0l} & \dots & -\gamma a_{0l} & \dots & a_{0m} - \delta_m a_{0l} \\
\hline
a_{10} - \delta_0 a_{1l} & a_{11} - \delta_1 a_{1l} & \dots & a_{1j} - \delta_j a_{1l} & \dots & -\gamma a_{1l} & \dots & a_{1m} - \delta_m a_{1l} \\
\dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\
a_{i0} - \delta_0 a_{il} & a_{i1} - \delta_1 a_{il} & \dots & a_{ij} - \delta_j a_{il} & \dots & -\gamma a_{il} & \dots & a_{im} - \delta_m a_{il} \\
\dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\
\delta_0 & \delta_1 & & \delta_j & & \gamma & & \delta_m \\
\dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\
a_{n0} - \delta_0 a_{nl} & a_{n1} - \delta_1 a_{nl} & \dots & a_{nj} - \delta_j a_{nl} & \dots & -\gamma a_{nl} & \dots & a_{nm} - \delta_m a_{nl}
\end{array}\right] \qquad (11d)$$

$$\langle l \neq j = 0, 1, \dots, m; \quad k \neq i = 0, 1, \dots, n; \quad \gamma \equiv 1/a_{kl} > 0, \quad \delta_j \equiv a_{kj}/a_{kl}\rangle$$

módon alakul. E formulákat a szerző több munkájában [33, 37, 53, 54] közölte.

A (12a) formula éppen az $\mathfrak{A}_1$ *első szimplexmatrixot* szolgáltatja, mégpedig az $\mathfrak{A}_0$ induló szimplexmatrix és a $\gamma\mathfrak{a}_l^{(-)}\mathfrak{a}_{(+)}^{k}$ első generáló diád különbségeként, tehát egyszerű matrixalgebrai úton. A (12d)-beli γ és δ_j hányadosokat egyébként nyilván indokolt *oszlopfaktoroknak* nevezni.

4'. Az új alapegyenlet általános megoldása a $\mathfrak{v}_1$ bázisvektorváltozóra:

$$(\mathfrak{B}_1^{-1}\mathfrak{B}_1\mathfrak{v}_1 = \mathfrak{E}\mathfrak{v}_1 \equiv)\ \underline{\mathfrak{v}_1 = \mathfrak{B}_1^{-1}\mathfrak{A}_1(-\mathfrak{y}_1) \equiv \mathfrak{A}_1(-\mathfrak{y}_1) \equiv \mathfrak{a}_0^{(1)} + \mathfrak{A}_1'(-\mathfrak{y}_1).} \quad (12)$$

5'. Az új alapegyenlet partikuláris megoldása a $\mathfrak{v}_1$-re a (szűk) nembázis-vektor-változó eltűnése, vagyis az $\mathbf{y}_1 = \mathbf{0}$ nullfeltétel mellett:

$$\underline{\mathfrak{v}_{10} = \mathfrak{a}_0^{(1)} + \mathfrak{A}_1'(-\mathbf{0}) = \mathfrak{a}_0^{(1)} \equiv \mathfrak{a}_0 - \delta_0(\mathfrak{a}_l - \mathfrak{e}_k)} \quad \left(\delta_0 \equiv \frac{a_{k0}}{a_{kl}} = \gamma a_{k0}\right). \quad (13)$$

Az így nyert program lehetséges és javított, mert

$$v_k' \equiv x_l' = a_{k0}' \equiv a_{k0}\gamma \equiv \delta_0 > 0, \qquad v_i' \equiv u_i' = a_{i0}' \equiv a_{i0} - \delta_0 a_{il} > 0; \quad (14a)$$

$$v_0' \equiv u_0' = a_{00}' \equiv a_{00} - \delta_0 a_{0l} \equiv a_{00} + \delta_0(-a_{0l}) > a_{00}(= 0). \quad (14b)$$

IV°. A teljes algoritmus p lépésben (SMA). Az első lépés részletes ismertetése után, az értelemszerűen hasonló második és az általános (q + 1-edik) lépés tárgyalását lényegesen rövidebbre foghatjuk.

A) Második lépés (SMA$_2$):

1'. Az új $a_{k_1l_1}'$ *generáló elem* (ill. $\mathfrak{a}_{l_1}^{(1)} \leftrightarrow \mathfrak{e}_{k_1}$ bázisvektor-csere) megállapítása:

$$\underline{a_{k_1l_1} \equiv 1/\gamma_1 = \mathfrak{e}_{k_1}^{*}\mathfrak{a}_{l_1}^{(1)} > 0,} \quad (15a)$$

$$a_{0l_1}' = \min\,(a_{0j}') < 0, \quad x_{l_1}'' > 0; \quad x_{l_1}'' = \delta_0' \equiv \frac{a_{k0}'}{a_{k_1l_1}'} = \min \frac{a_{i0}'}{a_{il'}^{(+)}}, \quad u_{k_1}'' = 0,$$

feltéve, hogy csak egyetlen k_1 generáló sorindex található.

2'. Az új alapegyenlet és bázismatrixának determinánsa, inverze:

$$\underline{\mathfrak{B}_2\mathfrak{v}_2} \equiv [\mathfrak{B}_1 + (\mathfrak{a}_{l_1} - \mathfrak{e}_{k_1})\mathfrak{e}^{k_1}]\mathfrak{v}_2 \equiv \mathfrak{B}_1[\mathfrak{E} + (\mathfrak{a}_{l_1}^{(1)} - \mathfrak{e}_{k_1})\mathfrak{e}^{k_1}][\mathfrak{v}_1 + (x_{l_1}'' - u_{k_1}'')\mathfrak{e}_{k_1}] =$$

$$= [\ddot{\mathfrak{A}}_1 + (\mathfrak{e}_{k_1} - \mathfrak{a}_{l_1})\mathfrak{e}^{l_1}][-\mathfrak{y}_1 - (u_{k_1}'' - x_{l_1}'')\mathfrak{e}_{l_1}] \equiv \underline{\ddot{\mathfrak{A}}_2(-\mathfrak{y}_2) \equiv \mathfrak{a}_0 + \ddot{\mathfrak{A}}_2'(-\mathbf{y}_2)};$$

$$|\mathfrak{B}_2| = |\mathfrak{B}_1||\mathfrak{E} + (\mathfrak{a}_{l_1}^{(1)} - \mathfrak{e}_{k_1})\mathfrak{e}^{k_1}| = a_{kl}a_{k_1l_1}' \neq 0 \quad (> 0),$$

$$\mathfrak{B}_2^{-1} = [\mathfrak{E} - \gamma_1(\mathfrak{a}_{l_1}^{(1)} - \mathfrak{e}_{k_1})\mathfrak{e}^{k_1}] \cdot \mathfrak{B}_1^{-1}. \quad (15b)$$

3'. Az alapegyenlet transzformálása a $\mathfrak{B}_2$ bázisra, a megoldás előkészítése érdekében: $\mathfrak{B}_2^{-1}\mathfrak{B}_2 = \mathfrak{E}$,

$$\underline{\mathfrak{A}_2 \equiv \mathfrak{B}_2^{-1}\ddot{\mathfrak{A}}_2} = [\mathfrak{E} - \gamma_1(\mathfrak{a}_{l_1}^{(1)} - \mathfrak{e}_{k_1})\mathfrak{e}^{k_1}]\mathfrak{B}_1^{-1} \cdot [\ddot{\mathfrak{A}}_1 + (\mathfrak{e}_{k_1} - \mathfrak{a}_{l_1})\mathfrak{e}^{l_1}], \quad (15c)$$

$$\boxed{\mathfrak{A}_2 = \mathfrak{A}_1 - \gamma_1(\mathfrak{a}_{l_1}^{(1)} - \mathfrak{e}_{k_1})(\mathfrak{a}_{(1)}^{k_1} + \mathfrak{e}^{l_1}) \equiv \mathfrak{A}_1 - \gamma_1 \overset{(1)}{\underset{l_1}{\mathfrak{a}_-}} \cdot \overset{k_1}{\underset{(1)}{\mathfrak{a}_+}} = [\mathfrak{a}_0^{(2)}, \mathfrak{A}_2'].}$$

E formula szolgáltatja az $\mathfrak{A}_2$ *második szimplexmatrixot,* mégpedig az $\mathfrak{A}_1$ matrix és a $\gamma_1 \overset{(1)}{\underset{l_1}{\mathfrak{a}_-}} \overset{k_1}{\underset{(1)}{\mathfrak{a}_+}}$ generáló diád különbségeként. (L. a szerző [33, 37] munkáit.)

4'. Az új alapegyenlet általános megoldása $\mathfrak{v}_2$-re:

$$(\mathfrak{B}_2^{-1}\mathfrak{B}_2\mathfrak{v}_2 = \mathfrak{E}\mathfrak{v}_2 \equiv)\ \underline{\mathfrak{v}_2 = \mathfrak{B}_2^{-1}\ddot{\mathfrak{A}}_2(-\mathfrak{y}_2) \equiv \mathfrak{A}_2(-\mathfrak{y}_2) \equiv \mathfrak{a}_0^{(2)} + \mathfrak{A}_2'(-\mathbf{y}_2)}. \quad (15d)$$

5'. Az új alapegyenlet partikuláris megoldása, $\mathbf{y}_2 = \mathbf{0}$ nullfeltétel mellett:

$$\underline{\mathfrak{v}_{20} = \mathfrak{a}_0^{(2)} + \mathfrak{A}_2'(-\mathbf{0}) = \mathfrak{a}_0^{(2)} \equiv \mathfrak{a}_0^{(1)} - \delta_0'(\mathfrak{a}_{l_1}^{(1)} - \mathfrak{e}_{k_1}) > \mathbf{0} \quad (\delta_0' = a_{k0}'\gamma_1)}. \quad (16)$$

Ez szintén *lehetséges és javított program,* lévén

$$v_{k_1}'' \equiv x_{l_1}'' = \delta_0' > 0, \quad v_k'' \equiv x_l'' = a_{k0}' - \delta_0' a_{kl_1}' > 0, \quad v_i'' \equiv u_i'' = a_{i0}' - \delta_0' a_{il_1}' > 0;$$

$$v_0'' \equiv u_0'' = a_{00}' + \delta_0'(-a_{0l_1}') > a_{00}'. \quad (17a, b)$$

A fentiek alapján *teljes indukcióval* nyerhető a most már csak röviden vázolandó

B) Általános ($q+1$-edik) lépés (SMA_{q+1}):

$$\mathit{1''}.\ \underline{a_{k_q l_q}^{(q)} = 1/\gamma_q = \mathfrak{e}_k \mathfrak{a}_{l_q}^{(q)} > 0} \quad (q = 0, 1, \ldots, p-1), \quad (18a)$$

ahol $a_{i0}^{(q)} > 0$, $a_{0l_q}^{(q)} = \min (a_{0l}^{(q)}) < 0$, $\delta_0^{(q)} = a_{k_q 0}^{(q)}\gamma_q = \min \dfrac{a_{i0}^{(q)}}{a_{il_q}^{(q+)}}$ (egyetlen).

$$\mathit{2''}.\ |\mathfrak{B}_{q+1}| = a_{kl}a_{k_1 l_1}' \ldots a_{k_q l_q}^{(q)} \equiv \prod_{p=0} a_{k_p l_p}^{(p)} \neq 0, \quad (>0);$$

$$\underline{\mathfrak{B}_{q+1}\mathfrak{v}_{q+1}} \equiv \mathfrak{B}_q[\mathfrak{E} + (\mathfrak{a}_{l_q}^{(q)} - \mathfrak{e}_{k_q})\mathfrak{e}^{k_q}][\mathfrak{v}_q + (x_{l_q}^{(q)} - u_{k_q}^{(q)})\mathfrak{e}_{k_q}] = \quad (18b)$$

$$= [\ddot{\mathfrak{A}}_q + (\mathfrak{e}_{k_q} - \mathfrak{a}_{l_q})\mathfrak{e}^{l_q}][-\mathfrak{y}_q - (u_{k_q}^{(q)} - x_{l_q}^{(q)})\mathfrak{e}_{l_q}] \equiv$$

$$\underline{\equiv \mathfrak{A}_{q+1}(-\mathfrak{y}_{q+1}) \equiv \mathfrak{a}_0 + \mathfrak{A}_{q+1}'(-\mathbf{y}_{q+1})}.$$

$$\mathit{3''}.\ \underline{\mathfrak{A}_{q+1} \equiv \mathfrak{B}_{q+1}^{-1}\ddot{\mathfrak{A}}_{q+1}} = [\mathfrak{E} - \gamma_q(\mathfrak{a}_{l_q}^{(q)} - \mathfrak{e}_{k_q})\mathfrak{e}^{k_q}]\,\mathfrak{B}_q^{-1} \cdot [\ddot{\mathfrak{A}}_q + (\mathfrak{e}_{k_q} - \mathfrak{a}_{l_q})\mathfrak{e}^{l_q}],$$

$$\boxed{\mathfrak{A}_{q+1} = \mathfrak{A}_q - \frac{1}{a_{k_q l_q}^{(q)}}(\mathfrak{a}_{l_q}^{(q)} - \mathfrak{e}_{k_q}^{(q)})(\mathfrak{a}_{(q)}^{k_q} + \mathfrak{e}_{(q)}^{l_q}) \equiv \mathfrak{A}_q - \gamma_q \overset{(q)}{\underset{q}{\mathfrak{a}_{l-}}} \cdot \overset{k_q}{\underset{(q)}{\mathfrak{a}_+}} = [\mathfrak{a}_0^{(q+1)}, \mathfrak{A}_{q+1}'].}$$

(18c)

$$4''.\quad \underline{\mathfrak{v}_{q+1}} = \mathfrak{B}_{q+1}^{-1}\mathfrak{A}_{q+1}(-\gamma_{q+1}) \equiv \underline{\mathfrak{A}_{q+1}(-\gamma_{q+1}) \equiv \mathfrak{a}_0^{(q+1)} + \mathfrak{A}'_{q+1}(-\mathbf{y}_{q+1})}. \tag{18d}$$

$$5''.\quad \underline{\mathfrak{v}_{q+1,0} = \mathfrak{a}_0^{(q+1)} + \mathfrak{A}'_{q+1}(-\mathbf{0}) = \mathfrak{a}_0^{(q+1)}} \equiv \mathfrak{a}_0^{(q)} - \delta_0^{(q)}(\mathfrak{a}_{l_q}^{(q)} - \mathfrak{e}_{k_q}) > \mathbf{0}, \tag{18e}$$

mely program szintén lehetséges és javított.

Az SMA_{q+1} lépés számítástechnikailag érdekes része *így foglalható össze:* az alap-(szimplex-) egyenlet általános megoldása

$$\mathfrak{v}_{q+1} = \mathfrak{A}_{q+1}(-\gamma_{q+1}) \equiv \mathfrak{a}_0^{(q+1)} + \mathfrak{A}'_{q+1}(-\mathbf{y}_{q+1}), \tag{18f}$$

$$\mathfrak{v}_q - (v_{k_q} - y_{l_q})\,\mathfrak{e}_{k_q} = [\mathfrak{A}_q - \gamma_q(\mathfrak{a}_{l_q}^{(q)} - \mathfrak{e}_{k_q})(\mathfrak{a}_{(q)}^{k_q} + \mathfrak{e}^{l_q})][-\gamma_q + (y_{l_q} - v_{k_q})\,\mathfrak{e}_{l_q}],$$

$\mathbf{y}_{q+1} = \mathbf{0}$ feltételes partikuláris megoldása pedig

$$\mathfrak{v}_{q+1} = \mathfrak{a}_0^{(q+1)}. \tag{18g}$$

A (18*c*) rekurzív matrixformula — az index $q+1 = 1, 2, \ldots, p$ választásánál — a teljes szimplexmatrix-sorozatot szolgáltatja, mely — az általánosan megoldott (18*d*) alapegyenletsorozat figyelembevételével — *a teljes (p lépéses) szimplex eljárást képes lebonyolitani,* s közben — a nullfeltételek mellett megoldott (18*e*) alapegyenletsorozat felhasználásával — a teljes programsorozatot kiértékelni. A (18*c*-*d*-*e*) matrixeljárás tehát méltán nevezhető *szimplex-matrixalgoritmusnak* (SMA). Az algoritmus gerincét képező (18*d*) rekurzív matrixformula — nyilvánvaló — egyszerű szerkezetű, csupán elemi matrixműveletek (diadikus szorzást, kivonást) tartalmazó, s így *könnyen alkalmazható modern elektronikus számítógépekre.** A szerző számos munkájában [33, 53, 72] és bel és külföldi előadásában [37, 47, 54] tette közzé a SMA-t. Eljárásunk szerencsésen csatlakozik a hazai matrixiskola eredményeihez, s változatos színképében is új árnyalatot jelent. Könyvünk *következetesen* ezt a SMA-t alkalmazza, sőt — mint látni fogjuk — számos irányban általánosítja majd.

Külön említést érdemel az

<u>*C)* Algoritmus befejezése (SMA_p).</u> Az utolsó, *p*-edik lépést az a *körülmény* jelzi, hogy az $\mathfrak{A}_p$ zárómatrixban

$$\underline{\mathbf{a}_{(p)}^0 \geqq \mathbf{0}}, \qquad \text{azaz} \qquad -a_{0j}^{(p)} = -\mathbf{a}_{(p)}^0\mathbf{e}_j \leqq 0. \tag{19}$$

⟨Termelés-prs-ilag: már semmilyen újabb termelési, vagy visszatartalékolási programmódosítás nem járna haszonnal.⟩ E miatt az utolsó alapegyenletnek az $\mathbf{y}_p = \mathbf{0}$ nullfeltétel mellett adódó partikuláris megoldása már nemcsak lehetséges és javított programot szolgáltat, hanem *optimálist* is, azaz

$$\underline{\mathfrak{v}_{\mathrm{opt}} \equiv \mathfrak{v}_{p0} = \mathfrak{a}_0^{(p)}}, \qquad \text{ahol} \qquad u_{0\,\mathrm{opt}} \equiv u_0^{(p)} = a_{00}^{(p)} > u_0^{(p-1)}, \qquad v_{i\,\mathrm{opt}} \equiv v_i^{(p)} = a_{i0}^{(p)} > 0. \tag{20}$$

* Az SMA elvi tömbvázlatát és ALGOL-60-as programját l. hátul, a Mellékletek között!

Mint később látni fogjuk*, az $a_{0l}^{(p)} = 0$ mutatókból kiinduló rendes szimplex lépésekkel változatlan programértékű, ún. *alternatív optimumok* képezhetők. Ha azonban

$$\underline{\mathbf{a}_{(p)}^{0} > \mathbf{0}}, \quad \text{akkor} \quad \mathfrak{v}_{\text{opt}} \equiv \mathfrak{v}_{p0} = \mathfrak{a}_0^{(p)} \tag{21}$$

beláthatóan az *egyetlen* optimális programot nyújtja.

— Adjunk most egy *példasorozatot* a fent ismertetett szimplex-matrixalgoritmus (SMA) szemléltetésére!

2. Pl. Adva van az alábbi l. prs-i normál maximumfeladat, bővített alakban, hipermatrixos írásmódon, a ($3a$, b)-nek megfelelően (v. ö. az 1. példával):

$$\mathbf{x} \geqq \mathbf{0},\quad \mathbf{u} \geqq \mathbf{0},\quad u_0 = \text{Max!}\qquad \mathfrak{u} \equiv \begin{bmatrix} u_0 \\ \mathbf{u} \end{bmatrix} \equiv \begin{bmatrix} v_0 \\ u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & -4 & -5 & -1 \\ 10 & 3 & 2 & 0 \\ 11 & 1 & 4 & 0 \\ 13 & 3 & 3 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ -x_1 \\ -x_2 \\ -x_3 \end{bmatrix} \equiv \begin{bmatrix} a_{00} & \mathbf{a}^0 \\ \mathbf{a}_0 & \mathbf{A}_0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ -\mathbf{x} \end{bmatrix} \equiv \mathfrak{A}_0(-\mathfrak{x}).$$

Ez utóbbi az *induló* alapegyenlet, éppen az u-ra általánosan megoldva, a (6) szerint. Partikuláris megoldása az $\mathbf{x}^* = [x_1, x_2, x_3] = \mathbf{0}^*$ nullfeltétel mellett, a (7) alapján:

$$\mathfrak{u} = \mathfrak{a}_0, \quad \text{azaz} \quad u_0 = 0; \quad u_1 = 10, \quad u_2 = 11, \quad u_3 = 13 \quad (> 0).$$

3. Pl. Végezzük el az *első lépést* (SMA_1), a III° szerint, mégpedig részletezve!

1'. Az új bázisvektor $\mathfrak{a}_2$, mert $-a_{02} = \max(-a_{0j}) = 5$, $l_0 = 2$, $x_2' > 0$ ($8a$). Az új (egyedüli) nem bázisvektor $\mathfrak{e}_2$, mert

$$x_2' = \delta_0 = 14/4 = a_{20}/a_{22} = \min(a_{i0}/a_{i2}^{(+)}), \quad u_2' = 0 \ (8b).$$

Az új generáló elem: $a_{22} = 1/\gamma_0 = 4 > 0$ ($8c$).

2'. Az új alapegyenlet (9):

$$\mathfrak{B}_1\mathfrak{v}_1 \equiv \begin{bmatrix} 1 & 0 & -5 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_0 \\ u_1 \\ x_2 \\ u_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & -4 & 0 & -1 \\ 10 & 3 & 0 & 0 \\ 11 & 1 & 1 & 0 \\ 13 & 3 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ -x_1 \\ -u_2 \\ -x_3 \end{bmatrix} \equiv \mathfrak{A}_1(-\mathfrak{y}_1) \equiv \equiv \mathfrak{a}_0 + \mathfrak{A}_1'(-\mathbf{y}_1),$$

ahol ($10a$, b)

$$|\mathfrak{B}_1| = \begin{vmatrix} 1 & 0 & -5 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 1 \end{vmatrix} = 4 \cdot \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 4 \neq 0, \qquad \mathfrak{B}_1^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 5/4 & 0 \\ 0 & 1 & -2/4 & 0 \\ 0 & 0 & 1/4 & 0 \\ 0 & 0 & -3/4 & 1 \end{bmatrix}.$$

* L. a γ) II°-ben.

3'. Az $\mathfrak{A}_1$ transzformálása a $\mathfrak{B}_1$ bázisra (11*a, d*):

$$\mathfrak{A}_1 = \mathfrak{A}_0 - \gamma_0(\mathfrak{a}_2 - \mathfrak{e}_2)(\mathfrak{a}^2 + \mathfrak{e}^2) =$$

$$= \mathfrak{A}_0 - \frac{1}{4}\cdot\begin{bmatrix} -5 \\ \hdashline 2 \\ 3 \\ 3 \end{bmatrix}\cdot[11 \;\vdots\; 1 \quad 5 \quad 0] = \begin{bmatrix} \frac{55}{4} & \vdots & -\frac{11}{4} & \frac{5}{4} & -1 \\ \hdashline \frac{9}{2} & \vdots & \frac{5}{2} & \frac{1}{2} & 0 \\ \frac{11}{4} & \vdots & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} & 0 \\ \frac{19}{4} & \vdots & \frac{9}{4} & -\frac{3}{4} & 1 \end{bmatrix}.$$

Ez az első szimplex matrix.

4'. Általános megoldás $\mathfrak{v}_1$-re (12):

$$\mathfrak{v}_1 = \mathfrak{B}_1^{-1}\mathfrak{A}_1(-\mathfrak{y}_1) \equiv \mathfrak{A}_1(-\mathfrak{y}_1).$$

5'. Partikuláris megoldás $\mathfrak{v}_1$-re az $\mathbf{y}_1^* = [y_1', u_2', x_3'] = \mathbf{0}^*$ feltétel mellett (13):

$$\mathfrak{v}_1 \equiv \begin{bmatrix} u_0' \\ \hdashline u_1' \\ x_2 \\ u_3' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 55/4 \\ \hdashline 9/2 \\ 11/4 \\ 19/4 \end{bmatrix} \equiv \mathfrak{a}_0, \quad \text{ahol} \quad u_0 = 55/4 \quad (> 0 = u_0)$$

$$u_1' = 9/2, \quad x_2' = 11/4, \quad u_3' = 19/4 \quad (> 0);$$

ez lehetséges és javított program (14, 15).

4. Pl. Végezzük el a *második lépést* (SMA_2) a IV°. 1—5. szerint, kevésbé részletezve.

1'. Az új generáló elem megállapítása (15*a*): $a'_{k_1 l_1} = a'_{11} = 5/2 > 0$.

2'—4'. Az új alapegyenlet (reguláris), transzformálása a $\mathfrak{B}_2$ bázisra és általános megoldása $\mathfrak{v}_2$-re (15*b, c, d*):

$$\mathfrak{B}_2\mathfrak{v}_2 = \mathfrak{A}_2(-\mathfrak{y}_2), \qquad |\mathfrak{B}_2| = |\mathfrak{B}_1|\,|\mathfrak{E} + (\mathfrak{a}_1' - \mathfrak{e}_1)\mathfrak{e}^1| = a_{22}a_{11}' = 10 > 0;$$

$$\mathfrak{v}_2 = \mathfrak{A}_2(-\mathfrak{y}_2) \equiv \mathfrak{B}_2^{-1}\mathfrak{A}_2(-\mathfrak{y}_2) \equiv [\mathfrak{A}_1 - \gamma_1(\mathfrak{a}_1' - \mathfrak{e}_1)(\mathfrak{a}^1 + \mathfrak{e}^1)](-\mathfrak{y}_2);$$

$$\mathfrak{v}_2 \equiv \begin{bmatrix} u_0'' \\ \hdashline x_1'' \\ x_2'' \\ u_3'' \end{bmatrix} = \left(\mathfrak{A}_1 - \frac{2}{5}\begin{bmatrix} -\frac{11}{4} \\ \hdashline \frac{3}{2} \\ \frac{1}{4} \\ \frac{9}{4} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \frac{9}{2} & \vdots & \frac{7}{2} & \frac{1}{2} & 0 \end{bmatrix}\right)(-\mathfrak{y}_2) \equiv \begin{bmatrix} 18{,}7 & \vdots & 1{,}1 & 0{,}7 & -1 \\ \hdashline 1{,}8 & \vdots & 0{,}4 & -0{,}2 & 0 \\ 2{,}3 & \vdots & -0{,}1 & 0{,}3 & 0 \\ 0{,}7 & \vdots & -0{,}9 & -0{,}3 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 \\ \hdashline -u_1 \\ -u_2 \\ -x_3 \end{bmatrix}.$$

5'. Partikuláris megoldás $\mathfrak{v}_2$-re $\mathbf{y}_2^* = [u_1'', u_2'', x_3''] = \mathbf{0}^*$-nál (15*e*):

$$\mathfrak{v}_2 \equiv [u_0'' \,\vdots\, x_1'', x_2'', u_3'']^* = [18{,}7 \,\vdots\, 1{,}8 \;\; 2{,}3 \;\; 0{,}7]^* = \mathfrak{a}_0^{(2)};$$

ez szintén lehetséges és javított program.

5. Pl. Folytassuk a *szimplex-matrixalgoritmust* (SMA), a IV° 1''—5'' szerint, még kevésbé részletezve! — *Harmadik lépés:*

1''. Az új generáló elem megállapítása (18*a*):

$$a''_{k_3 l_3} = a''_{33} = 1/\gamma_2 = 1 > 0.$$

2''—4''. Az új alapegyenlet és általános megoldása $\mathfrak{v}_3$-ra (18*b, c, d*):

$$\mathfrak{B}_3\mathfrak{v}_3 = \ddot{\mathfrak{A}}_3(-\mathfrak{y}_3), \; |\mathfrak{B}_3| = a_{22}a'_{11}a''_{33} = 10 > 0,$$

$$\mathfrak{v}_3 = [\mathfrak{A}_2 - \gamma_2(\mathfrak{a}_3'' - \mathfrak{e}_3)(\mathfrak{a}_*^3 + \mathfrak{e}^3)] \cdot (-\mathfrak{y}_3),$$

$$\mathfrak{v}_3 \equiv \begin{bmatrix} u'''_0 \\ \hline x'''_1 \\ x'''_2 \\ x'''_3 \end{bmatrix} = \left(\mathfrak{A}_2 - 1 \cdot \begin{bmatrix} -1 \\ \hline 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} [0{,}7 \,\vdots\, -0{,}6 \;\; -0{,}3]\right)(-\mathfrak{y}_2) \equiv$$

$$\equiv \left[\begin{array}{c|ccc} 19{,}4 & 0{,}2 & 0{,}4 & 1 \\ \hline 1{,}8 & 0{,}4 & -0{,}2 & 0 \\ 2{,}3 & -0{,}1 & 0{,}3 & 0 \\ 0{,}7 & -0{,}9 & -0{,}3 & 1 \end{array}\right] \begin{bmatrix} 1 \\ \hline -u_1''' \\ -u_2''' \\ -u_3''' \end{bmatrix}.$$

5''. Partikuláris megoldás $\mathfrak{v}_3$-ra, $\mathbf{y}_3^* \equiv [u'''_1, u'''_2, u'''_3] = \mathbf{0}^*$ mellett (18*e*):

$$\mathfrak{v}_3 \equiv [u'''_0 \,\vdots\, x_1''', \; x_2''', \; x_3''']^* = [19{,}4 \,\vdots\, 1{,}8 \quad 2{,}3 \quad 0{,}7]^* \equiv \mathfrak{a}_0^{(3)}.$$

E program nyilván lehetséges és javított. Egyszersmind — a (19) értelmében — eljutottunk algoritmusunk *befejezéséhez,* lévén

$$\mathbf{a}_{(3)}^0 = [0{,}2 \quad 0{,}4 \quad 1] = \mathbf{0}^*.$$

Utolsó programunk tehát a (20) szerint *optimális* is egyben, sőt — a (21) alapján — az *egyetlen* optimum; írható tehát, hogy

$$\mathbf{x}^*_{\text{opt}} \equiv \mathbf{x}_3^* = [1{,}8 \quad 2{,}3 \quad 0{,}7], \quad \mathbf{u}^*_{\text{opt}} \equiv \mathbf{u}_3^* = [0, \quad 0, \quad 0], \quad u_{0\,\text{opt}} \equiv u_0''' = 19{,}4.$$

6. Pl. Oldjuk meg — szimplex-matrixalgoritmusunk (SMA) alkalmazásával — a következő l. prs-i problémát:

$$x_1 \geqq 0, \quad x_2 \geqq 0, \quad x_3 \geqq 0;$$

$$\left.\begin{aligned} 3x_1 - x_2 + 2x_3 &\leqq 7 \\ -2x_1 + 4x_2 \qquad &\leqq 12 \\ -4x_1 + 3x_2 + 8x_3 &\leqq 10 \\ -x_1 + 3x_2 - 2x_3 &= \text{Max!} \end{aligned}\right\}. \; —$$

Feladatunk (a duál változókkal) bővített és átrendezett *skaláris alakban*

$$x_1 \geqq 0, \quad x_2 \geqq 0, \quad x_3 \geqq 0; \quad u_1 \geqq 0, \quad u_2 \geqq 0, \quad u_3 \geqq 0;$$

$$\left.\begin{array}{l} u_0 \quad\;\; 0 + 1(-x_1) - 3(-x_2) + 2(-x_3) = \text{Max!} \\ u_1 \quad\;\; 7 + 3(-x_1) - 1(-x_2) + 2(-x_3) \\ u_2 = 12 - 2(-x_1) + 4(-x_2) + 0(-x_3) \\ u_3 = 10 - 4(-x_1) + 3(-x_2) + 8(-x_3) \end{array}\right\}$$

módon, *matrixos alakban*

$$\mathbf{x} \geqq \mathbf{0}, \quad \mathbf{u} \geqq \mathbf{0};$$

$$u_0 = 0 + [1, \; -3, \; 2]\begin{bmatrix} -x_1 \\ -x_2 \\ -x_3 \end{bmatrix} = a_{00} + \mathbf{a}^0(-\mathbf{x}) = \text{Max!}$$

$$\mathbf{u} = \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 7 \\ 12 \\ 10 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 3 & -1 & 2 \\ -2 & 4 & 0 \\ -4 & 3 & 8 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} -x_1 \\ -x_2 \\ -x_3 \end{bmatrix} = \mathbf{a}_0 + \mathbf{A}(-\mathbf{x})$$

módon, végül *hipermatrixos alakban*

$$\mathbf{x} \geqq \mathbf{0}, \quad \mathbf{u} \geqq \mathbf{0}, \; u_0 = \text{Max!}$$

$$\mathfrak{u} \equiv \begin{bmatrix} u_0 \\ \mathbf{u} \end{bmatrix} = \left[\begin{array}{c|ccc} 0 & 1 & -3 & 2 \\ \hline 7 & 3 & -1 & 2 \\ 12 & -2 & 4 & 0 \\ 10 & -4 & 3 & 8 \end{array}\right]\left[\begin{array}{c} 1 \\ \hline -x_1 \\ -x_2 \\ -x_3 \end{array}\right] = \begin{bmatrix} a_{00} & \mathbf{a}^0 \\ \mathbf{a}_0 & \mathbf{A} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 \\ -\mathbf{x} \end{bmatrix} \equiv \mathfrak{A}_0(-\mathfrak{x})$$

módon írható fel. Láthatóan

$$\mathbf{a}_0^* = [7, \; 12, \; 10] > \mathbf{0}^*,$$

vagyis (induláskor) a *normálfeladat rendes esetével* állunk szemben. Minthogy

$$a_{02} = \mathbf{a}^0\mathbf{e}_2 = -3 < 0,$$

induló programunk (nem optimális, hanem) *javítható.* Generáló elem a (23*b*) szerint

$$\delta_0 \equiv \frac{a_{k0}}{a_{k2}} \equiv \min \frac{a_{i0}}{a_{il}^{(+)}} = \min\left(\frac{12}{4}, \; \frac{10}{3}\right) = \frac{12}{4}, \; \frac{1}{\gamma} \equiv a_{kl} \equiv a_{22} = 4.$$

Első lépés:

$$\left[\begin{array}{c} u_0' \\ \hline u_1' \\ x_2' \\ u_3' \end{array}\right] = \mathfrak{A}_1 \cdot \left[\begin{array}{c} 1' \\ \hline -x_1' \\ -u_2' \\ -x_3' \end{array}\right],$$

ahol a (12*a*) szerint

$$\mathfrak{A}_1 = \mathfrak{A}_0 - \frac{1}{a_{22}}(\mathfrak{a}_2 - \mathfrak{e}_2)(\mathfrak{a}^2 + \mathfrak{e}^2) = \mathfrak{A}_0 - \frac{1}{4}\cdot\begin{bmatrix} -3 \\ \hline -1 \\ 3 \\ 3 \end{bmatrix}[12 \mid -2, \quad 5, \quad 0] =$$

$$= \mathfrak{A}_0 - \left[\begin{array}{c|ccc} -9 & \frac{3}{2} & -\frac{15}{4} & 0 \\ \hline -3 & -\frac{1}{2} & -\frac{5}{4} & 0 \\ 9 & -\frac{3}{2} & \frac{15}{4} & 0 \\ 9 & -\frac{3}{2} & \frac{15}{4} & 0 \end{array}\right] = \left[\begin{array}{c|ccc} 9 & -\frac{1}{2} & \frac{3}{4} & 2 \\ \hline 10 & \boxed{\frac{5}{2}} & \frac{1}{4} & 2 \\ 3 & -\frac{1}{2} & \frac{1}{4} & 0 \\ 1 & \frac{5}{2} & -\frac{3}{4} & 8 \end{array}\right].$$

Itt

$$\mathbf{a}_0'^* = [10, \quad 3, \quad 1] > \mathbf{0} \quad \text{és} \quad a_{01}' \equiv \mathbf{a}'^0\mathbf{e}_1 = -\frac{1}{2} < 0,$$

tehát most is a *normálfeladat rendes esetével* és tovább *javítható* programmal számolhatunk. Generáló elem:

$$\delta_0' \equiv \frac{a_{k_1 0}'}{a_{k_1 1}'} \equiv \min \frac{a_{i0}'}{a_{i1}'^{(+)}} = \min \frac{10}{5/2} = 4, \quad a_{k_1 l_1}' \equiv a_{11}' = \frac{5}{2}.$$

Második lépés:

$$\begin{bmatrix} u_0'' \\ \hline x_1'' \\ x_2'' \\ x_3'' \end{bmatrix} = \hat{\mathfrak{A}}_2 \cdot \begin{bmatrix} 1'' \\ \hline -u_1'' \\ -u_2'' \\ -x_3'' \end{bmatrix}, \quad \text{ahol}$$

$$\mathfrak{A}_2 = \mathfrak{A}_1 - \frac{1}{a_{11}'}(\mathfrak{a}_1' - \mathfrak{e}_1)(\mathfrak{a}'^1 + \mathfrak{e}^1) = \mathfrak{A}_1 - \frac{2}{5}\cdot\begin{bmatrix} -\frac{1}{2} \\ \hline \frac{3}{2} \\ -\frac{1}{2} \\ -\frac{5}{2} \end{bmatrix}\left[10 \,\middle|\, \frac{7}{2}, \ \frac{1}{4}, \ 2\right] =$$

$$= \mathfrak{A}_1 - \left[\begin{array}{r|rrr} -2 & -\frac{7}{10} & -\frac{1}{20} & -\frac{2}{15} \\ \hline 6 & \frac{21}{10} & \frac{3}{20} & \frac{6}{5} \\ -2 & -\frac{7}{10} & -\frac{1}{20} & -\frac{2}{6} \\ -10 & -\frac{7}{2} & -\frac{1}{4} & -2 \end{array}\right] = \left[\begin{array}{r|rrr} 11 & \frac{1}{5} & \frac{4}{5} & \frac{12}{5} \\ \hline 4 & \frac{2}{5} & \frac{1}{10} & \frac{4}{5} \\ 5 & \frac{1}{5} & \frac{3}{10} & \frac{2}{5} \\ 11 & 1 & -\frac{1}{2} & 10 \end{array}\right].$$

Itt $\mathbf{a}^{0''} = \left[\frac{1}{5}, \frac{4}{5}, \frac{12}{5}\right] > \mathbf{0}$, tehát további javítás nem lehetséges. *Optimális programunk és értéke* ily módon a következő:

$$\mathbf{x}^*_{\text{opt}} \equiv \mathbf{x}''^* = [4, 5, 0] > \mathbf{0}, \quad \mathbf{u}_{\text{opt}} \equiv \mathbf{u}''^* = [0, 0, 11] \geqq \mathbf{0},$$

$$u_{0\text{opt}} \equiv u_0'' = 11.$$

Ellenőrzés a bővített egyenletrendszer alapján:

$$\begin{aligned} u_0'' &= 0 + 1(-4) - 3(-5) + 2(-0) = 11, \\ u_1'' &= 7 + 3(-4) - 1(-5) + 2(-0) = 0, \\ u_2'' &= 12 - 2(-4) + 4(-5) + 0(-0) = 0, \\ u_3'' &= 10 - 4(-4) + 3(-5) + 8(-0) = 11. \end{aligned}$$

V°. A teljes algoritmus egy ugrásban (SMF). *1'.* Algoritmusunk egy ugrásban is lebonyolítható, de csoportos (p-szeres) bázisvektorcserével, szemben a korábbi p lépéses, de egyszerű bázisvektorcserés megoldással. Az egyszerűség kedvéért tegyük fel, hogy a p lépéses eljárás során rendre az $1, 2, \ldots, p$ cikkek bizonyultak a legjövedelmezőbbeknek s ezekre nézve éppen az $1, 2, \ldots, p$ erőforrások voltak a szűk keresztmetszetűek (esetleg ε-nal eldöntve)*, vagyis a generáló elemek választása — a szokásos $a^{(q)}_{k_q l_q} > 0$ követelmények mellett —

$$k_q = l_q = q + 1 \qquad (q + 1 = 1, 2, \ldots, p \leqq r) \tag{22a}$$

módon, vagyis a főátló mentén lefelé haladva történt. (Ez egyébként mindig elérhető a sorok és oszlopok alkalmas átrendezésével.) Ezt az $\mathfrak{e}_{q+1} \leftrightarrow \mathfrak{a}_{q+1}$ egyszerű bázisvektorcserékkel p lépéses eljárást nyilván az

$$\mathfrak{E}_p \equiv [\mathfrak{e}_1, \mathfrak{e}_2, \ldots \mathfrak{e}_p] \leftrightarrow \mathfrak{A}_p \equiv [\mathfrak{a}_1, \mathfrak{a}_2, \ldots \mathfrak{a}_p] \tag{22b}$$

csoportos bázisvektorcserével egyesíthetjük egy ugrásba.

* L. a β III—IV°-ot!

Az említett csoportos bázisvektorcsere után *alapegyenletünk* így alakul:

$$\mathfrak{B}_p\mathfrak{v}_p \equiv u_0^{(p)}e_0 + x_1^{(p)}a_1 + \dots + x_p^{(p)}a_p + u_{p+1}^{(p)}e_{p+1} + \dots + u_n^{(p)}e_n \equiv u_0^{(p)}e_0 +$$

$$+ \mathfrak{A}_P\mathbf{x}_p^{(p)} + \mathfrak{E}_N\mathbf{u}_n^{(p)} = \ddot{\mathfrak{A}}_p(-\gamma_p) \equiv 1\cdot a_0 + (-u_1^{(p)})e_1 + \dots + (-u_p^{(p)})e_p +$$

$$+ (-x_{p+1}^{(p)})a_{p+1} + \dots + (-x_m^{(p)})a_m \equiv 1\cdot a_0 + \mathfrak{E}_P(-\mathbf{u}_p^{(p)}) + \mathfrak{A}_M(-\mathbf{x}_m^{(p)}) \equiv$$

$$\equiv \mathfrak{B}_p\mathfrak{A}_p(-\gamma_p) \equiv \mathfrak{B}_p[a_0^{(p)} + \mathfrak{E}_P(-\mathbf{u}_p^{(p)}) + \mathfrak{A}_M^{(p)}(-\mathbf{x}_m^{(p)})],\ \mathfrak{v}_p = \mathfrak{A}_p(-\gamma_p), \qquad (23a)$$

ahol — a matrixalgebrai előállításban —

$$\mathfrak{B}_p = \mathfrak{E} + (\mathfrak{A}_P - \mathfrak{E}_P)\mathfrak{E}^P, \quad \mathfrak{B}_p^{-1} = \mathfrak{E} - (\mathfrak{A}_P - \mathfrak{E}_P)\mathbf{\Gamma}_p\mathfrak{E}^P$$

$$\ddot{\mathfrak{A}}_p = \mathfrak{A}_0 - (\mathfrak{A}_P - \mathfrak{E}_P)\mathfrak{E}^P, \quad \mathfrak{A}_p = \mathfrak{B}_p^{-1}\ddot{\mathfrak{A}}_P \quad (\mathbf{\Gamma}_p = \mathbf{A}_{pp}^{-1}), \qquad (23b)$$

$$\mathfrak{A}_p = [\mathfrak{E} - (\mathfrak{A}_P - \mathfrak{E}_P)\mathbf{\Gamma}_p\mathfrak{E}^P][\mathfrak{A}_0 - (\mathfrak{A}_P - \mathfrak{E}_P)\mathfrak{E}^P] =$$

$$= \mathfrak{A}_0 - (\mathfrak{A}_P - \mathfrak{E}_P)\mathbf{\Gamma}_p(\mathfrak{A}^P + \mathbf{A}_{pp}\mathfrak{E}^P - \mathbf{A}_{pp}\mathfrak{E}^P + \mathbf{E}_{pp}\mathfrak{E}^P),$$

$$\boxed{\mathfrak{A}_p = \mathfrak{A}_0 - (\mathfrak{A}_P - \mathfrak{E}_P)\mathbf{A}_{pp}^{-1}(\mathfrak{A}^P + \mathfrak{E}^P) \equiv \mathfrak{A}_0 - \mathfrak{A}_p^{(-)}\mathbf{\Gamma}_p\mathfrak{A}_p^{(+)} =} \qquad (24a)$$

$$= \begin{bmatrix} a_{00} & \mathbf{a}^{0p} & \mathbf{a}^{0m} \\ \mathbf{a}_{p0} & \mathbf{A}_{pp} & \mathbf{A}_{pm} \\ \mathbf{a}_{n0} & \mathbf{A}_{np} & \mathbf{A}_{nm} \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} \mathbf{a}^{0p} & -\mathbf{0}^* \\ \mathbf{A}_{pp} & -\mathbf{E}_p \\ \mathbf{A}_{pp} & -\mathbf{0} \end{bmatrix} \cdot \mathbf{A}_{pp}^{-1} \cdot [\mathbf{a}_{p0} + \mathbf{0}, \mathbf{A}_{pp} + \mathbf{E}_p, \mathbf{A}_{pm} + \mathbf{0}]; \qquad (24b)$$

itt $\mathbf{A}_{pp}^{-1}$ létezik, mert — igazolhatóan —

$$\det(\mathbf{A}_{pp}) = |\mathbf{A}_{pp}| = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1p} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2p} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{p1} & a_{p2} & \dots & a_{pp} \end{vmatrix} = a_{11}a'_{22}\dots a^{(p-1)} \neq 0 \text{ (sőt} > 0), \qquad (24c)$$

vagyis az $|\mathbf{A}_{pp}|$ generáló determináns értéke megegyezik a (pozitív) generáló elemek szorzatával.

2'. A (24*a*) formulánk, amely értelemszerűen tetszőleges k_q, l_q esetén is használható (l. [8]), láthatóan lehetővé teszi a teljes szimplexeljárás ugrásszerű lebonyolítását. Gyakorlatilag inkább az $\mathfrak{A}_p$ szimplexmatrix szerkezeti vizsgálatára használjuk, mégpedig a (24*b*)-ben kijelölt műveletek elvégzésével és a $\delta_0^{(p)} = \mathbf{\Gamma}_p\mathbf{a}_{p0}$, $\Delta_2^{(p)} = \mathbf{\Gamma}_p\mathbf{A}_{pm}$ jelölésekkel nyert

$$\mathfrak{A}_p = \begin{bmatrix} a_{00} - \mathbf{a}^{0p}\delta_0^{(p)} & -\mathbf{a}^{0p}\mathbf{\Gamma}_p & \mathbf{a}^{0m} - \mathbf{a}^{0p}\Delta_2^{(p)} \\ \delta_0^{(p)} & \mathbf{\Gamma}_p & \Delta_2^{(p)} \\ \mathbf{a}_{n0} - \mathbf{A}_{np}\delta_0^{(p)} & -\mathbf{A}_{np}\mathbf{\Gamma}_p & \mathbf{A}_{nm} - \mathbf{A}_{np}\Delta_2^{(p)} \end{bmatrix} \qquad (25)$$

alakban. Ennek alapján ugyanis meg lehet állapitani az $\mathfrak{A}_0$ egyes blokkjaiban történő változás befolyását az $\mathfrak{A}_p$-re. Az ún. *variáns-feladatoknál* — pl. maximális hozamra vagy maximális termelési értékre vagy minimális önköltségre való ter-

melésprogramozásnál — egy variáns megoldásának ismeretében csak a (25)-ben módosult blokkokat kell újraszámolni.*

7. Pl. Végezzük el az 1—5. példában vizsgált l. prs-i feladattal kapcsolatban az első r primál és duál változó csoportos cseréjét. —

Esetünkben

$$r = \varrho\,(\mathbf{A}) = 3, \quad \text{mert} \quad |\mathbf{A}| = \det(\mathbf{A}) = \begin{vmatrix} 3 & 2 & 0 \\ 1 & 4 & 0 \\ 3 & 3 & 1 \end{vmatrix} =$$

$$= 10\,(= a_{22}a'_{11}a''_{33} = 4 \cdot \frac{5}{2} \cdot 1.) > 0,$$

következésképpen

$$\mathbf{A}_{11} \equiv \mathbf{A},\ \boldsymbol{\Gamma}_{(3)} = \mathbf{A}_{11}^{-1} \equiv \mathbf{A}^{-1},\ \mathbf{a}^{01} \equiv \mathbf{a}^{0},\ \mathbf{a}_{10} \equiv \mathbf{a}_{0},\ \mathbf{u}_{1} \equiv \mathbf{u},\ \mathbf{x}_{1} \equiv \mathbf{x},$$

és így az utolsó (harmadik) *alapegyenlet* — a (23*a*) és a (25) formula alapján —

$$\mathfrak{v}_3 \equiv \begin{bmatrix} u_0''' \\ \mathbf{x}''' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{00} - \mathbf{a}^0\delta_0''' & -\mathbf{a}^0\boldsymbol{\Gamma}_3 \\ \delta_0''' = \boldsymbol{\Gamma}_3\mathbf{a}_0 & \boldsymbol{\Gamma}_3 = \mathbf{A}^{-1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1''' \\ -\mathbf{u}''' \end{bmatrix} \equiv \mathfrak{A}_3\,(-\mathfrak{y}_3)$$

alakra, a (24*b*) *transzformációs formula* pedig az

$$\mathfrak{A}_3 = \mathfrak{A}_0 - \begin{bmatrix} \mathbf{a}^0 - \mathbf{0}^* \\ \mathbf{A} - \mathbf{E}_3 \end{bmatrix} \cdot \mathbf{A}^{-1} \cdot [\mathbf{a}_0\ -\mathbf{0},\ \mathbf{A} + \mathbf{E}_3] \equiv \mathfrak{A}_0 - \mathfrak{A}_{\mathrm{III}}^{(-)}\boldsymbol{\Gamma}_3\mathfrak{A}_{(+)}^{\mathrm{III}}$$

alakra egyszerűsödik. Az utóbbi alkalmazásával írható, hogy

$$\mathfrak{A}_3 = \left[\begin{array}{c|ccc} 0 & -4 & -5 & -1 \\ \hline 10 & 3 & 2 & 0 \\ 11 & 1 & 4 & 0 \\ 13 & 3 & 3 & 1 \end{array}\right] - \left[\begin{array}{ccc} -4 & -5 & -1 \\ \hline 2 & 2 & 0 \\ 1 & 3 & 0 \\ 3 & 3 & 0 \end{array}\right] \cdot \frac{1}{10} \cdot \begin{bmatrix} 4 & -2 & 0 \\ -1 & 3 & 0 \\ -9 & -3 & 10 \end{bmatrix} \cdot$$

$$\cdot \left[\begin{array}{c|ccc} 10 & 4 & 2 & 0 \\ 11 & 1 & 5 & 0 \\ 13 & 3 & 3 & 2 \end{array}\right] =$$

$$= \left[\begin{array}{c|ccc} 0 & -4 & -5 & -1 \\ \hline 10 & 3 & 2 & 0 \\ 11 & 1 & 4 & 0 \\ 13 & 3 & 3 & 1 \end{array}\right] - \frac{1}{10} \cdot \left[\begin{array}{ccc} -4 & -5 & -1 \\ \hline 2 & 2 & 0 \\ 1 & 3 & 0 \\ 3 & 3 & 0 \end{array}\right] \cdot \left[\begin{array}{c|ccc} 18 & 14 & -2 & 0 \\ 23 & -1 & 13 & 0 \\ 7 & -9 & -3 & 20 \end{array}\right] =$$

* V. ö. a *c)* α)-beli termelésprogramozási variánsfeladatokkal és számpéldákkal!

$$= \left[\begin{array}{c|ccc} 0 & -4 & -5 & -1 \\ \hline 10 & 3 & 2 & 0 \\ 11 & 1 & 4 & 0 \\ 13 & 3 & 3 & 1 \end{array}\right] - \left[\begin{array}{c|ccc} -19{,}4 & -4{,}2 & -5{,}4 & -2 \\ \hline 8{,}2 & 2{,}6 & 2{,}2 & 0 \\ 8{,}7 & 1{,}1 & 3{,}7 & 0 \\ 12{,}3 & 3{,}9 & 3{,}3 & 0 \end{array}\right] = \left[\begin{array}{c|ccc} 19{,}4 & 0{,}2 & 0{,}4 & 1 \\ \hline 1{,}8 & 0{,}4 & -0{,}2 & 0 \\ 2{,}3 & 0{,}1 & 0{,}3 & 0 \\ 0{,}7 & -0{,}9 & -0{,}3 & 1 \end{array}\right].$$

Ennek birtokában az utolsó (harmadik) alapegyenlet $-a$ (23a) alapján – így írható fel:

$$\mathfrak{v}_3 \equiv \begin{bmatrix} u_0''' \\ x_1''' \\ x_2''' \\ x_3''' \end{bmatrix} = \left[\begin{array}{c|ccc} 19{,}4 & 0{,}2 & 0{,}4 & 1 \\ \hline 1{,}8 & 0{,}4 & 0{,}2 & 0 \\ 2{,}3 & 0{,}1 & 0{,}3 & 0 \\ 0{,}7 & -0{,}9 & 0{,}3 & 1 \end{array}\right] \left[\begin{array}{c} 1''' \\ \hline -u_1''' \\ u_2''' \\ -u_3''' \end{array}\right] \equiv \mathfrak{A}_3(-\mathfrak{y}_3).$$

A végrehajtott csoportos változócsere után a primál és duál változók, valamint a célfüggvény értéke, miként az $\mathfrak{A}_3$-ból kiolvasható, következőképpen adódik:

$$x_1''' = 1{,}8 \quad x_2''' = 2{,}3 \quad x_3''' = 0{,}7;$$

$$u_1''' = u_2''' = u_3''' = 0, \quad u_0''' = 19{,}4.$$

Mint érdekességet, megemlítjük az előbbi, leegyszerűsödött transzformációs formulából az $I = 2$, $J = 1$ elemre nézve a következő:

$$\mathbf{A}_3 = \mathbf{A} - (\mathbf{A} - \mathbf{E})\mathbf{A}^{-1}(\mathbf{A} + \mathbf{E}) \equiv \mathbf{A} - (\mathbf{E} - \mathbf{A}^{-1})(\mathbf{A} + \mathbf{E}) \equiv \tag{26a}$$

$$\equiv \mathbf{A} - \mathbf{A} + \mathbf{E} - \mathbf{E} + \mathbf{A}^{-1} \equiv \mathbf{A}^{-1} \equiv \mathbf{\Gamma}_3$$

matrixazonosságot, amely nyilván az

$$a - \frac{(a-1)(a+1)}{a} \equiv a - \frac{a^2-1}{a} \equiv a - a + \frac{1}{a} \equiv \frac{1}{a} \tag{26b}$$

skalárazonosság analogonja.

Minthogy esetünkben $p = r = n = m$ ($=3$) és ennek megfelelően:

$$\mathbf{A}_{11} \equiv \mathbf{A}, \quad \mathbf{\Gamma}_{(3)} = \mathbf{A}_{11}^{-1} = \mathbf{A}^{-1}, \quad \mathbf{a}^{01} \equiv a^0, \quad \mathbf{u}_1 \equiv \mathbf{u}, \quad \mathbf{x}_1 \equiv \mathbf{x}$$

volt, ezért most a (25)-beli $\mathbf{a}_0^{(p)}$ és $\mathbf{a}_{(p)}^0$ vektorok és az $\mathfrak{A}_3$ szimplexmatrixból vett koordinátáik

$$\mathbf{a}_0^{(p)*} = (\mathbf{A}^{-1}\mathbf{a}_0)^* = [1{,}8 \;\; 2{,}3 \;\; 0{,}7] > \mathbf{0}, \quad \mathbf{a}_{(p)}^0 = -\mathbf{a}^0\mathbf{A}^{-1} = [0{,}2 \;\; 0{,}4 \;\; 1] > \mathbf{0}^*$$

módon alakulnak. Az $\mathfrak{A}_3$ matrix tehát már *optimális* és belőle – a (25) szerint –

$$\mathbf{x}_{opt}^* \equiv \mathbf{x}'''^* = (\mathbf{A}^{-1}\mathbf{a}_0)^* = [1{,}8 \;\; 2{,}3 \;\; 0{,}7] > \mathbf{0}^*, \quad \mathbf{u}_{opt} \equiv \mathbf{u}'''^* = [0, \; 0, \; 0] = \mathbf{0}^*,$$

$$u_{0\,opt} \equiv u_0''' = 19{,}4 > u_0 = 0$$

módon nyerhető a primál maximumfeladat, ill. a duál minimumfeladat optimális megoldása, ill. a két optimális program közös értéke.

Eredményünk — ellenőrizhetően — összahangban van a 4. példáéval.

β) A normálfeladat további kérdései

I°. A rendes eset második alesete.

1'. Térjünk rá most a normál maximumfeladat (4*a*) sajátságú rendes [és egyben (4*b*) tulajdonságú gyakorlati] esetének második alesetére. Ezt az jellemzi, hogy *akad olyan negatív a_{0l} elem, amelyhez tartozó $\mathbf{a}_l = \mathbf{A}\mathbf{e}_l$ vektoroknak nincs egyetlen pozitív koordinátája sem,* azaz

$$a_{0l} = \mathbf{a}^0\mathbf{e}_l < 0, \quad \text{de} \quad \mathbf{a}_l = [a_{il}] \leqq \mathbf{0}. \tag{27a}$$

Ez a helyzet nemcsak az $\mathfrak{A}_0$ induló szimplex matrixban állhat elő, hanem *bármelyik $\mathfrak{A}_p$ javító szimplex matrixban* is, mégpedig

$$a_{0l}^{(p)} = \mathbf{a}^0_{(p)}\mathbf{e}_l < 0, \quad \text{de} \quad \mathbf{a}_l^{(p)} = [a_{il}^{(p)}] \leqq \mathbf{0} \tag{27b}$$

módon.

2'. Megmutatjuk hogy a szóban forgó alesetben *a célfüggvénynek nincs felső korlátja,* maximumáról tehát nem lehet beszélni, s ezért a meghatározásra irányuló számítást, mint értelmetlent, *szükségtelen tovább folytatni.* Ui. alesetünkben legyen az pl. induláskor — a (27*a*) értelmében —

$$\mathbf{A}\mathbf{e}_l \equiv \mathbf{a}_l \leqq \mathbf{0}, \quad \text{így tetszőleges} \quad \lambda \geqq 0\text{-val} \quad \mathbf{x} = \lambda\mathbf{e}_l \geqq \mathbf{0} \tag{28a}$$

lehetséges megoldás, lévén

$$\mathbf{A}\mathbf{x} = \mathbf{A}\lambda(\mathbf{e}_l) = \lambda(\mathbf{A}\mathbf{e}_l) = \lambda\mathbf{a}_l \leqq \mathbf{0} < \mathbf{a}_0; \tag{28b}$$

a megfelelő program értéke — az $a_{0l} < 0$ körülmény számbavételével —

$$u_0 = -\mathbf{a}^0\mathbf{x} = -\mathbf{a}^0(\lambda\mathbf{e}_l) = -\lambda(\mathbf{a}^0\mathbf{e}_l) = -\lambda a_{0l} > K > 0, \tag{28c}$$

módon alakul, vagyis az u_0 célfüggvény a λ-val korlátlanul növelhető, q. e. d. [A *p*-edik lépésben előálló aleset tárgyalásánál a (27*b*) veendő figyelembe.]

Megjegyzendő, hogy e második aleset a gyakoratban alig fordul elő, csupán a teljesség kedvéért hoztuk szóba.

8. ***Pl.*** Tegyük fel, hogy e normálfeladat megoldása során az alábbi *szimplex-(alap-)egyenletre* jutottunk:

$$\mathfrak{v}_p \equiv \begin{bmatrix} u_0^{(p)} \\ \hdashline u_1^{(p)} \\ x_4^{(p)} \\ x_3^{(p)} \end{bmatrix} = \left[\begin{array}{c:cccc} 230 & -1 & 1 & 1 & 1 \\ \hdashline 20 & 0 & 1 & 0 & -1 \\ 30 & -1 & 1 & -1 & 0 \\ 50 & -2 & 0 & 1 & 1 \end{array}\right] \begin{bmatrix} 1 \\ \hdashline -x_1^{(p)} \\ -x_2^{(p)} \\ -u_3^{(p)} \\ -u_4^{(p)} \end{bmatrix} \equiv \mathfrak{A}_p(-\mathfrak{y}_p).$$

E program még tovább javítható lenne, lévén $a_{01}^{(p)} = -1 < 0$, azonban $\mathbf{a}_1^{(p)*} = [0, -1, -2] \leqq \mathbf{0}^*$, tehát koordinátái közül pozitív generáló elem nem választható. A *második alesettel* állunk tehát szemben; minthogy ilyenkor a célfüggvénynek nincs felső korlátja, ezért a további értelmetlen számítást mellőzzük.

II°. Az algoritmus befejezése (SMA$_p$). *1'.* A normál feladat rendes esetének tárgyalását befejezendő, vegyük számba még egyszer a *szimplex eljárás megszakadásának*, befejezésének (már említett) *két lehetséges okát.*

Az egyik lehetséges ok olyan $\mathfrak{A}_p$ szimplex matrix fellépése, amelyben

$$\mathbf{a}_{(p)}^0 \geqq \mathbf{0}, \quad \text{azaz} \quad a_{0j}^{(p)} = \mathbf{a}_0^{(p)}\mathbf{e}_j \geqq 0 \quad (j = 1, 2, \ldots, m); \qquad (29a)$$

ekkor — mint a (26*a*, *b*) formulákkal kapcsolatban már megemlítettük — az $\mathfrak{A}_p$ már *optimális megoldást szolgáltat.*

A másik lehetséges ok olyan $\mathfrak{A}_p$ matrix fellépése, amelyben ugyan valamely

$$a_{0l}^{(p)} = \mathbf{a}_{(p)}^0\mathbf{e}_l < 0, \text{ de } \mathbf{a}_l^{(p)} \leqq \mathbf{0}, \text{ azaz } a_{il}^{(p)} = \mathbf{a}_l^{(p)}\mathbf{e}_i \leqq 0 \quad (i = 1, 2, \ldots, n); \quad (29b)$$

ilyenkor — mint a (28*a*-*c*) formulák során igazoltuk — *a célfüggvény felülről nem korlátos.*

2'. Hangsúlyozandó, hogy e két lehetséges ok közül *valamelyik feltétlenül bekövetkezik, mégpedig véges számú lépésben.* E megállapítás egyszerűen azon a tényen alapul, hogy a $\mathfrak{B}_0 = [\mathfrak{e}_0, \mathfrak{e}_1, \ldots, \mathfrak{e}_n]$ induló bázisról — az $\mathfrak{a}_1, \mathfrak{a}_2, \ldots, \mathfrak{a}_m$ vektorok igénybevételével eszközölt $\mathfrak{e}_{k_1} \leftrightarrow \mathfrak{a}_{l_1}, \mathfrak{e}_{k_2} \leftrightarrow \mathfrak{a}_{l_2}, \ldots, \mathfrak{e}_{k_q} \leftrightarrow \mathfrak{a}_{l_q}$ vektorcserék útján — rendre új $\mathfrak{B}_1, \mathfrak{B}_2, \ldots, \mathfrak{B}_q$ bázisra való áttérés, ezzel párhuzamosan pedig az $\mathfrak{A}_0$ induló szimplex matrixról rendre új $\mathfrak{A}_1, \mathfrak{A}_2, \ldots, \mathfrak{A}_q$ matrixra való átmenet csupán véges számban lehetséges, és ezen belül valamelyik $\mathfrak{A}_p$ matrixnak az optimumot, vagy ennek hiányát kell jeleznie a (29*a*), ill. a (29*b*) szerint [ahol az $\mathfrak{a}_{(p)}^0$ vektor az $\mathfrak{A}_p$ matrix I, II, indexű eleme].

3'. Végül emeljük ki a szimplex módszer azon *nagy jelentőségű* sajátságát, hogy *nem az összes lehetséges bázisokkal kapcsolatban igényel vizsgálatot,* hanem csak az előzőkhöz képest „javító" (vagy legalábbis nem „rontó") bázisokkal kapcsolatban. Az utóbbiak száma rendszerint *csak töredéke* az előbbinek, amely körülmény számítástechnikai szempontból nyilvánvalóan óriási előny.

III°. Az elfajulás és megszüntetése induláskor. (SεMA$_0$) *1'.* A normálfeladat rendes esetének teljes letárgyalása után térjünk át most ún. *elfajuló v. degenerált esetének* vizsgálatára. Ez az eset felléphet az $\mathfrak{A}_0$ induló szimplex matrixban is, és bármelyik magasabb indexű, pl. az $\mathfrak{A}_p$ matrixban is. Az elfajulás vagy degeneráció *jellemző tünete* az $\mathfrak{A}_0$, ill. az $\mathfrak{A}_p$ matrixban az, hogy

$$\mathbf{a}_0 \geqq \mathbf{0}, \text{ mert pl. } a_{0q} = 0, \text{ ill. } \mathbf{a}_0^{(p)} \geqq \mathbf{0}, \text{ mert pl. } a_{0q}^{(p)} = 0. \qquad (30a, b)$$

Az $a_{0q} = 0$ a feladat *egyik adata;* az $a_{0q}^{(p)} = 0$ értékalakulás viszont onnan adódik, hogy az $\mathfrak{A}_{p-1}$ matrix (soron következő) p indexű oszlopában [ahol tehát $a_{0p}^{(p-1)} < 0$] *a generáló elem választása nem egyértelmű,* mert pl.

$$\delta_0^{(p)} = \frac{a_{p0}^{(p-1)}}{a_{pp}^{(p-1)}} = \frac{a_{q0}^{(p-1)}}{a_{qp}^{(p-1)}} = \min \frac{a_{i0}^{(p-1)}}{a_{ip}^{(p-1)+}}, \tag{31a}$$

következésképpen az $a_{pp}^{(p-1)} = 1/\gamma_{(p)}$ választásnál

$$a_{p0}^{(p)} = \delta_0^{(p)} \quad \text{és} \quad a_{q0}^{(p)} = a_{q0}^{(p-1)} - \delta_0^{(p)} a_{pq}^{(p-1)} = 0, \tag{31b}$$

az $a_{pq}^{(p-1)} = 1/\gamma_{(p)}$ választásnál pedig fordítva, $a_{q0}^{(p)} = \delta_0^{(p)}$ és $a_{p0}^{(p)} = 0$. Ilyen körülmények között — eddigi (s a rendes esetre vonatkozó) ismereteink alapján — nem tudjuk a szimplex számításokat megindítani, ill. folytatni.

2'. Kérdés, hogyan lehet az elfajulás okozta fenti nehézségeket leküzdeni, és a normálfeladat vázolt elfajuló esetét a már jól ismert *rendes esetre visszavezetni.* E célra először *Dantzig,* majd általánosabban *Charnes* adott módszert. Itt az utóbbi ún. *perturbációs eljárását* ismertetjük, amely elméletileg és számítástechnikailag egyaránt előnyösen alkalmazható a degenerációs probléma elintézésére. Az eljárás lényege az, hogy az $\mathbf{a}_0$ vektort kiegészítjük egy additív

$$\boldsymbol{\varepsilon} = [\varepsilon, \varepsilon^2, \varepsilon^3, \ldots, \varepsilon^n] > \mathbf{0} \quad (0 < \varepsilon \ll 1, \ \lim_{\varepsilon \to 0} \boldsymbol{\varepsilon} = \mathbf{0}) \tag{32}$$

vektorral, amelyet egyébként az ε számszerű ismerete nélkül használunk a számítások során, azok végeztével pedig az $\varepsilon \to 0$ határátmenettel $\mathbf{0}$-sá tesszük, vagyis (mint összeadandót) megszüntetjük. E kiegészítéssel az esetleges *indulási degeneráció* ($\mathbf{a}_0 \geqq \mathbf{0}$) azonnal kiküszöbölődik, lévén

$$\mathbf{a}_0' = \mathbf{a}_0 + \boldsymbol{\varepsilon} = \mathbf{B}_0^{-1}(\mathbf{a}_0 + \boldsymbol{\varepsilon}) > \mathbf{0} \quad (\mathbf{B}_0^{-1} \equiv \mathbf{E}_n), \tag{33}$$

ami már az indulási rendes eset jellemzője (SεMA$_0$).

IV°. A z e l f a j u l á s m e g s z ü n t e t é s e m e n e t k ö z b e n. (SεMA$_q$) *1'.* Ugyanezen kiegészítéssel *a p-edik szimplex lépésnél jelentkező degeneráció* [$\mathbf{a}_0^{(p)} \geqq \mathbf{0}$] is kiküszöbölhető. Ha ugyanis a $(p-1)$-edik bázis vektorait szolgáltató

$$\underset{(n\times n)}{\mathbf{B}_{(p-1)}} = \begin{bmatrix} \mathbf{A}_{11} & \mathbf{0} \\ \mathbf{A}_{21} & \mathbf{E} \end{bmatrix} \quad \text{matrix} \quad \underset{(n\times n)}{\mathbf{B}_{(p-1)}^{-1}} = \begin{bmatrix} \mathbf{A}_{11}^{-1} & \mathbf{0} \\ -\mathbf{A}_{21}\mathbf{A}_{11}^{-1} & \mathbf{E} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \beta^1 \\ \vdots \\ \beta^n \end{bmatrix} \quad \text{inverzével} \tag{34a}$$

kapcsolatos és egyben a (24c)-re utaló

$$\mathbf{a}_0^{(p-1)} = \begin{bmatrix} \mathbf{a}_{10}^{(p-1)} \\ \mathbf{a}_{20}^{(p-1)} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{A}_{11}^{-1}\mathbf{a}_{10} \\ \mathbf{a}_{20} - \mathbf{A}_{21}\mathbf{A}_{11}^{-1}\mathbf{a}_{10} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{A}_{11}^{-1} & \mathbf{0} \\ -\mathbf{A}_{21}\mathbf{A}_{11}^{-1} & \mathbf{E} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{a}_{10} \\ \mathbf{a}_{20} \end{bmatrix} = \mathbf{B}_{(p-1)}^{-1}\mathbf{a}_0 \tag{34b}$$

összefüggésben az $\mathbf{a}_0$ vektort a fentebbi $\mathbf{a}_0'$ vektorral helyettesítjük,

$$\mathbf{a}_0^{(p-1)'} = [a_{i0}^{(p-1)'}] = \mathbf{B}_{(p-1)}^{-1}(\mathbf{a}_0 + \varepsilon) = [\beta^i](\mathbf{a}_0 + \varepsilon) =$$

$$= \left[a_{i0}^{(p-1)} + \sum_{j=0}^{n} \beta_{ij}\varepsilon^j \right] \quad (i = 1, 2, \ldots, n) \tag{35a}$$

módon, akkor — a $\mathbf{B}_{-1}^{(p-1)}$ inverzmatrix $\beta^1, \ldots, \beta^i, \ldots, \beta^n$ sorvektorainak l. ftls.-e következtében — *a generáló elem választása most már egyértelmű lesz.* Nevezetesen — a (31*a, b*) figyelembevételével —

$$\delta_0^{(p)'} = \frac{a_{p0}^{(p-1)'}}{a_{pp}^{(p-1)}} = \delta_0^{(p)} + \sum_{j=1}^{n} \delta_{0j}^{(p)}\varepsilon^j < \frac{a_{q0}^{(p-1)'}}{a_{qp}^{(p-1)}} = \delta_0^{(p)} + \sum_{j=1}^{n} \delta_{0j}^{(q)}\varepsilon^j, \tag{35b}$$

hacsak

$$\delta_{0\sigma}^{(p)} = \delta_{0\sigma}^{(q)}, \text{ amíg } \sigma = 1, 2, \ldots, s-1, \text{ de már } \delta_{0s}^{(p)} < \delta_{0s}^{(q)}, \tag{35c}$$

amikoris a generáló elemet nyilván

$$a_{pp}^{(p-1)} \equiv 1/\gamma_{(p)} \tag{35d}$$

módon választjuk, és így

$$a_{p0}^{(p)} = \delta_0^{(p)'}, \quad a_{q0}^{(p)} = a_{q0}^{(p-1)'} - \delta_0^{(p)'}a_{qp}^{(p-1)} > 0 \tag{35e}$$

adódik; vagy pedig

$$\delta_{0s}^{(p)} > \delta_{0s}^{(q)}$$

esetén

$$\delta_0^{(p)'} = \frac{a_{q0}^{(p-1)'}}{a_{qp}^{(p-1)}} < \frac{a_{p0}^{(p-1)}}{a_{pp}^{(p-1)}} \tag{36a}$$

és akkor

$$a_{qp}^{(p-1)} \equiv 1/\gamma_{(p)}, \text{ továbbá } a_{q0}^{(p)} = \delta_0^{(p)'}, \quad a_{p0}^{(p)} > 0. \tag{36b}$$

2'. A most vázolt módszer *akkor is alkalmas* a degeneráció megszüntetésére, *ha generáló elemként kettőnél több elem is szóba jöhet;* ilyenkor természetesen kettőnél több ε-hatványsor együtthatóit kell — a (35*b, c*) mintájára — összehasonlítani.

Egyebekben a szimplex módszert az elfajuló esetben is *ugyanúgy alkalmazzuk,* mint a korábban részletezett rendes esetben.

Megjegyzendő, hogy a szerző által javasolt *szimplex-matrixalgoritmus* (SMA) elfajulás előfordulása esetén is alkalmazható, csakhogy ilyenkor a formulában szereplő $a_{k_q l_q}^{(q)}$ generáló elem választása az imént mondottak értelmében, vagyis

$$\delta_0^{(q)} = \frac{a_{k_q 0}^{(q)'}}{a_{k_q l_q}^{(q)}} = \min \frac{a_{i0}^{(q)'}}{a_{il_q}^{(q)+}} \quad (a_{k_q l_q}^{(q)} > 0, \quad a_{0l_q}^{(q)} < 0), \tag{37}$$

$$a_{i0}^{(q)'} = \mathbf{e}^i\mathbf{a}_0^{(q)'} = \mathbf{e}^i\mathbf{B}_q^{-1}(\mathbf{a}_0 + \varepsilon) = a_{i0}^{(q)} + \sum_{j=1}^{n} \beta_{ij}\varepsilon^j \quad (0 \leqq \varepsilon \ll 1) \tag{38}$$

módon eszközlendő (SεMA$_q$).

9. Pl. Megoldandó az alábbi *degenerációs* l. prs-i feladat, a *perturbációs eljárással* kiegészített szimplex-matrixalgoritmussal (SεMA):*

$$x_1 \geqq 0,\quad x_2 \geqq 0,\quad x_3 \geqq 0,\quad x_4 \geqq 0;$$

$$\left.\begin{aligned} &\frac{1}{4}x_1 - 60x_2 - \frac{1}{25}x_3 + 9x_4 \leqq 0 \\ &\frac{1}{2}x_1 - 90x_2 - \frac{1}{50}x_3 + 3x_4 \leqq 0 \\ &\frac{3}{4}x_1 - 150x_2 + \frac{1}{50}x_3 - 6x_4 = \text{Max!} \end{aligned}\right\}$$

— A feladat *bővített alakban* ilyen:

$$x_1 \geqq 0,\quad x_2 \geqq 0,\quad x_3 \geqq 0,\quad x_4 \geqq 0;\quad u_1 \geqq 0,\quad u_2 \geqq 0,\quad u_3 \geqq 0;$$

$$\left.\begin{aligned} u_0 &= 0 - \frac{3}{4}(-x_1) + 150(-x_2) - \frac{1}{50}(-x_3) + 6(-x_4) = \text{Max!} \\ u_1 &= 0 + \frac{1}{4}(-x_1) - 60(-x_2) - \frac{1}{25}(-x_3) + 9(-x_4) \\ u_2 &= 0 + \frac{1}{2}(-x_1) - 90(-x_2) - \frac{1}{50}(-x_3) + 3(-x_4) \\ u_3 &= 1 + 0(-x_1) + 0(-x_2) + 1(-x_3) + 0(-x_4) \end{aligned}\right\}$$

Induló szimplexegyenlet:

$$\mathfrak{u} \equiv \begin{bmatrix} u_0 \\ \hline u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{bmatrix} = \left[\begin{array}{c|cccc} 0 & -\frac{3}{4} & 150 & -\frac{1}{50} & 6 \\ \hline 0+\varepsilon & \frac{1}{4} & -60 & -\frac{1}{25} & 9 \\ 0+\varepsilon^2 & \boxed{\frac{1}{2}} & -90 & -\frac{1}{50} & 3 \\ 1+\varepsilon^3 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{array}\right] \begin{bmatrix} 1 \\ \hline -x_1 \\ -x_2 \\ -x_3 \\ -x_4 \end{bmatrix} \equiv \mathfrak{A}_0(-\mathfrak{x}).$$

* Az irodalomban kevés ilyen alkalmazási példa található; e példa — más feldolgozásban — *Beale* és *Gass* [3] munkájában szerepel.

Már ez *degenerációs,* lévén $\mathbf{a}_0 = [0, 0, 1]^* \geqq \mathbf{0}$. A generáló elem választása sem egyértelmű, mert — pl. az $a_{01} = 3/4 < 0$-sal dolgozva —

$$\delta_0 = \frac{a_{10}}{a_{11}} = \frac{0}{1/4} = \frac{a_{20}}{a_{21}} = \frac{0}{1/2} = 0.$$

A *Charnes*-féle *perturbációs eljárással* élve, a (33) és a (35*a*-*c*) szerint írható, hogy

$$\mathbf{a}_0' = \mathbf{a}_0 + \boldsymbol{\varepsilon} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \varepsilon \\ \varepsilon^2 \\ \varepsilon^2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \varepsilon \\ \varepsilon^2 \\ 1 + \varepsilon^3 \end{bmatrix}$$

(ezt az $\mathfrak{A}_0$-ba is beírjuk), továbbá

$$\delta_0' = \frac{a_{20}'}{a_{21}} = 0 + 2\varepsilon^2 = 2\varepsilon^2 < \frac{a_{10}'}{a_{11}} = 0 + 4\varepsilon = 4\varepsilon,$$

tehát az induló generáló elem és az oszlopfaktorok

$$a_{12} = \frac{1}{\gamma} = \frac{1}{2}, \qquad \delta_0 = 2\varepsilon^2, \qquad \delta_2 = -180, \qquad \delta_3 = -\frac{1}{25}, \qquad \delta_4 = 6$$

értékűek lesznek; végül $a_{20}^{(1)} = \delta_0' = 2\varepsilon^2$, $a_{10}^{(1)} = \varepsilon - 2\varepsilon^2 \cdot \frac{1}{4} > 0$.

Ezzel az induló degeneráció teljesen eltűnt.

Első szimplexegyenlet:

$$\mathfrak{v}_1 \equiv \begin{bmatrix} u_0' \\ \hline u_1' \\ x_1' \\ u_3' \end{bmatrix} = \left[\begin{array}{c|cccc} 0 + \frac{2}{4}\varepsilon^2 & \frac{3}{2} & 15 & -\frac{1}{20} & \frac{21}{2} \\ \hline \varepsilon - \frac{1}{2}\varepsilon^2 & -\frac{1}{2} & -15 & -\frac{1}{100} & \frac{15}{2} \\ 2\varepsilon^2 & 2 & -180 & -\frac{1}{25} & 6 \\ 1 + \varepsilon^3 & 0 & 0 & \boxed{1} & 0 \end{array}\right] \begin{bmatrix} 1 \\ \hline -u_2' \\ -x_2' \\ -x_3' \\ -x_4' \end{bmatrix} \equiv \mathfrak{A}_1(-\mathfrak{y}_1).$$

Ez már *rendes esetet* mutat! Itt

$$a_{03}^{(1)} = -\frac{1}{20} < 0,$$

a generáló elem pedig

$$a_{33}^{(1)} = 1/\gamma_{(1)} = 1.$$

Második szimplexegyenlet:

$$\mathfrak{v}_2 = \mathfrak{A}_2(-\mathfrak{y}_2),$$

$$\begin{bmatrix} u_0'' \\ \hline u_1'' \\ x_1'' \\ x_3'' \end{bmatrix} = \left[\begin{array}{c|cccc} \frac{3}{2}\varepsilon^2 + \frac{1}{20}(1+\varepsilon^3) & \frac{3}{2} & 15 & \frac{1}{20} & \frac{21}{2} \\ \hline \varepsilon - \frac{\varepsilon^2}{2} + \frac{3}{100}(1+\varepsilon^3) & -\frac{1}{2} & -15 & \frac{3}{100} & \frac{15}{2} \\ 2\varepsilon^2 + \frac{1}{25}(1+\varepsilon^3) & 2 & -180 & \frac{1}{25} & 6 \\ 1+\varepsilon^3 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{array}\right] \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ \hline -u_2'' \\ -x_2'' \\ -u_3'' \\ -x_4'' \end{bmatrix}.$$

Ez már az *optimális programot* adja, mert valamennyi $a''_{0j} > 0$; nevezetesen ($\varepsilon \to 0$ határátmenettel):

$$\mathbf{x}_{\text{opt}} = \lim_{\varepsilon\to 0} \mathbf{x}'' = \left[\frac{1}{25},\ 0,\ 1,\ 0\right]^*, \qquad \mathbf{u}_{\text{opt}} = \lim_{\varepsilon\to 0} \mathbf{u}'' = \left[\frac{3}{100},\ 0,\ 0\right]^*,$$

$$u_{\text{opt}} = \lim_{\varepsilon\to 0} u_0'' = \frac{1}{20}.$$

Említésre méltó, hogy e feladat megoldását *Gass* [3] sokkal körülményesebben (6 lépésben) nyeri.

γ) Nem normálfeladatok. Módosított algoritmusok

I°. Módosított normálfeladat és megoldása. *1'.* Amint a *b) α)* I°-ben láttuk, a l. prs normál maximumfeladatának lineáris korlátozó feltételei *mind* ($\leqq$ értelmű) *egyenlőtlenség alakjában* jelentkeztek. Előfordul azonban, hogy ezek *egy részének* (mondjuk az első p-nek) *egyenlőségként* kell fennállnia. Az így nyert, ún. *módosított normálfeladat* tehát a következőképpen formulázható meg (eredeti, ill. bővített alakban, matrixszimbolika alkalmazásával):

$$\left.\begin{aligned} \mathbf{x} &\geqq \mathbf{0} \\ a_{00} - \mathbf{a}^0\mathbf{x} &= \text{Max!} \\ \mathbf{A}_1\mathbf{x} &= \mathbf{a}_{10} \\ \mathbf{A}_2\mathbf{x} &\leqq \mathbf{a}_{20} \end{aligned}\right\}, \quad \text{ill.} \quad \left\{\begin{aligned} &\mathbf{x}^* \geqq \mathbf{0}^*, \quad \mathbf{u}^* = [\mathbf{u}_1^*, \mathbf{u}_1^*] \geqq \mathbf{0}^* && (39a) \\ &u_0 = a_{00} + \mathbf{a}^0(-\mathbf{x}) = \text{Max!} && (39b) \\ &\mathbf{u}_1 = \mathbf{a}_{10} + \mathbf{A}_1(-\mathbf{x}) = \mathbf{0} && (39c) \\ &\mathbf{u}_2 = \mathbf{a}_{20} + \mathbf{A}_2(-\mathbf{x}) \geqq \mathbf{0} && (39d) \end{aligned}\right.$$

$$(a_{00} = 0, \quad \mathbf{a}_{10} \geqq \mathbf{0}, \quad \mathbf{a}_{20} \geqq \mathbf{0}); \qquad (39e)$$

itt $\mathbf{a}_{10}$, $\mathbf{u}_1$, $\mathbf{A}_1$ nyilván p soros, $\mathbf{a}_{20}$, $\mathbf{u}_2$, $\mathbf{A}_2$ pedig $n-p$ soros.

A megfelelő induló szimplex-(alap-)egyenlet

$$\mathfrak{u} \equiv \left[\begin{array}{c} u_0 \\ \hline {}^*\mathbf{u}_1 \\ \mathbf{u}_2 \end{array}\right] = \left[\begin{array}{c|c} a_{00} & \mathbf{a}^0 \\ \hline \mathbf{a}_{10} & \mathbf{A}_1 \\ \mathbf{a}_{20} & \mathbf{A}_2 \end{array}\right] \left[\begin{array}{c} 1 \\ \hline -\mathbf{x} \end{array}\right] \equiv \mathfrak{A}_0(-\mathfrak{x}). \tag{40}$$

módon írható fel; ebben azonban egyelőre még — az eddigieknek megfelelően —

$$\mathbf{A}_1\mathbf{x} \leqq \mathbf{a}_{10}, \quad \text{azaz} \quad \mathbf{u}_1 = \mathbf{a}_{10} + \mathbf{A}_1(-\mathbf{x}) \geqq \mathbf{0} \tag{41a}$$

értendő, a kívánt (39c) helyett. A (41a)-ból — az $\mathbf{e}^* = [\underset{1}{1}, \underset{2}{1}, \ldots, \underset{p}{1}]$ vektorral való szorzás útján —

$$\mathbf{e}^*\mathbf{A}_1\mathbf{x} = \sum_{i=1}^{p} \mathbf{a}^i\mathbf{x} \leqq \mathbf{e}^*\mathbf{a}_{10} = \sum_{i=1}^{p} a_{i0}, \quad \text{azaz} \quad \sum_{i=1}^{p} u_i = \sum_{i=1}^{p} a_{i0} + \sum_{i=1}^{p} \mathbf{a}^i(-\mathbf{x}) \geqq 0 \tag{41b}$$

következik. Ennek figyelembevételével a szóban forgó nehézség kiküszöbölhető.

2'. A (39) módosított normálfeladatnak közönséges normálfeladatra való visszavezetése érdekében *a szakirodalomban másodlagos célfüggvényt szoktak bevezetni,** mégpedig az 1, 2, ..., *p* indexű egyenletek (negatív) összegét, vagyis az

$$\left(-\sum_{i=1}^{p} u_i = -\mathbf{e}^*\mathbf{u}_1 =\right) \quad U_0 = -\mathbf{e}^*\mathbf{a}_{10} - \mathbf{e}^*\mathbf{A}_1(-\mathbf{x}) \quad (\mathbf{e}^* = [1,1,\ldots 1], \quad \mathbf{u}_1 \geqq \mathbf{0}) \tag{42}$$

kifejezést használják ilyen minőségben. Keresik ennek a *maximumát*, célszerűen a jól ismert szimplexmódszerrel s ha ez — bizonyos számú (p) szimplex-lépés után — éppen *zérusnak* adódik, azaz $U_0^{(p)} = \max U_0 = 0$, akkor ($\mathbf{u}_1^{(p)} \geqq \mathbf{0}$ figyelembevételével) a (39c) szerinti követelmény nyilván teljesül, s a továbbiakban már csak az $u_0 = a_{00} + \mathbf{a}^0(-\mathbf{x})$ közönséges függvény maximálásával kell foglalkozni, a szokásos módon. Ha viszont $U_0^{(p)} = \max U_0 < 0$, akkor $\mathbf{u}_1^{(p)} \neq \mathbf{0}$, tehát a módosított normálfeladatnak ilyenkor *nincs megoldása.*

A fentiekben részletesen ismertetett *szimplex-matrixalgoritmusunk* (SMA) ennél sokkal célszerűbb eljárást enged meg és szükségtelenné teszi az U_0 másodlagos célfüggvény alkalmazását. A (39c) feltétel nyilván teljesíthető, ha az ottani $\mathbf{A}_1$ matrixban található *p-edrangú* (tehát teljes sorrangú) $\mathbf{A}_{1_p}$ *almatrix,* mondjuk,

$$\mathbf{A}_{1_p} = [\mathbf{a}_{1l_1}, \mathbf{a}_{1l_2}, \ldots, \mathbf{a}_{1l_p}], \quad |\mathbf{A}_{1_p}| \neq 0. \tag{43a}$$

* L. *Krekó* [2].

Tegyük fel, hogy van ilyen, és ez — az egyszerűbb tárgyalás kedvéért — legyen éppen a *bal oldali* kvadratikus almatrix, azaz

$$\mathbf{A}_{1_p} \equiv \mathbf{A}_{11} = [\mathbf{a}_{11}, \mathbf{a}_{12}, \ldots, \mathbf{a}_{1_p}], \quad |\mathbf{A}_{11}| \neq 0. \tag{43b}$$

A (39*b*, *c*, *d*) alapegyenlet-rendszert ez esetben az

$$\mathfrak{u} \equiv \left[\begin{array}{c} u_0 \\ \hline {}^*\mathbf{u}_1 \\ \mathbf{u}_2 \end{array}\right] = \left[\begin{array}{c|cc} a_{00} & \mathbf{a}^{01} & \mathbf{a}^{02} \\ \hline \mathbf{a}_{10} & \mathbf{A}_{11} & \mathbf{A}_{12} \\ \mathbf{a}_{20} & \mathbf{A}_{21} & \mathbf{A}_{22} \end{array}\right] \left[\begin{array}{c} 1 \\ \hline -\mathbf{x}_1 \\ -\mathbf{x}_2 \end{array}\right] \equiv \mathfrak{A}_0(-\mathfrak{x}) \tag{44a}$$

részletesebb alakban ésszerű felírni. Nyilvánvaló, hogy itt — az eljárás *első fázisaként* — az $\mathbf{A}_{11}$-gyel mint generáló matrixszal (p szimplex lépést egyesítő) *szimplexugrást* lehet lebonyolítani, a neki megfelelő $\mathbf{u}_1 \leftrightarrow \mathbf{x}_1$ vektorváltozó-csere kíséretében, a következőképpen:

$$\mathfrak{v}_p = \mathfrak{A}_p(-\mathfrak{y}_p) \equiv \left\{\mathfrak{A}_0 - \left[\begin{array}{c} \mathbf{a}^{01} - \mathbf{0}^* \\ \hline \mathbf{A}_{11} - \mathbf{E} \\ \mathbf{A}_{21} - \mathbf{O} \end{array}\right] \cdot \mathbf{A}_{11}^{-1} \cdot [\mathbf{a}_{10} + \mathbf{0} \,|\, \mathbf{A}_{11} + \mathbf{E}_p, \mathbf{A}_{12} + \mathbf{O}]\right\} \cdot [-\mathfrak{y}_p], \tag{44b}$$

$$\left[\begin{array}{c} u_0^{(p)} \\ \hline \mathbf{x}_1^{(p)} \\ \mathbf{u}_2^{(p)} \end{array}\right] = \left[\begin{array}{c|cc} a_{00} - \mathbf{a}^{10}\delta_0^{(p)} & -\mathbf{a}^{01}\Gamma_{(p)} & \mathbf{a}^{02} - \mathbf{a}^{01}\Delta_2^{(p)} \\ \hline \delta_0^{(p)} = \Gamma_{(p)}\mathbf{a}_{10} & \Gamma_{(p)} = \mathbf{A}_{11}^{-1} & \Delta_2^{(p)} = \Gamma_{(p)}\mathbf{A}_{12} \\ \mathbf{a}_{20} - \mathbf{A}_{21}\delta_0^{(p)} & -\mathbf{A}_{21}\Gamma_{(p)} & \mathbf{A}_{22} - \mathbf{A}_{21}\Delta_2^{(p)} \end{array}\right] \left[\begin{array}{c} 1 \\ \hline -\mathbf{u}_1^{(p)} \\ -\mathbf{x}_2^{(p)} \end{array}\right].$$

Ily módon az $\mathbf{u}_1^{(p)}$ a nem-bázisváltozók közé került és ezzel a (39*c*) feltétel automatikusan *kielégítést nyert*. Előfordulhat egyébként, hogy ez a (p indexű) program az indulóhoz (0 indexűhöz) képest nem javított, sőt rontott értékű, azaz *esetleg*

$$u_0^{(p)} = a_{00} - \mathbf{a}^{10}\,\delta_0^{(p)} \leqq 0. \tag{44c}$$

A továbbiakban már az $u_1 = u_2 = \ldots = u_p = 0$ változók *egyikét sem óhajtjuk visszacserélni*, vagyis a nemzérus értékű bázisváltozók közé bevonni, mert ezzel a (39*c*) teljesülése újra megszűnne. Ezért a $-\mathbf{u}_1^{(p)}$-t és $\mathfrak{A}_p$-ben a neki megfelelő blokkoszlopot célszerűen *töröljük*, és az így nyert (és a törlésre ′-vel utaló)

$$\mathfrak{v}_p \equiv \left[\begin{array}{c} u_0^{(p)} \\ \hline \mathbf{x}_1^{(p)} \\ \mathbf{u}_2^{(p)} \end{array}\right] = \left[\begin{array}{c|c} a_{00} - \mathbf{a}^{10}\delta_0^{(p)} & \mathbf{a}^{02} - \mathbf{a}^{01}\Delta_2^{(p)} \\ \hline \delta_0^{(p)} & \Delta_2^{(p)} \\ \mathbf{a}_{20} - \mathbf{A}_{21}\delta_0^{(p)} & \mathbf{A}_{22} - \mathbf{A}_{21}\Delta_2^{(p)} \end{array}\right] \left[\begin{array}{c} 1 \\ \hline -\mathbf{x}_2^{(p)} \end{array}\right] \equiv \mathfrak{A}'_p(-\mathfrak{y}'_p) \tag{45a}$$

szűkebb normálfeladat megoldására térünk át, eljárásunk *második fázisaként*, mégpedig a

$$\mathfrak{v}_{q+1} = \mathfrak{A}'_{q+1}(-\mathfrak{y}'_{q+1}) \equiv \mathbf{a}_0^{(q+1)} + \mathbf{A}''_{q+1}(-\mathbf{y}'_{q+1}) =$$

$$= \mathfrak{v}_q - (v_{k_q} - y_{l_q})\,\mathfrak{e}_{k_q} = [\mathfrak{A}'_q - \gamma_q(\mathfrak{a}_{l_q}^{(q)} - \mathfrak{e}_{k_q})(\mathfrak{a}'^{k_q}_{(q)} + \mathfrak{e}'^{l_q})][-\mathfrak{y}'_q + (y_{l_q} - v_{k_q})\,\mathfrak{e}_{l_q}]$$

$$\langle q = p, p+1, \ldots;\ \mathbf{y}'_{q+1} = \mathbf{0}\text{-nál } \mathfrak{v}_{q+1} = \mathfrak{a}_0^{(q+1)} \rangle \qquad (45b)$$

alakú *szimplex-matrixalgoritmusunk* (SMA) alkalmazásával. Ennek során már szigorúan szem előtt tartandó a program értékének *állandó javítása* (ill. alternatív optimumoknál értéktartása).

3'. Eddig hallgatólagosan a rendes esetet tételeztük fel. Ellenkező, vagyis *elfajuló (degenerációs) esetben* algoritmusunkat a *Charnes*-féle perturbációs módszerrel kombináljuk, a β) III°—IV°-ben előadottak szerint.

Ezzel a módosított normálfeladat megoldását *teljes egészében tisztáztuk*, s most számpéldán is bemutathatjuk.

10. Pl. Oldjuk meg a (44—45) szimplex matrixalgoritmussal az

$$x_1 \geqq 0, \quad x_2 \geqq 0, \quad x_3 \geqq 0, \quad x_4 \geqq 0;$$

$$\left.\begin{aligned} 2x_1 - 2x_2 - x_3 + x_4 &= \text{Max!} \\ 2x_1 + 4x_2 + x_3 \qquad &\leqq 100 \\ x_1 \qquad + 5x_3 + x_4 &\leqq 200 \\ x_2 + 4x_3 - 2x_4 &= 200 \\ x_1 + x_2 \qquad + x_4 &= 150 \end{aligned}\right\}$$

formularendszerrel megadott *módosított normálfeladatot!*

— A feladat (duál változókkal) *bővített alakja*

$$x_1 \geqq 0, \ldots, x_4 \geqq 0; \quad u_1 \geqq 0, \quad u_2 \geqq 0, \quad u_3 = u_4 = 0;$$

$$\left.\begin{aligned} u &= 0 - 2(-x_1) + 2(-x_2) + 1(-x_3) - 1(-x_4) = \text{Max!} \\ u_1 &= 100 + 2(-x_1) + 4(-x_2) + 1(-x_3) + 0(-x_4) \\ u_2 &= 200 + 1(-x_1) + 0(-x_2) + 5(-x_3) + 1(-x_4) \\ {}^*u_3 &= 200 + 0(-x_1) + 1(-x_2) + 4(-x_3) + 2(-x_4) \\ {}^*u_4 &= 150 + 1(-x_1) + 1(-x_2) + 0(-x_3) + 1(-x_4) \end{aligned}\right\},$$

ahol *-gal jelöljük meg a zérussá teendő duál változókat. A (42) szerinti *másodlagos célfüggvény* — esetünkben további felhasználás nélkül —

$$U_0 = -u_3 - u_4 = -350 - 1(-x_1) - 2(-x_2) - 4(-x_3) - 3(-x_4).$$

Az induló szimplexegyenlet így írható fel:

$$\mathfrak{u}\equiv\left[\begin{array}{c} u_0 \\ \hline u_1 \\ u_2 \\ {}^*u_3 \\ {}^*u_4 \end{array}\right]=\left[\begin{array}{c|cccc} 0 & -2 & 2 & 1 & -1 \\ \hline 100 & 2 & 4 & 1 & 0 \\ 200 & 1 & 0 & 5 & 1 \\ 200 & 0 & 1 & 4 & \boxed{2} \\ 150 & 1 & 1 & 0 & 1 \end{array}\right]\left[\begin{array}{c} 1 \\ \hline -x_1 \\ -x_2 \\ -x_3 \\ -x_4 \end{array}\right]\equiv\mathfrak{A}_0(-\mathfrak{x}).$$

Az eljárás *első fázisa* az alábbi *szimplexegyenletekkel* jellemezhető (mindjárt elhagyva belőlük a nem bázisváltozók közé kerülő $-u_3'$, majd $-u_4''$ oszlopát):

$$\mathfrak{v}_1\equiv\left[\begin{array}{c} u_0' \\ \hline u_1' \\ u_2' \\ x_4' \\ {}^*u_4' \end{array}\right]=\left[\begin{array}{c|ccc} 100 & -2 & -2{,}5 & 3 \\ \hline 100 & 2 & 4 & 1 \\ 100 & 1 & -0{,}5 & 3 \\ 100 & 0 & 0{,}5 & 2 \\ 50 & \boxed{1} & 0{,}5 & -2 \end{array}\right]\left[\begin{array}{c} 1 \\ \hline -x_1' \\ -x_2' \\ -x_3' \end{array}\right]\equiv\mathfrak{A}_1'(-\mathfrak{y}_1'),$$

$$\mathfrak{v}_2\equiv\left[\begin{array}{c} u_0'' \\ \hline u_1'' \\ u_2'' \\ x_4'' \\ x_1'' \end{array}\right]=\left[\begin{array}{c|cc} 200 & 3{,}5 & -1 \\ \hline 0 & 3 & \boxed{5} \\ 50 & -1 & 5 \\ 100 & 0{,}5 & 2 \\ 50 & 0{,}5 & -2 \end{array}\right]\left[\begin{array}{c} 1 \\ \hline -x_2'' \\ -x_3'' \end{array}\right]\equiv\mathfrak{A}_2'(-\mathfrak{y}_2').$$

Az eljárás *második fázisa* (a célfüggvény maximalizálása) a következő újabb *szimplexegyenlettel* eszközölhető:

$$\mathfrak{v}_3\equiv\left[\begin{array}{c} u_0''' \\ \hline x_3''' \\ u_2''' \\ x_4''' \\ x_1''' \end{array}\right]=\left[\begin{array}{c|cc} 200 & 4{,}1 & 0{,}2 \\ \hline 0 & 0{,}6 & 0{,}2 \\ 50 & -4 & -1 \\ 100 & -0{,}7 & -0{,}4 \\ 50 & 1{,}7 & 0{,}4 \end{array}\right]\left[\begin{array}{c} 1 \\ \hline -x_2''' \\ -u_1''' \end{array}\right]\equiv\mathfrak{A}_3'(-\mathfrak{y}_3').$$

Ez már *optimális programot* szolgáltat (esetünkben az egyetlent), nevezetesen

$$x_{1\,\mathrm{opt}}=50,\quad x_{2\,\mathrm{opt}}=0,\quad x_{3\,\mathrm{opt}}=0,\quad x_{4\,\mathrm{opt}}=100;\quad u_{0\,\mathrm{opt}}=200.$$

II°. Általános feladat visszavezetése az előbbire.

1'. A l. prs általános feladata — beláthatóan — mindig felírható (matrixszimbolikával, *eredeti*, ill. *bővített alakban*) eképpen:

$$\mathbf{x} \geqq \mathbf{0} \qquad \mathbf{x}^* \geqq \mathbf{0},\ \mathbf{u}^{*\sim} = [\mathbf{u}_1^*, \mathbf{u}_2^*, \mathbf{u}_3^{*\sim}] \gtreqless \mathbf{0}^*,$$

$$\left.\begin{array}{r} a_{00} - \mathbf{a}^0\mathbf{x} = \text{Max!} \\ \mathbf{A}_1\mathbf{x} \leqq \mathbf{a}_{10} \\ \mathbf{A}_2\mathbf{x} = \mathbf{a}_{20} \\ \mathbf{A}_3\mathbf{x} \geqq \mathbf{a}_{30} \end{array}\right\}, \quad \text{ill.} \quad \left\{\begin{array}{l} u_0 = a_{00} + \mathbf{a}^0(-\mathbf{x}) = \text{Max!} \\ \mathbf{u}_1 = \mathbf{a}_{10} + \mathbf{A}_1(-\mathbf{x}) \geqq \mathbf{0}, \\ \mathbf{u}_2 = \mathbf{a}_{20} + \mathbf{A}_2(-\mathbf{x}) = \mathbf{0} \\ \mathbf{u}_3^{\sim} = \mathbf{a}_{30} + \mathbf{A}_3(-\mathbf{x}) \leqq \mathbf{0} \end{array}\right\} \qquad (46)$$

$$(a_{00} = 0; \quad \mathbf{a}_{10} \geqq \mathbf{0}, \quad \mathbf{a}_{20} \geqq \mathbf{0}, \quad \mathbf{a}_{30} \geqq \mathbf{0});$$

itt $\mathbf{a}_{10}$, $\mathbf{u}_1$, $\mathbf{A}_1$: p_1-soros, $\mathbf{a}_{20}$, $\mathbf{u}_2$, $\mathbf{A}_3$: p_2-soros, $\mathbf{a}_{30}$, $\mathbf{u}_3$, $\mathbf{A}_3$: $(n-p_1-p_2)$-soros.

Ezt az általános feladatot egy új nem-negatív vektorváltozó bevezetésével könnyen *átalakíthatjuk* módosított normálfeladattá. Nevezetesen, a bővített alakból — utolsó egyenletéhez a

$$\mathbf{v} \equiv -\mathbf{u}_3^{\sim} = -\mathbf{a}_{30} + \mathbf{A}_3\mathbf{x}_3 \geqq \mathbf{0} \qquad (47)$$

vektort hozzáadva, majd az $\mathbf{u}_3 = \mathbf{u}_3^{\sim} + \mathbf{v} = \mathbf{0}$ jelölést, valamint az $(n - p_1 - - p_2)$-ed rendű kvadratikus $\mathbf{E}$ és $\mathbf{O}$ matrixokat alkalmazva — az alábbi *továbbbővített alakra* jutunk:

$$\mathbf{x}^* \geqq \mathbf{0}^*, \qquad = \mathbf{u}^* = [\mathbf{u}_1^*, \mathbf{u}_2^*, \mathbf{u}_3^*] \geqq \mathbf{0}^*,$$

$$\left.\begin{array}{r} u_0 = a_{00} + \mathbf{a}^0(-\mathbf{x}) - \mathbf{0}^*(-\mathbf{v}) = \text{Max!} \\ \mathbf{u}_1 = \mathbf{a}_{10} + \mathbf{A}_1(-\mathbf{x}) - \mathbf{O}(-\mathbf{v}) \geqq \mathbf{0} \\ {}^*\mathbf{u}_2 = \mathbf{a}_{20} + \mathbf{A}_2(-\mathbf{x}) - \mathbf{O}(-\mathbf{v}) = \mathbf{0} \\ {}^*\mathbf{u}_3 = \mathbf{a}_{30} + \mathbf{A}_3(-\mathbf{x}) - \mathbf{E}(-\mathbf{v}) = \mathbf{0} \end{array}\right\}. \qquad (48)$$

Ez már nyilvánvalóan *módosított normálfeladat*. Megoldását tehát az I°-ben előadottak szerint eszközöljük, mégpedig (40)-nek értelemszerűen megfelelő alábbi *szimplex egyenletből* kiindulva:

$$\mathbf{u} \equiv \left[\begin{array}{c} u_0 \\ \hline \mathbf{u}_1 \\ {}^*\mathbf{u}_2 \\ {}^*\mathbf{u}_3 \end{array}\right] = \left[\begin{array}{c|cc} a_{00} & \mathbf{a}^0 & \mathbf{0}^* \\ \hline \mathbf{a}_{10} & \mathbf{A}_1 & \mathbf{O} \\ \mathbf{a}_{20} & \mathbf{A}_2 & \mathbf{O} \\ \mathbf{a}_{30} & \mathbf{A}_3 & -\mathbf{E} \end{array}\right] \left[\begin{array}{c} 1 \\ \hline -\mathbf{x} \\ -\mathbf{v} \end{array}\right] \equiv \mathfrak{A}_0(-\hat{\mathfrak{x}}). \qquad (49)$$

2'. Megjegyzendő, hogy ha egy általános feladat fent vázolt megoldásához *sok új v_i változót* kellene bevezetni, akkor — mint példán is megmutatjuk — előnyösebb az adott primál feladat helyett *duál feladatát* megoldani.

Észlelhettük az I—II°-ben, hogy *bármely l. prs-i feladat megoldása visszavezethető közönséges vagy módosított normálfeladat megoldására.* Ennek alapján bármely l. prs-i feladat megoldását (a szimplex-matrixalgoritmussal) elintézettnek tekinthetjük.

11. Pl. Oldjuk meg az alábbi általános l. prs-i feladatot:

$$u_1 \geqq 0, \quad x_2 \geqq 0, \quad x_3 \geqq 0;$$

$$\left.\begin{aligned} 2x_1 - x_2 + 4x_3 &= \text{Max!} \\ x_1 + 2x_2 + x_3 &\leqq 30 \\ x_1 + x_2 &= 10 \\ x_1 + x_2 + x_3 &\geqq 8 \end{aligned}\right\}.$$

— Feladatunk (u_i duálváltozókkal bővített, majd az előzők szerinti v_3 változóval) *tovább bővített alakja* így fest:

$$x_1 \geqq 0, \quad x_2 \geqq 0, \quad x_3 \geqq 0; \quad u_1 \geqq 0, \quad u_2 = u_3 = 0; \quad v_3 \geqq 0;$$

$$\left.\begin{aligned} u_0 &= 0 - 2(-x_1) + 1(-x_2) - 4(-x_3) + 0(-v_3) = \text{Max!} \\ u_1 &= 30 + 1(-x_1) + 2(-x_2) + 1(-x_3) + 0(-v_3) \\ {}^*u_2 &= 10 + 1(-x_1) + 1(-x_2) + 0(-x_3) + 0(-v_3) \\ {}^*u_3 &= 8 + 1(-x_1) + 1(-x_2) + 1(-x_3) - 1(-v_3) \end{aligned}\right\}.$$

Az induló szimplexegyenlet tehát így alakul:

$$\mathfrak{u} \equiv \begin{bmatrix} u_0 \\ \hline u_1 \\ {}^*u_2 \\ {}^*u_3 \end{bmatrix} = \left[\begin{array}{c|cccc} 0 & -2 & 1 & -4 & 0 \\ \hline 30 & 1 & 2 & 1 & 0 \\ 10 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 8 & 1^* & 1 & 1 & -1 \end{array}\right] \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ \hline -x_1 \\ -x_2 \\ -x_3 \\ -v_3 \end{bmatrix} \equiv \hat{\mathfrak{A}}_0(-\hat{\mathfrak{x}}).$$

A számítás *első fázisa* (a_{31}, a'_{24} generáló elemekkel) az $\mathfrak{A}'_2$ matrixszal, *második fázisa* pedig (a''_{13} generáló elemmel) az $\mathfrak{A}'_3$ matrixszal fejeződik be, az utóbbi a következő (egyetlen) *optimális programot* szolgáltatja:

$$x_{1\text{opt}} = 10, \quad x_{2\text{opt}} = 0, \quad x_{3\text{opt}} = 20; \quad u_{1\text{opt}} = 0, \quad v_{3\text{opt}} = 22; \quad u_{0\text{opt}} = 100.$$

12. Pl. Megoldandó: $x_1 \geqq 0, \quad x_2 \geqq 0, \quad x_3 \geqq 0;$

$$\left.\begin{array}{r} 5x_1 - 2x_2 + x_3 = \text{Max!} \\ x_1 + x_2 + 2x_3 \leqq 12 \\ -2x_1 + 4x_2 + x_3 \leqq -8 \end{array}\right\}.$$

— Az utóbbi egyenlőtlenséget (-1)-gyel megszorozva (mikor is $\geqq$-re fordul), majd $-v_2$-vel bővítve (mikor is $=$ -re módosul), az

$$\mathfrak{u} \equiv \begin{bmatrix} u_0 \\ \hline u_1 \\ {}^*u_2 \end{bmatrix} = \left[\begin{array}{r|rrrr} 0 & -5 & 2 & -1 & 0 \\ \hline 12 & 1 & 1 & 2 & 0 \\ 8 & 2 & -4 & -1 & -1 \end{array}\right] \begin{bmatrix} 1 \\ \hline -x_1 \\ -x_2 \\ -x_3 \\ -v_2 \end{bmatrix} \equiv \hat{\mathfrak{A}}_0(-\hat{\mathfrak{x}}).$$

induló szimplexegyenlet adódik. Generáló elemek: a_{21}, a'_{14}; optimális program: $x_{1\,\text{opt}} = 12, \quad x_{2\,\text{opt}} = x_{3\,\text{opt}} = u_{1\,\text{opt}} = 0, \quad v_{2\,\text{opt}} = 16,$ $u_{0\,\text{opt}} = 60.$

13. Pl. Megoldandó $x_1 \geqq 0, \quad x_2 \geqq 0;$

$$\left.\begin{array}{r} x_1 - x_2 = \text{Max!} \\ 2x_1 + x_2 \geqq 6 \\ x_1 + 2x_2 \geqq 6 \\ x_1 + x_2 \leqq 5 \end{array}\right\}.$$

— Induló szimplexegyenlet:

$$\mathfrak{u} \equiv \begin{bmatrix} u_0 \\ \hline {}^*u_1 \\ {}^*u_2 \\ u_3 \end{bmatrix} = \left[\begin{array}{r|rrrr} 0 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ \hline 6 & 2 & 1 & -1 & 0 \\ 6 & 1 & 2 & 0 & -1 \\ 5 & 1 & 1 & 0 & 0 \end{array}\right] \begin{bmatrix} 1 \\ \hline -x_1 \\ -x_2 \\ -x_4 \\ -v_1 \\ -v_2 \end{bmatrix} \equiv \hat{\mathfrak{A}}_0(-\hat{\mathfrak{x}}).$$

Generáló elemek: $a_{11}, a'_{22}, a''_{33}$; optimális program:

$$x_{1\,\text{opt}} = 4, \quad x_{2\,\text{opt}} = 1, \quad v_{1\,\text{opt}} = 3, \quad v_{2\,\text{opt}} = u_{3\,\text{opt}} = 0, \quad u_{0\,\text{opt}} = 3.$$

14. Pl. Megoldandó az alábbi *primál minimumfeladat:*

$$x_1 \geqq 0, \quad x_2 \geqq 0;$$

$$\left.\begin{array}{r} 5x_1 + 6x_2 = \text{Min!} \\ 2x_1 + x_2 \geqq 6 \\ 2x_1 + 4x_2 \geqq 12 \\ 4x_2 \geqq 4 \end{array}\right\}.$$

— Ugyanez megoldható *primál maximumfeladatként* is, mégpedig az

$$x_1 \geqq 0, \quad x_2 \geqq 0;$$

$$\left.\begin{array}{r} -5x_1 - 6x_2 = \text{Max!} \\ 2x_1 + x_2 \geqq 6 \\ 2x_1 + 4x_2 \geqq 12 \\ + 4x_2 \geqq 4 \end{array}\right\}$$

eredeti alakból nyert

$$x_1 \geqq 0, \quad x_2 \geqq 0; \quad v_1 \geqq 0, \quad v_2 \geqq 0, \quad v_3 \geqq 0; \quad u_1 = u_2 = u_3 = 0$$

$$\left.\begin{array}{l} U_0 = -22 - 4(-x_1) - 9(-x_2) + 1(-v_1) + 1(-v_2) + 1(-v_3) \\ u_0 = 0 + 5(-x_1) + 6(-x_2) + 0(-v_1) + 0(-v_2) + 0(-v_3) = \text{Max!} \\ u_1 = 6 + 2(-x_1) + 1(-x_2) - 1(-v_1) + 0(-v_2)(+ 0(-v_3) \\ u_2 = 12 + 2(-x_1) + 4(-x_2) + 0(-v_1) - 1(-v_2)(+ 0(-v_3) \\ u_3 = 4 + 0(-x_1) + 4(-x_2) + 0(-v_1) + 0(-v_2) - 1(-v_3) \end{array}\right\}$$

bővített és módosított alakban, tehát 5 nem bázisváltozóval.

Célszerű a primál minimumfeladat helyett a *duál maximumfeladatot* megoldani, mégpedig a

$$v_1 \geqq 0, \quad v_2 \geqq 0, \quad v_3 \geqq 0;$$

$$\left.\begin{array}{r} 6v_1 + 12v_2 + 4v_3 = \text{Max!} \\ 2v_1 + 2v_2 \leqq 5 \\ v_1 + 4v_3 + 4v_3 \leqq 6 \end{array}\right\}$$

eredeti alakból nyert

$$v_1 \geqq 0, \quad v_2 \geqq 0, \quad v_3 \geqq 0; \quad x_1 \geqq 0, \quad x_2 \geqq 0;$$

$$\left.\begin{array}{l} x_0 = 0 - 6(-v_1) - 12(-v_2) - 4(-v_3) = \text{Max!} \\ x_1 = 5 + 2(-v_1) + 2(-v_2) + 0(-v_3) \\ x_2 = 6 + 1(-v_1) + 4(-v_2) + 4(-v_3) \end{array}\right\}$$

bővített alakban, tehát csupán 3 nem bázisváltozóval és módosítás nélkül. Ez utóbbi úton, a_{11} és a_{22}' generáló elemekkel, az alábbi *optimális programot* kapjuk:

$$x_{1\,\text{opt}} = x_{2\,\text{opt}} = 2, \quad v_{1\,\text{opt}} = v_{2\,\text{opt}} = 0, \quad v_{3\,\text{opt}} = 4, \quad u_{0\,\text{opt}} = 22.$$

III°. Bázisoptimumok és kombinálásuk. *1'.* Eddigi tárgyalásaink során az adott l. prs-i primál feladatnak mindig csak egy optimális megoldását kerestük, amennyiben egyáltalán volt ilyen. Ugyanakkor már utaltunk arra, hogy *bizonyos esetben több, ún. alternatív optimum* is létezik. Célszerű ezért megvizsgálni, hogy mikor van valamely megoldható l. prs-i feladatnak

egy, ill. több optimális megoldása, és ez utóbbi esetben hogyan nyerhetők alternatív optimumok.

Most igazolásra kerül a következő

Tétel: *Valamely (megoldható) lineáris programozási primál feladatnak attól függően van több, ill. egy optimális megoldása, hogy a hozzá tartozó duál feladat optimális megoldása elfajuló-e (degenerációs-e), vagy nem.*

Igazolásul tegyük fel, hogy a p számú iteratív lépés eredményeként nyert S_p szimplex táblázat optimális, vagyis — a (25*a*, 26*a*)-nak és a (30*b*)-nek megfelelően — teljesülnek benne a

$$\mathbf{a}_{10}^{(p)} \equiv \mathbf{A}_{11}^{-1}\mathbf{a}_{10} \geqq \mathbf{0} \quad \text{és} \quad \mathbf{a}_{20}^{(p)} \equiv \mathbf{a}_{20} - \mathbf{A}_{21}\mathbf{A}_{11}^{-1}\mathbf{a}_{10} \geqq \mathbf{0},$$

$$\mathbf{a}_{(p)}^{01} \equiv \mathbf{a}^{01}\mathbf{A}_{11}^{-1} \geqq \mathbf{0}^* \quad \text{és} \quad \mathbf{a}_{(p)}^{02} \equiv -\mathbf{a}^{01}\mathbf{A}_{11}^{-1}\mathbf{A}_{12} + \mathbf{a}^{02} \geqq \mathbf{0}^*$$

feltételek. Ha itt az utóbbi kettőt

$$-\mathbf{a}^{01}\mathbf{A}_{11}^{-1} > \mathbf{0}, \quad -\mathbf{a}^{01}\mathbf{A}_{11}^{-1}\mathbf{A}_{12} + \mathbf{a}^{02} > \mathbf{0}^* \tag{50a, b}$$

módon *megszigorítjuk*, vagyis a duál feladat optimális programjában nem engedjük meg az elfajulást, akkor egy

$$\mathbf{y} = \begin{bmatrix} \mathbf{y}_1 \\ \mathbf{y}_2 \end{bmatrix} \neq \begin{bmatrix} \mathbf{A}_{11}^{-1}\mathbf{a}_{10} \\ \mathbf{0} \end{bmatrix} = \mathbf{x} \tag{50c}$$

vektor, mint

$$\mathbf{y} \geqq \mathbf{0}, \ \mathbf{A}\mathbf{y} = \begin{bmatrix} \mathbf{A}_{11} & \mathbf{A}_{12} \\ \mathbf{A}_{21} & \mathbf{A}_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{y}_1 \\ \mathbf{y}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{A}_{11}\mathbf{y}_1 + \mathbf{A}_{12}\mathbf{y}_2 \\ \mathbf{A}_{21}\mathbf{y}_1 + \mathbf{A}_{22}\mathbf{y}_2 \end{bmatrix} \leqq \begin{bmatrix} \mathbf{a}_{10} \\ \mathbf{a}_{20} \end{bmatrix} = \mathbf{a}_0 \tag{50d}$$

sajátságú lehetséges megoldás, *nem lehet optimális*, mert

α) az $\mathbf{y}_2 \geqq \mathbf{0}$ esetben — az (50*b*) és az (50*d*) miatt —

$$\begin{aligned} u_0^{(p)} &= -\mathbf{a}^{01}\mathbf{y}_1 - \mathbf{a}^{02}\mathbf{y}_2 < \mathbf{a}^{01}\mathbf{y}_1 - \mathbf{a}^{01}\mathbf{A}_{11}^{-1}\mathbf{A}_{12}\mathbf{y}_2 = \\ &= -\mathbf{a}^{01}\mathbf{A}_{11}^{-1}(\mathbf{A}_{11}\mathbf{y}_1 + \mathbf{A}_{12}\mathbf{y}_2) < -\mathbf{a}^{01}\mathbf{A}_{11}^{-1}\mathbf{a}_{10} = u_0, \end{aligned} \tag{50e}$$

β) az $\mathbf{y}_2 = \mathbf{0}$ esetben pedig — az (50*d*)-ből és az (50*a*)-ból folyó

$$\mathbf{A}_{11}\mathbf{y}_1 + \mathbf{A}_{12}\mathbf{0} = \mathbf{A}_{11}\mathbf{y}_1 < \mathbf{a}_{10} \ (\text{ui. } \mathbf{A}_{11}\mathbf{y}_1 \neq \mathbf{a}_{10}, \text{ mert } \mathbf{y}_1 \neq \mathbf{A}_{11}^{-1}\mathbf{a}_{10})$$

miatt — (50*f*)

$$u_0^{(p)} = -\mathbf{a}^{01}\mathbf{y}_1 - \mathbf{a}^{02}\mathbf{0} = -\mathbf{a}^{01}\mathbf{A}_{11}^{-1}\mathbf{A}_{11}\mathbf{y}_1 + \mathbf{0} < -\mathbf{a}^{01}\mathbf{A}_{11}^{-1}\mathbf{a}_{10} = u_0.$$

Egynél több primál optimumról tehát valóban csak az

$$\mathbf{a}_{(p)}^{01} \equiv -\mathbf{a}^{01}\mathbf{A}_{11}^{-1} \geqq \mathbf{0}, \quad \mathbf{a}_{(p)}^{02} \equiv -\mathbf{a}^{01}\mathbf{A}_{11}^{-1}\mathbf{A}_{12} + \mathbf{a}^{02} \geqq \mathbf{0} \tag{50g, h}$$

esetben, vagyis *degenerációs duál optimum* esetén lehet szó.

2'. Egyébként az $S_p \equiv S^{(1)}_{opt}$ optimális táblázatból egy másik ilyenre, pl. az $S^{(2)}_{opt}$*-re úgy térünk rá, hogy az* $\mathbf{a}^0_{(p)} \geqq \mathbf{0}$ *vektor egy*

$$\mathbf{a}^{(p)}_0 \mathbf{e}_l = a^{(p)}_{0l} = 0 \tag{51a}$$

zérus koordinátájának oszlopában — a szokásos módon választott generáló elemmel — *rendes szimplex lépést teszünk.* Sőt, az ilyen lépést mindaddig *ismételjük, amíg csak lehetséges,* a bázis alkalmas (s a szimplex módszer egyéb szabályainak, pl. a pozitív generáló elem választását előíró szabálynak megfelelő) váltogatása mellett. Az így nyert

$$\mathbf{p}_1 \equiv \mathbf{x}_{(p)} = \mathbf{x}^{(1)}_{opt}, \; \mathbf{p}_2 \equiv \mathbf{x}^{(2)}_{opt}, \ldots, \mathbf{p}_h \equiv \mathbf{x}^{(h)}_{opt} \quad (\geqq \mathbf{0}) \tag{51b}$$

optimális megoldásokat röviden *bázisoptimumoknak* szokás nevezni. A velük kapcsolatos *optimális programértékek* (vagy célfüggvényértékek) természetesen mind megegyezők, azaz

$$u^{(p)}_0 = -\mathbf{a}^0\mathbf{x}_{(p)} \equiv u^{(1)}_{0\,opt} = u^{(2)}_{0\,opt} = \ldots = u^{(h)}_{0\,opt} = u_{0\,opt}, \tag{51c}$$

mert — pl. az $u^{(p)}_0$-ból kiindulva és a (10) figyelembevételével —

$$u^{(p+1)}_0 \equiv u^{(2)}_{0opt} = u^{(p)}_0 - \delta^{(p)}_0 a^{(p)}_{0l} = u^{(p)}_0 - \delta^{(p)}_0 \cdot 0 = u^{(p)}_0 \quad \text{s í. t.} \tag{51d}$$

Sőt, mindezek az optimális táblázatok *a teljes* 0*-indexű sorban is megegyeznek,* mert — pl. ismét az S_p-ből kiindulva —

$$a^{(p+1)}_{0j} = a^{(p)}_{0j} - \delta^{(p)}_j a^{(p)}_{0l} = a^{(p)}_{0j} - \delta^{(p)}_j \cdot 0 = a^{(p)}_{0j} \quad \text{s í. t.} \quad (j = 1, 2, \ldots, m). \tag{51e}$$

Megjegyzendő, hogy *a* 0*-indexű sorban esetleg pozitív elemmel rendelkező oszlopokat* az optimális táblázatok számítása során *figyelmen kívül hagyhatjuk,* minthogy a nekik megfelelő változók (vektorok) bevonása csak csökkentheti a program értékét.

3'. Végezetül igazoljuk, az előbb említett bázisoptimumok következő fontos sajátságát: *A bázisoptimumok bármely konvex lineáris kombinációja szintén optimális megoldást szolgáltat,* vagyis — az (51c) felhasználásával —

$$\sum_{\gamma=1}^{h} \alpha_\gamma \mathbf{p}_\gamma = \alpha_1 \mathbf{p}_1 + \alpha_2 \mathbf{p}_2 + \ldots + \alpha_h \mathbf{p}_h = \mathbf{x}_{opt} \quad (\alpha_\gamma \geqq 0, \sum_{\gamma=1}^{h} \alpha_\gamma = 1). \tag{52a}$$

Igazolásul belátható, hogy ez az $\mathbf{x}_{opt}$ *lehetséges* megoldás, lévén nyilvánvalóan

$$\mathbf{x}_{opt} \geqq \mathbf{0}, \text{ továbbá } \mathbf{A}\mathbf{x}_{opt} = \sum_{\gamma=1}^{h} \alpha_\gamma(\mathbf{A}\mathbf{p}_\gamma) \leqq \sum_{\gamma=1}^{h} \alpha_\gamma \mathbf{a}_0 = \mathbf{a}_0 \sum_{\gamma=1}^{h} \alpha_0 = \mathbf{a}_0, \tag{52b, c}$$

de egyszersmind *optimális* megoldás is, mert

$$u^{(x)}_0 = -\mathbf{a}^0\mathbf{x}_{opt} = \sum_{\gamma=1}^{h} \alpha_\gamma(-\mathbf{a}^0\mathbf{p}_\gamma) = \sum_{\gamma=1}^{h} \alpha_\gamma u^{(p)}_0 = u^{(p)}_0 \sum_{\gamma=1}^{h} \alpha_\gamma = u^{(p)}_0 = u_{0\,opt}. \tag{52d}$$

Mindebből az is következik, hogy *legalább két bázisoptimum létezése esetén végtelen sok optimális megoldás van.*

A fentiekben hallgatólagosan feltételeztük, hogy az optimális táblázatok 0 indexű sorában 0 elemmel rendelkező oszlopaiban mindig *található* (generáló elemként szóba jöhető) *pozitív elem.* Ellenkező esetben — mint igazolni lehet — a fent vázolt módon nem állíthatók elő az összes optimumok.

15. Pl. Tegyük fel, hogy l. prs-i feladatban a szokásos szimplex lépések során a következő szimplexegyenlethez jutottunk:

$$\mathfrak{v}_p \equiv \begin{bmatrix} u_0^{(p)} \\ \hline x_1^{(p)} \\ x_2^{(p)} \end{bmatrix} = \left[\begin{array}{c|ccc} 34 & 0 & 5 & 0 \\ \hline 6 & 1 & -2 & -2 \\ 4 & \boxed{1} & 1 & 2 \end{array}\right] \begin{bmatrix} 1 \\ \hline -x_3^{(p)} \\ -u_1^{(p)} \\ -u_2^{(p)} \end{bmatrix} \equiv \mathfrak{A}_p(-\mathfrak{y}_p).$$

Ez nyilván *optimális egyenlet,* lévén $\mathbf{a}_{(p)}^0 = [0, 5, 0] \geqq \mathbf{0}$, de nem egyetlen, mert

$$a_{01}^{(p)} = a_{03}^{(p)} = 0.$$

Lássuk most *a többi optimális egyenletet,* itt és a továbbiakban mellőzve a (csak programrontásra alkalmas) 2 indexű oszlopot (ui. $a_{02}^{(p)} = 5 > 0$).

$$\begin{bmatrix} u_0^{(p+1)} \\ \hline x_1^{(p+1)} \\ x_3^{(p+1)} \end{bmatrix} = \left[\begin{array}{c|cc} 34 & 0 & 0 \\ \hline 2 & -1^* & -4^* \\ 4 & 1 & \boxed{2} \end{array}\right] \begin{bmatrix} 1 \\ \hline -x_2^{(p+1)} \\ -u_2^{(p+1)} \end{bmatrix},$$

$$\begin{bmatrix} u_0^{(p+2)} \\ \hline x_1^{(p+2)} \\ u_2^{(p+2)} \end{bmatrix} = \left[\begin{array}{c|cc} 34 & 0 & 0 \\ \hline 10 & 1 & 2 \\ 2 & 0{,}5 & 0{,}5 \end{array}\right] \begin{bmatrix} 1 \\ \hline -x_2^{(p+2)} \\ -x_3^{(p+2)} \end{bmatrix}.$$

Ilyen módon *több optimális egyenlet már nem nyerhető.* E három optimális egyenlet ugyanis a bennük szereplő x_1, x_2, x_3 és u_2 változók közül programba vonható lehetséges párok, nevezetesen az

$$x_1x_2, \quad x_1x_3, \quad x_1u_2; \quad x_2x_3, \quad x_2u_2, \quad x_3u_2$$

párok első háromját képviseli; az utolsó három párosításra viszont nem kerülhet sor, mert az rendre az $\mathfrak{A}_{p-1}$-ből, $\mathfrak{A}_p$-ből, $\mathfrak{A}_{p+1}$-ből csupán negatív generáló elemmel (l. a egyenletben *-gal megjelölve) volna nyerhető. *A három bázisoptimum* tehát így alakul a (fenti egyenletből kiolvasva):

$$\mathbf{p}_1 \equiv \mathbf{x}_{opt}^{(1)} = [6, 4, 0]^*, \quad \mathbf{p} \equiv \mathbf{x}_{opt}^{(2)} = [2, 0, 4]^*, \quad \mathbf{p}_3 \equiv \mathbf{x}_{opt}^{(3)} = [10, 0, 0]^*,$$

az optimális megoldások halmaza pedig:

$$\mathbf{x}_{opt} = \alpha_1\mathbf{p}_1 + \alpha_2\mathbf{p}_2 + \alpha_3\mathbf{p}_3 = [6\alpha_1 + 2\alpha_2 + 10\alpha_3, 4\alpha_1, 4\alpha_2] \geqq \mathbf{0},$$

$$\left[\alpha_\gamma \geqq 0, \quad \sum_{\gamma=1}^{3} \alpha_\gamma = 1\right]$$

végül az optimális programok közös értéke:

$$u_0^{(p)} \equiv u_{0\,opt}^{(1)} = u_{0\,opt}^{(2)} = u_{0\,opt}^{(3)} = u_{0\,opt} = 34.$$

IV°. A módosított szimplex-matrixalgoritmus (SmMA). *1'.* Gyakran ezzel oldjuk meg a l. prs. feladatát — az előzőkben ismertetett (közönséges) szimplex-matrixalgoritmus (SMA) helyett; éppen ezért érdemes ezt is behatóan tanulmányoznunk.

Induljunk ki ismét a l. prs. (1a, b, c) szerinti (53)

$$\mathfrak{O} \equiv \begin{bmatrix} 0 \\ \mathbf{0} \end{bmatrix} \leqq \begin{bmatrix} a_{00} & \mathbf{a}^0 \\ \mathbf{a}_0 & \mathbf{A}_0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ -\mathbf{x} \end{bmatrix} \equiv [\mathfrak{a}_0, \ \mathfrak{A}'] \begin{bmatrix} 1 \\ -\mathbf{x} \end{bmatrix} \equiv \mathfrak{a}_0 + \mathfrak{A}_0'(-\mathbf{x}) \equiv \mathfrak{A}_0(-\mathfrak{x}),$$
$$\mathbf{x} \geqq \mathbf{0}, \quad -\mathbf{a}^0\mathbf{x} = \text{Max!}$$

eredeti (primálváltozás), ill. a (3a, b, c) szerinti (de némileg átrendezett)

$$\mathfrak{O} \equiv \begin{bmatrix} 0 \\ \mathbf{0} \end{bmatrix} = \left[\begin{array}{cc|cc} a_{00} & \mathbf{a}^0 & 1 & \mathbf{0}^* \\ \mathbf{a}_0 & \mathbf{A}_0 & \mathbf{0} & \mathbf{E} \end{array}\right] \begin{bmatrix} 1 \\ -\mathbf{x} \\ \hline -u_0 \\ -\mathbf{u} \end{bmatrix} \equiv [\mathfrak{a}_0, \ \mathfrak{A}' \,|\, \mathfrak{E}] \begin{bmatrix} 1 \\ -\mathbf{x} \\ \hline -\mathfrak{u} \end{bmatrix} \equiv \mathfrak{a}_0 + \mathfrak{A}_0'(-\mathbf{x}) + \mathfrak{E}(-\mathfrak{u}) \equiv \quad (54)$$
$$\mathbf{x} \geqq \mathbf{0}, \mathbf{u} \geqq \mathbf{0}, -\mathbf{a}^0\mathbf{x} = \text{Max!} \qquad \equiv \mathfrak{A}_0(-\mathfrak{x}) + \mathfrak{E}(-\mathfrak{u}) \equiv \mathfrak{C}_0(-\mathfrak{z})$$

bővített (duálváltozós) alakjából, és szorítkozzunk újra a *normálfeladat rendes esetének első (gyakorlati) alesetére* is a (4a, b, c) szerint

$$\mathbf{a}_0 > \mathbf{0} \text{ és található } a_{0l} < 0, \ a_{kl} > 0. \quad (55)$$

2'. Az algoritmus indulását ($SmMA_0$) az (54)-et részletező

$$\mathfrak{O} = \mathfrak{a}_0 + \mathfrak{a}_1(-x_1) + \ldots + \mathfrak{a}_l(-x_l) + \ldots + \mathfrak{a}_m(-x_m) + \quad (56a)$$
$$+ \mathfrak{e}_0(-u_0) + \mathfrak{e}_1(-u_1) + \ldots + \mathfrak{e}_k(-u_k) + \ldots + \mathfrak{e}_n(-u_n) \equiv$$
$$\equiv \mathfrak{a}_0 + \mathfrak{A}_0'(-\mathbf{x}) + \mathfrak{E}(-\mathfrak{u})$$

induló alap-(szimplex-)egyenlet jellemzi, ahol most $\mathbf{u}^* \equiv [u_1, \ldots, u_k, \ldots, u_n]$ a bázisváltozók, $\mathbf{x}^* \equiv [x_1, \ldots, x_l, \ldots, x_m]$ a nembázisváltozók vektora, s amely egyúttal az $\mathfrak{u}^* \equiv u_0, \mathbf{u}^*]$ vektorra *általánosan megoldott* alakban jelentkezik. Az alapegyenlet *partikuláris megoldása* az

$$\mathbf{x} = \mathbf{0} \quad \text{nullfeltételnél} \quad \mathfrak{O} = \mathfrak{a} + \mathfrak{E}(-\mathfrak{u}), \quad \text{azaz} \quad \mathfrak{u} = \mathfrak{a}_0. \quad (56b)$$

3'. A z a l g o r i t m u s e l s ő l é p é s e ($SmMA_1$) abban áll, hogy a szokásos módon választott

$$a_{kl} = 1/\gamma = \mathfrak{e}_k^* \mathfrak{a}_l > 0 \qquad (57a)$$

generáló elemnek megfelelő (57*b*)

$$\mathfrak{B}_1 = \mathfrak{E} + (\mathfrak{a}_l - \mathfrak{e}_k)\mathfrak{e}^k, \quad |\mathfrak{B}_1| = a_{kl} \neq 0, \quad \mathfrak{R}_1 \equiv \mathfrak{B}_1^{-1} = \mathfrak{E} - \gamma\,(\mathfrak{a}_l - \mathfrak{e}_k)\mathfrak{e}^k$$

új bázisra *transzformáljuk* α) *ténylegesen* a változatlan elrendezésű alapegyenletet, β) csak *elvileg* az $\mathfrak{a}_l\ (-x_l) \leftrightarrow \mathfrak{e}_k\ (-u_k)$ tagcseréjével átrendezett változatát s γ) ezzel az utóbbit *általánosan megoldjuk* a $\mathfrak{v}_1^* = [u_0, u_1, \ldots, x_l, \ldots, u_n]$ új bázisváltozó vektorra:

$$\mathfrak{O} = \mathfrak{R}_1\mathfrak{C}_0(-\mathfrak{z}) \equiv \mathfrak{R}_1 \cdot \{\mathfrak{a}_0 + [\mathfrak{a}_1, \ldots, \mathfrak{a}_l, \ldots, \mathfrak{a}_m]\,(-\mathbf{x}) +$$
$$+ [\mathfrak{e}_0, \mathfrak{e}, \ldots, \mathfrak{e}_k, \ldots \mathfrak{e}_n]\,(-\mathfrak{u})\} \equiv \mathfrak{R}_1\mathfrak{a}_0 + \mathfrak{R}_1\mathfrak{A}_0'(-\mathbf{x}) + \mathfrak{R}_1\mathfrak{E}(-\mathfrak{u}) \equiv \mathfrak{a}_0^{(1)} +$$
$$+ {}^\circ\mathfrak{A}_1'(-\mathbf{x}) + \mathfrak{R}_1(-\mathfrak{u}) \equiv \mathfrak{C}_1(-\mathfrak{z}) = \mathfrak{R}_1\,\{\mathfrak{a}_0 + [\mathfrak{a}_1, \ldots, \mathfrak{e}_k, \ldots, \mathfrak{a}_m]\,(-\mathbf{y}_1) +$$
$$+ [\mathfrak{e}_0, \mathfrak{e}_1, \ldots, \mathfrak{a}_l, \ldots, \mathfrak{e}_m] . (-\mathfrak{v}_1) \equiv \mathfrak{R}_1\mathfrak{a}_0 + \mathfrak{R}_1\mathfrak{A}_1'(-\mathbf{y}_1) + \mathfrak{R}_1\mathfrak{B}_1(-\mathfrak{v}_1) \equiv$$
$$\equiv \mathfrak{a}_0^{(1)} + \mathfrak{A}_1'(-\mathbf{y}_1) + \mathfrak{E}(-\mathfrak{v}_1), \qquad (57c)$$

ahol ${}^\circ\mathfrak{A}_1 \equiv [\mathfrak{a}_0^{(1)}, {}^\circ\mathfrak{A}_1']$ az eredeti $\mathfrak{A}_0 \equiv [\mathfrak{a}_0, \mathfrak{A}_0']$ matrixnak, $\mathfrak{A}_1 \equiv [\mathfrak{a}_0^{(1)}, \mathfrak{A}_1']$ pedig a vektorcserés $\mathfrak{A}_1 \equiv [\mathfrak{a}_0, \mathfrak{A}_1']$ matrixnak a $\mathfrak{B}_1$ bázisra transzformált alakja, továbbá ahol

$$\mathfrak{v}_1 = \mathfrak{u} + (x_l - u_k)\,\mathfrak{e}_k \equiv [\underset{0}{u_0} \mid \underset{1}{u_1}, \ldots, \underset{k}{x_l}, \ldots, \underset{n}{u_n}]^*,$$

$$\mathbf{y}_1 = \mathbf{x} + (u_k - x_l)\mathbf{e}_l = [\underset{1}{x_1}, \ldots, \underset{l}{u_k}, \ldots, \underset{m}{x_m}]^*. \qquad (57c)$$

Végül az alapegyenlet *partikuláris* megoldása az

$$\mathbf{y}_1 = \mathbf{0} \quad \text{nullfeltételnél} \quad \mathfrak{O} = \mathfrak{a}_0^{(1)} + \mathfrak{E}(-\mathfrak{v}_1), \quad \text{azaz} \quad \mathfrak{v}_1 = \mathfrak{a}_0^{(1)}. \qquad (57d)$$

Az említett transzformáció a 1. §. *b*) α)-ban tanultak alkalmazásával — *számítástechnikailag* a $\mathfrak{C}_1 \equiv [\mathfrak{a}_0^{(1)}, {}^\circ\mathfrak{A}_1', \mathfrak{R}_1] = \mathfrak{R}_1\mathfrak{C}_0 \equiv [\mathfrak{E} - \gamma(\mathfrak{a}_l - \mathfrak{e}_k)\mathfrak{e}^k]$. $\mathfrak{C}_0$, $\mathfrak{C}_0 = [\mathfrak{a}_0, \mathfrak{A}_0', \mathfrak{E}]$,

$$\boxed{\mathfrak{C}_1 = \mathfrak{C}_0 - \gamma(\mathfrak{a}_l - \mathfrak{e}_k)\,\mathfrak{c}^k,} \qquad \{\mathfrak{c}^k = [a_{k0}, \mathfrak{a}^k, \mathfrak{e}^k]\} \qquad (57e)$$

formula ($SmMA_1$) segítségével, tehát egyszerű matrixalgebrai úton végezhető el. Az első algoritmikus lépés számítástechnikailag érdekes része tehát *így foglalható össze:* az alapegyenlet

$$\mathfrak{O} = [\mathfrak{A}_0 - \gamma(\mathfrak{a}_l - \mathfrak{e}_k)\mathfrak{a}^k](-\mathfrak{x}) + [\mathfrak{E} - \gamma\,(\mathfrak{a}_l - \mathfrak{e}_k)\mathfrak{e}^k]\,(-\mathfrak{u}) \equiv$$
$$\equiv {}^\circ\mathfrak{A}_1\,(-\mathfrak{x}) + \mathfrak{R}_1(-\mathfrak{u}) \equiv \mathfrak{C}_1(-\mathfrak{z}) \qquad (57f)$$

az $x_j = 0$ $(j \neq 0,\ l)$ és $u_k = 0$ zérusfeltételes partikuláris megoldása pedig ($\delta_0 = \gamma a_{k0}$ jelöléssel) (57g)

$$\mathfrak{O} = [\mathfrak{a}_0 - \delta_0(\mathfrak{a}_l - \mathfrak{e}_k)] - [x_l \mathfrak{e}_k + \sum_{i \neq k} u_i \mathfrak{e}_i] \equiv \mathfrak{a}_0^{(1)} - \mathfrak{E}\mathfrak{v}_1 \equiv \mathfrak{a}_0^{(1)} - \mathfrak{v}_1.$$

4'. A z a l g o r i t m u s á l t a l á n o s (q + 1 - e d i k) l é p é s e (SmMA_{q+1}) az első lépés, valamint matrixtranszformációs ismeretek alapján már rövidre fogható. *Generáló elem:*

$$a_{k_q l_q}^{(q)} = 1/\gamma_q = \mathfrak{e}_{k_q}^* \mathfrak{a}_{l_q}^{(q)} > 0; \tag{58a}$$

a megfelelő *bázis:*

$$\mathfrak{B}_{q+1} = \mathfrak{B}_q + (\mathfrak{a}_{l_q} - \mathfrak{e}_{k_q})\mathfrak{e}^{k_q} = \mathfrak{B}_q \cdot [\mathfrak{E} + (\mathfrak{a}_{l_q}^{(q)} - \mathfrak{e}_{k_q})\, \mathfrak{e}^{k_q}], \tag{58b}$$

$$|\mathfrak{B}_{q+1}| = |\mathfrak{E} + (\mathfrak{a}_{l_q}^{(q)} - \mathfrak{e}_{k_q})\, \mathfrak{e}^{k_q}|\,|\mathfrak{B}_q| = a_{k_q l_q}^{(q)} \cdot |\mathfrak{B}_q| =$$

$$= a_{k_q l_q}^{(q)} a_{k_{q-1}, l_{q-1}}^{(q-1)} \ldots a_{kl} \equiv \prod_{p=0}^{q} a_{k_p l_p}^{(p)} \neq 0 \ (> 0);$$

$$\mathfrak{R}_{q+1} \equiv \mathfrak{B}_{q+1}^{-1} = [\mathfrak{E} - \gamma_q(\mathfrak{a}_{l_q}^{(q)} - \mathfrak{e}_{k_q})\, \mathfrak{e}^{k_q}] \cdot \mathfrak{R}_q.$$

Az alapegyenlet *transzformálása* $\mathfrak{B}_{q+1}$ bázisra és *általános megoldása* a $\mathfrak{v}_{q+1}$ bázisváltozó vektorra: (58c)

$$\mathfrak{O} = \mathfrak{R}_{q+1} \cdot [\mathfrak{a}_0 + \mathfrak{A}_0'(-\mathbf{x}) + \mathfrak{E}(-\mathfrak{u})] \equiv \mathfrak{a}_0^{(q+1)} + {}^\circ\mathfrak{A}_{q+1}'(-\mathbf{x}) + \mathfrak{R}_{q+1}(-\mathfrak{u}) \equiv$$

$$\equiv \mathfrak{C}_{q+1}(-\mathfrak{z}) = \mathfrak{R}_{q+1} \cdot [\mathfrak{a}_0 + \mathfrak{A}_{q+1}'(-\mathbf{y}_{q+1}) + \mathfrak{B}_{q+1}(-\mathfrak{v}_{q+1})] \equiv$$

$$\equiv \mathfrak{a}_0^{(q+1)} + \mathfrak{A}_{q+1}'(-\mathbf{y}_{q+1}) + \mathfrak{E}(-\mathfrak{v}_{q+1}).$$

Partikuláris megoldása az (58d)

$\mathbf{y}_{q+1} = \mathbf{0}$ nullfeltételnél $\mathfrak{O} = \mathfrak{a}_0^{(q+1)} + \mathfrak{E}(-\mathfrak{v}_{q+1})$, azaz $\mathfrak{v}_{q+1} = \mathfrak{a}_0^{(q+1)}$.
A transzformáció *számítástechnikai végrehajtása:* (58e)

$$\mathfrak{C}_{q+1} = \mathfrak{R}_{q+1}\mathfrak{C}_0 = [\mathfrak{E} - \gamma_q(\mathfrak{a}_{l_q}^{(q)} - \mathfrak{e}_{k_q})\mathfrak{e}^{k_q}] \cdot \mathfrak{C}_q \quad (q = 0, 1, \ldots, p-1),$$

$$\boxed{\mathfrak{C}_{q+1} = \mathfrak{C}_q - \gamma_q(\mathfrak{a}_{l_q}^{(q)} - \mathfrak{e}_{k_q})\, \mathfrak{c}_{(q)}^{k_q}} \quad \{\mathfrak{c}_{(q)}^{k_q} = [\mathfrak{a}_{(q)}^{k_q}, \mathfrak{e}^{k_q}]\}.$$

E rekurzív formulát ($SmMA_{q+1}$) p-szer alkalmazva az

$$\mathfrak{O} = [{}^\circ\mathfrak{A}_q - \gamma_q(\mathfrak{a}_{l_q}^{(q)} - \mathfrak{e}_{k_q})\mathfrak{a}_{(q)}^{k_q}]\,(-\mathfrak{x}) + [\mathfrak{R}_q - \gamma_q(\mathfrak{a}_{k_q}^{(q)} - \mathfrak{e}_{k_q})\mathfrak{r}_{(q)}^{k_q}]\,(-\mathfrak{u}) \equiv$$

$$\equiv {}^\circ\mathfrak{A}_{q+1}(-\mathfrak{x}) + \mathfrak{R}_{q+1}(-\mathfrak{u}) \equiv \mathfrak{C}_{q+1}(-\mathfrak{z}) \tag{58f}$$

alapegyenlet (együtthatómatrixnak) bázistranszformálására s közben lépésenként képezve az $x_j = 0$ $(j \neq 0,1, l_1, \ldots, l_q)$ és $u_k = u_{k_1} = , \ldots = u_{k_q} = 0$ zérusfeltételes

$$\mathfrak{O} = [\mathfrak{a}_0^{(q)} - \gamma_q{}' \mathfrak{a}_{l_q}^{(q)} - \mathfrak{e}_{k_q})] + \mathfrak{E}(-\mathfrak{v}_{q+1}) \equiv \mathfrak{a}_0^{(q+1)} - \mathfrak{v}_{q+1} \qquad (58g)$$

partikuláris megoldását, *ezúton az egész módosított szimplex matrixalgoritmus (SmMA) lebonyolítható,* az összes közbenső és záró (optimális) program kiértékelésével együtt. Mindez elemi matrixalgebrai műveletekkel (ti. diádok ismételt leválasztásával) eszközölhető, ami — a közönséges SmMA mintájára — kedvező lehetőséget nyújt elektronikus számítógépi programozására. Megjegyzendő, hogy az SmMA-t először [33, 37, 47] munkáinkban közöltük.

A vázolt SmMA *előnye,* hogy α) mindig ugyanazon $\mathfrak{C}_0 = [\mathfrak{A}_0, \mathfrak{E}]$ matrixot transzformálja különböző $\mathfrak{B}_{q+1}$ bázisokra (viszont a közönséges SMA a változó $\mathfrak{A}_{q+1}$ nembázis-matrixszal teszi ugyanezt), β) az esetleges elfajulás (degeneráció) k küszöböléséhez a b) β) IV° 1′ szerint felhasználandó $\mathbf{R}_q \equiv \mathbf{B}_q^{-1}$ inverzmatrix itt közvetlenül rendelkezésre áll*; *hátránya* hogy γ) terjedelmesebb számítást igényel (mert a $\mathfrak{C}_{q+1}$ matrixnak $n + 1$-gyel több oszlopa van, mint az $\mathfrak{A}_{q+1}$-nek). Éppen ezért — WAGNER alapján — *csak az $m \geqq 3n$ esetben javasoljuk* az SmMA alkalmazását (az SMA helyett), mikor is előnyei felülmúlják hátrányát.

16. Pl. Oldjuk meg a 2. példában tárgyalt lineáris programozási feladatot az imént ismertetett módosított szimplex matrixalgoritmus (SmMA) igénybevételével.

Induló helyzet:

$$\mathfrak{O} \equiv \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \left[\begin{array}{c|ccc|c|ccc} 0 & 1 & 3 & 2 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 7 & 3 & -1 & 2 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 12 & -2 & \boxed{4} & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 10 & -4 & 3 & 8 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \begin{bmatrix} 1 \\ \hline -\mathrm{x}_1 \\ -\mathrm{x}_2 \\ -\mathrm{x}_3 \\ \hline -\mathrm{u}_0 \\ \hline -\mathrm{u}_1 \\ -\mathrm{u}_2 \\ -\mathrm{u}_3 \end{bmatrix} \equiv [\mathfrak{A}_0, \mathfrak{E}] \begin{bmatrix} -\mathfrak{x} \\ -\mathfrak{u} \end{bmatrix} \equiv \mathfrak{C}_0(-\mathfrak{z});$$

$$\mathbf{x} \equiv \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \mathbf{0}\text{-ná. } \mathfrak{a}_0 - \mathfrak{u} \equiv \begin{bmatrix} 0 \\ \hline 7 \\ 12 \\ 10 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} \mathrm{u}_0 \\ \hline u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{bmatrix} = \mathfrak{O}.$$

* Később (pl. a szállítási problémánál) további előnye is kitűnik.

Első lépés ($a_{kl} \equiv a_{22} = 4 > 0$, $x_2' \leftrightarrow u_2'$):

$$\mathfrak{C}_1(-\mathfrak{z}') \equiv \left[\mathfrak{C}_0 - \frac{1}{a_{22}}(\mathfrak{a}_2 - \mathfrak{e}_2)\,\mathfrak{c}^2\right](-\mathfrak{z}) \equiv$$

$$\equiv \left\{\mathfrak{C}_0 - \frac{1}{4}\begin{bmatrix}-3\\ \hline -1\\ 3\\ 3\end{bmatrix}\left[12 \,\vdots\, -2\ 4\ 0 \,\vdots\, 0 \,\vdots\, 0\ 1\ 0\right]\right\}(-\mathfrak{z}') \equiv$$

$$\equiv \left[\begin{array}{c:ccc|c:ccc} 9 & -\frac{1}{2} & 0 & 2 & 1 & 0 & \frac{3}{4} & 0 \\ \hdashline 10 & \boxed{\frac{5}{2}} & 0 & 2 & 0 & 1 & \frac{1}{4} & 0 \\ 3 & -\frac{1}{2} & 1 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{4} & 0 \\ 1 & -\frac{5}{2} & 0 & 8 & 0 & 0 & -\frac{3}{4} & 1 \end{array}\right] \begin{bmatrix} 1 \\ \hdashline -x_1' \\ -x_2' \\ -x_3' \\ \hdashline -u_0' \\ \hdashline -u_1' \\ -u_2' \\ -u_3' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ \hdashline 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \equiv \mathfrak{O};$$

$$\mathbf{y}_1 \equiv \begin{bmatrix} x_1' \\ u_2' \\ x_3' \end{bmatrix} = \mathbf{0}\text{-nál} \qquad \mathfrak{a}_0^{(1)} - \mathfrak{v}_1 \equiv \begin{bmatrix} 0 \\ \hdashline 10 \\ 3 \\ 1 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} u_0' \\ \hdashline u_1' \\ x_2' \\ u_3' \end{bmatrix} = \mathfrak{O}.$$

Második lépés ($a'_{k_1l_1} \equiv a'_{11} = 5/2 > 0$, $x_1'' \leftrightarrow u_1''$):

$$\mathfrak{C}_2(-\mathfrak{z}'') \equiv \left|\mathfrak{C}_1 - \frac{1}{a'_{11}}(\mathfrak{a}_1^{(1)} - \mathfrak{e}_1)\,\mathfrak{a}^1_{(1)}\right|(-\mathfrak{z}'') \equiv$$

$$\equiv \left\{\mathfrak{C}_1 - \frac{2}{5}\begin{bmatrix} -\frac{1}{2} \\ \hdashline \frac{3}{2} \\ -\frac{1}{2} \\ -\frac{5}{2} \end{bmatrix}\left[10 \,\vdots\, \frac{5}{2}\ \ 0\ \ 2 \,\vdots\, 0 \,\vdots\, 1\ \ \frac{1}{4}\ \ 0\right]\right\}(-\mathfrak{z}'') \equiv$$

$$\equiv\left[\begin{array}{c|ccc|c|ccc} 11 & 0 & 0 & \frac{12}{5} & 1 & \frac{1}{5} & \frac{4}{5} & 0 \\ \hline 4 & 1 & 0 & \frac{4}{5} & 0 & \frac{2}{5} & \frac{1}{10} & 0 \\ 5 & 0 & 1 & \frac{2}{5} & 0 & \frac{1}{5} & \frac{3}{10} & 0 \\ 11 & 0 & 0 & 10 & 0 & 1 & -\frac{1}{2} & 1 \end{array}\right]\left[\begin{array}{c} 1 \\ \hline -x_1'' \\ -x_2'' \\ -x_3'' \\ \hline u_0'' \\ \hline u_1'' \\ u_2'' \\ u_3'' \end{array}\right]=\left[\begin{array}{c} 0 \\ \hline 0 \\ 0 \\ 0 \end{array}\right]\equiv\mathfrak{O};$$

$$\mathbf{y}_2\equiv\begin{bmatrix} u_1'' \\ u_2'' \\ x_3'' \end{bmatrix}=\mathbf{0}\text{-nál}\quad \mathfrak{a}-\mathfrak{v}_2\equiv\left[\begin{array}{c} 11 \\ \hline 4 \\ 5 \\ 11 \end{array}\right]-\begin{bmatrix} u_0'' \\ x_1'' \\ x_2'' \\ u_3'' \end{bmatrix}=\mathfrak{O}.$$

Ebből az *optimális program és értéke:*

$$\mathbf{x}_{\text{opt}}\equiv\mathbf{x}''=[4,5,0]^*,\qquad \mathbf{u}_{\text{opt}}\equiv\mathbf{u}''\equiv[0,0,11]^*,\quad u_{0\ \text{opt}}\equiv u_0''=11,$$

összhangban a 2. példa megoldásával.

Egyébkent ellenőrizhető, hogy — az (58*b*)-nek megfelelően —

$$\mathfrak{B}_2\mathfrak{R}_2\equiv\begin{bmatrix} 1 & 1 & -3 & 0 \\ 0 & 3 & -1 & 0 \\ 0 & -2 & 4 & 0 \\ 0 & -4 & 3 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & \frac{1}{5} & \frac{4}{5} & 0 \\ 0 & \frac{2}{5} & \frac{1}{10} & 0 \\ 0 & \frac{1}{5} & \frac{3}{10} & 0 \\ 0 & 1 & -\frac{1}{2} & 1 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}\equiv\mathfrak{E}.$$

5'. Ugyancsak könnyűszerrel előállítható a *b*) α) V°-belivel analóg (59*a*)

$$\boxed{[{}^\circ\mathfrak{A}_p,\mathfrak{R}_p]\equiv\mathfrak{C}_p=\mathfrak{C}_0-(\mathfrak{A}_P-\mathfrak{E}_P)\,\mathbf{A}_{pp}^{-1}\mathfrak{C}^P\equiv\mathfrak{C}_0-\mathfrak{A}_P^{(-)}\mathbf{A}_{pp}^{-1}\mathfrak{C}^P}\qquad (p\leqq r)$$

módosított szimplexmatrix-formula (SmMF), amely egy ugrásba képes eszközölni a szimplex lépést, vagy akár *a teljes szimplex eljárást,* szintén egyszerű, jól gépesíthető matrixalgebrai úton.

Megjegyzendő, hogy most is $\mathfrak{R}_p = \mathfrak{B}_p^{-1}$, lévén

$$\mathfrak{R}_p\mathfrak{B}_p \equiv [\mathfrak{E} - (\mathfrak{A}_P - \mathfrak{E}_P)\,\mathbf{A}_{pp}^{-1}\mathfrak{E}^P].\,[\mathfrak{E} + (\mathfrak{A}_P - \mathfrak{E}_P)\,\mathfrak{E}^P] = \mathfrak{E}, \tag{59b}$$

ahol $|\mathbf{A}_{pp}| = |\mathfrak{B}_p| = \prod_{q=1}^{p} a_{qq}^{(q-1)} \neq 0\ (>0)$, továbbá nyilván

$$^{\circ}\mathfrak{A}_p = \mathfrak{A}_0 - (\mathfrak{A}_P - \mathfrak{E}_P)\,\mathbf{A}_{pp}^{-1}\mathfrak{A}^P = [\mathfrak{E} - (\mathfrak{A}_P - \mathfrak{E}_P)\,\mathfrak{A}_{pp}^{-1}\mathfrak{E}^P]\cdot\mathfrak{A}_0 \equiv \mathfrak{R}_p\mathfrak{A}_0. \tag{59c}$$

Következésképpen a $\mathfrak{C}_p$ *szimplexmatrix* szerkezete így alakul: (60)

$$\mathfrak{C}_p = \mathfrak{B}_p^{-1}\mathfrak{C}_0 \equiv \mathfrak{B}_p^{-1}\cdot[\mathfrak{A}_0, \mathfrak{E}] = \begin{bmatrix} 1 & \mathbf{b}^p \\ \mathbf{0} & \mathbf{B}_p \end{bmatrix}^{-1}\cdot\mathfrak{C}_0 =$$

$$= \begin{bmatrix} 1 & -\mathbf{b}^p\mathbf{B}_p^{-1} \\ \mathbf{0} & \mathbf{B}_p^{-1} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} a_{00} & \mathbf{a}^0 & 1 & \mathbf{0}^* \\ \mathbf{a}_0 & \mathbf{A}_0 & \mathbf{0} & \mathbf{E} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{00}-\mathbf{b}^p\mathbf{B}_p^{-1}\mathbf{a}_0 & \mathbf{a}^0-\mathbf{b}^p\mathbf{B}_p^{-1}\mathbf{A}_0 & 1 & -\mathbf{b}^p\mathbf{B}_p^{-1} \\ -\mathbf{B}_p^{-1}\mathbf{a}_0 & \mathbf{B}_p^{-1}\mathbf{A}_0 & \mathbf{0} & \mathbf{B}_p^{-1} \end{bmatrix} \equiv$$

$$\equiv [^{\circ}\mathfrak{A}_p, \mathfrak{R}_p].$$

A fenti formulák *értelemszerűen* alkalmazandók, ha az előbbi $a_{q+1,q+1}^{(q)}$ helyett tetszőlegesen $a_{k_q l_q}^{(q)}$ generáló elemekkel kell dolgozni.

10. Pl. Ismételjük meg a 3. példában tárgyalt lineáris programozási feladat megoldását, az (59*a*) módosított szimplexmatrix-formula igénybevételével. — Esetünkben

$$\mathfrak{C}_3 \equiv [^{\circ}\mathfrak{A}_3, \mathfrak{R}_3] = \mathfrak{A}_0 - (\mathfrak{A}_{III} - \mathfrak{E}_{III})\,\mathbf{A}_{33}^{-1}.\,\mathfrak{A}^{III} =$$

$$= \left[\begin{array}{c|ccc|c|ccc} 0 & -4 & -5 & -1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 10 & 3 & 2 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 11 & 1 & 4 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 13 & 3 & 3 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] - \left[\begin{array}{ccc} -5 & -4 & -1 \\ \hline 2 & 2 & 0 \\ 3 & 1 & 0 \\ 3 & 3 & 0 \end{array}\right] \cdot \frac{1}{10}\begin{bmatrix} 3 & -1 & 0 \\ -2 & 4 & 0 \\ -3 & -9 & 10 \end{bmatrix}\cdot$$

$$\cdot \left[\begin{array}{c|ccc|c|ccc} 11 & 1 & 4 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 10 & 3 & 2 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 13 & 3 & 3 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] = \left[\begin{array}{c|ccc|c|ccc} 19{,}4 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0{,}2 & 0{,}4 & 1 \\ \hline 1{,}8 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0{,}4 & -0{,}2 & 0 \\ 2{,}3 & 0 & 1 & 0 & 0 & -0{,}1 & 0{,}3 & 0 \\ 0{,}7 & 0 & 0 & 1 & 0 & -0{,}9 & -0{,}3 & 1 \end{array}\right].$$

Innen $\mathfrak{v}_{\text{opt}}^* \equiv \mathfrak{v}_3^* \equiv [u_0'''; x_1''', x_2''', x_3'''] = [19{,}4;\ 1{,}8\ 2{,}3\ 0{,}7]$, $\mathbf{y}_{\text{opt}}^* \equiv \mathbf{u}_3^* \equiv [u_1''', u_2''', u_3'''] = [0, 0, 0] \equiv \mathbf{0}$. Eredményünk nyilván összhangban van a 3. példáéval.

c) Műszaki-gazdasági lineáris programozás, szimplex-matrixalgoritmussal (SMA)

Amint emlékezetes, a l. prs-t egyszerű termelésprogramozási feladattal vezettük be, sőt a további tárgyalás során is ezt az értelmezést vettük több esetben segítségül. Az említett *termelési feladatban* a cikk- és erőforrás- (anyag-) féleségek, az anyagjellegű technikai koefficiensek, erőforrás-kapacitások (mint korlátok), végül a fajlagos hozamok ismeretében a maximális összhozamú termelés programot kerestük.

E termelési feladatnak *több érdekes variánsa* létezik. Ezen túlmenően, *a műszaki-gazdasági feladatok széles változatossága* oldható meg l. prs-sal. Éppen ezekből kívánunk némi ízelítőt adni az alábbiakban. Jelentékeny módszertani ismereteink most már szükségtelenné teszik a megoldások részletezését. Elegendő lesz *az alkalmazandó algoritmusra, a főbb lépésekre*, az esetleges különlegességekre, sőt, akár csak az eredményekre szorítkozni. Megjegyzendő, hogy — fontossága és megkülönböztető sajátosságai miatt — az ún. szállításprogramozási (röviden: szállítási) problémát külön tárgyaljuk (a *d)* részben).

Vázoljuk tehát most a l. prs néhány műszaki-gazdasági alkalmazását, egyes részleteik és egyéb alkalmazások tekintetében a szakirodalomra utalva.*

α) Gazdaságos termelésprogramozási feladatok

I°. Munkaórás hozammaximálás. A termelési programban szerepeljen most pl. m cikk (α—μ) és n erőforrás, mégpedig gépféleség (A—N), a technikai koefficiensek és az erőforrás-kapacitások (mint korlátok) pedig most időjellegűek legyenek [vagyis munkaóra/cikkadag, ill. napi munkaóra gépféleségenként; a cikkadag pl. 1000 db]. Adott fajlagos hozamok [Ft/cikkadag] mellett keressük egyelőre a *maximális összhozamú* termelési programot [az adagszámot cikkenként].

A számadatok és egyúttal az *induló alapegyenlet* (a duál változókkal bővített alak, a *Tucker*-féle elrendezés és hipermatrixos írásmód alkalmazásával) az alábbiakban olvasható:

$$\mathbf{x} \geqq \mathbf{0}, \quad \mathbf{u} \geqq \mathbf{0}, \quad u_0 = \text{Max!}$$

$$\mathfrak{u} \equiv \begin{bmatrix} u_0 \\ \mathbf{u} \end{bmatrix} \equiv \begin{bmatrix} u_0 \\ u_1 \\ u_2 \\ u_3 \\ u_4 \\ u_5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & -6 & -1 & -2 & -1 \\ 24 & 8 & 1 & 0 & 0 \\ 24 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 72 & 3 & 2 & 0 & 1 \\ 24 & 0 & 2 & 0 & 0 \\ 96 & 4 & 2 & 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ -x_1 \\ -x_2 \\ -x_3 \\ -x_4 \end{bmatrix} \equiv \begin{bmatrix} a_{00} & \mathbf{a}^0 \\ \mathbf{a}_0 & \mathbf{A} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ -\mathbf{x} \end{bmatrix} \equiv \mathfrak{A}(-\mathfrak{x}).$$

* L. pl. [46].

Ez a *normálfeladat* rendes esete, s az is marad a generáló elemek ilyen választásánál:

$$a_{11} = 8, \quad a'_{23} = 1, \quad a''_{54} = 1.$$

A szimplex-processzust célszerűen az előzőkből ismert

$$\mathfrak{v}_{q+1} = \mathfrak{A}_{q+1}(-\mathfrak{y}_{q+1}), \quad \mathbf{y}_{q+1} = \mathbf{0}\text{-nál} \quad \mathfrak{v}_{q+1,0} = \mathfrak{A}_{q+1}\mathfrak{e}_0 \equiv \mathfrak{a}_0^{(q+1)};$$

$$\mathfrak{A}_{q+1} = \mathfrak{A}_q - \frac{1}{a_{k_q l_q}^{(q)}} (\mathfrak{a}_{l_q}^{(q)} - \mathfrak{e}_{k_q})(\mathfrak{a}_{(q)}^{k_q} + \mathfrak{e}^{l_q}),$$

$$\mathfrak{v}_{q+1} = \mathfrak{v}_q + (x_{l_q} - u_{k_q})\, \mathfrak{e}_{k_q}, \quad \mathfrak{y}_{q+1} = \mathfrak{y}_q + (u_{k_q} - x_{l_q})\, \mathfrak{e}_{l_q} \equiv [-1, \quad \mathbf{y}_{q+1}]^*$$

szimplex-matrixalgoritmusunkkal (SMA) bonyolíthatjuk le, az említett generáló elemek esetén 3 lépésben. Az utolsó alapegyenlet így alakul:

$$\mathfrak{v}''' \equiv \begin{bmatrix} u_0''' \\ \hline x_1''' \\ x_3''' \\ u_3''' \\ u_4''' \\ x_4''' \end{bmatrix} = \left[\begin{array}{r|rrrr} 126 & \frac{1}{4} & \frac{5}{4} & 1 & 1 \\ \hline 3 & \frac{1}{8} & \frac{1}{8} & 0 & 0 \\ 24 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 3 & \frac{1}{8} & \frac{1}{8} & 1 & -1 \\ 24 & 0 & 2 & 0 & 0 \\ 60 & -\frac{1}{2} & \frac{2}{3} & -1 & 1 \end{array}\right] \begin{bmatrix} 1 \\ \hline -u_1''' \\ -x_2''' \\ -u_2''' \\ -u_5''' \end{bmatrix} \equiv \mathfrak{A}_3(-\mathfrak{y}''').$$

Itt már $\mathbf{a}^0_{'''} > \mathbf{0}^*$, tehát valóban az optimális programhoz jutottunk; ez és értéke ($\mathbf{y}''' = \mathbf{0}$ választással) eképpen olvasható ki az $\mathfrak{A}_3$ matrixból:

$$\mathbf{x}^*_{\text{opt}} \equiv \mathbf{x}'''^* \equiv [x_1''', x_2''', x_3''', x_4'''] = \mathbf{a}_0'''^* = [3, 0, 24, 60],$$

$$\mathbf{u}^*_{\text{opt}} \equiv \mathbf{u}'''^* \equiv [u_1''', u_2''', u_3''', u_4''', u_5'''] = [0, 0, 3, 24, 0],$$

$$u_{0\,\text{opt}} \equiv u_0''' = a_{00}''' = 126.$$

Ellenőrzésre felhasználhatjuk az előzőkből szintén ismert

$$\mathfrak{A}_3 = \mathfrak{A}_0 - \mathfrak{A}_{\text{III}}^{(-)} \mathbf{A}_{33}^{-1} \mathfrak{A}_{(+)}^{\text{III}}$$

szimplex-matrixformulánkat (SMF).

II°. Az előbbi feladat, általánosítva. Az előbbi termelési feladatot egészítsük ki azzal a (pl. szerződési kötelezettségen alapuló) *követeléssel,* hogy

$$x_2 = 10 \quad \text{és} \quad x_4 \geqq 30$$

legyen. A feladat teljes formularendszere (eredeti alakban, skaláris írásmóddal) most tehát így alakul:

$$x_1 \geqq 0, \quad x_2 \geqq 0, \quad x_3 \geqq 0, \quad x_4 \geqq 0;$$

$$6x_1 + x_2 + 2x_3 + x_4 = \text{Max!}$$

$$\left.\begin{array}{rcl} 8x_1 + x_2 & \leqq & 24 \\ x_3 & \leqq & 24 \\ 3x_1 + 2x_2 + x_4 & \leqq & 72 \\ 2x_2 & \leqq & 24 \\ 4x_1 + 2x_2 + x_3 + x_4 & \leqq & 96 \\ x_2 & = & 10 \\ x_4 & \geqq & 30 \end{array}\right\}$$

Láthatóan, *a l. prs általános feladatával* állunk szemben, megoldását tehát a *b) γ)* II° szerint kell eszközölnünk. A megfelelő alapegyenlet most így hangzik (az új v változóval):

$$\mathfrak{u} \equiv \begin{bmatrix} u_0 \\ \hline u_1 \\ u_2 \\ u_3 \\ u_4 \\ u_5 \\ {}^*u_6 \\ {}^*u_7 \end{bmatrix} = \left[\begin{array}{r|rrrrr} 0 & -6 & -1 & -2 & -1 & 0 \\ \hline 24 & 8 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 24 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 72 & 3 & 2 & 0 & 1 & 0 \\ 24 & 0 & 2 & 0 & 0 & 0 \\ 96 & 4 & 2 & 1 & 1 & 0 \\ 10 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 30 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 \end{array}\right] \begin{bmatrix} 1 \\ \hline -x_1 \\ -x_2 \\ -x_3 \\ -x_4 \\ -v \end{bmatrix} \equiv \mathfrak{A}_0(-\mathfrak{x}).$$

Generáló elemnek pl. az $a_{62} = 1$-et, majd az a'_{74}-et választva és ennek során a nembázis-változók közé kerülő ${}^*u_6$ és ${}^*u_7$ csillagos változók oszlopát célszerűen elhagyva, ezt kapjuk, az első ütem eredményeként:

$$\mathfrak{v}'' \equiv \begin{bmatrix} u_0'' \\ \hline u_1'' \\ u_2'' \\ u_3'' \\ u_4'' \\ u_5'' \\ x_2'' \\ x_4'' \end{bmatrix} = \left[\begin{array}{r|rrr} 40 & -6 & -2 & -1 \\ \hline 14 & 8 & 0 & 0 \\ 24 & 0 & 1 & 0 \\ 22 & 3 & 0 & 1 \\ 4 & 0 & 0 & 0 \\ 46 & 4 & 1 & 1 \\ 10 & 0 & 0 & 0 \\ 30 & 0 & 0 & -1 \end{array}\right] \begin{bmatrix} 1 \\ \hline -x_1'' \\ -x_3'' \\ -v'' \end{bmatrix} \equiv \mathfrak{A}_2(-\mathfrak{y}'').$$

A második ütemben hozzálátunk az u_0 eredeti célfüggvény maximálását célzó szokásos eljáráshoz. Generáló elemnek egymás után az

$$a''_{11} = 8, \quad a'''_{22} = 1, \quad a^{(4)}_{33} = 1$$

számokat választva (s ez úton mindvégig a normál feladat rendes esetében maradva), végül az alábbi optimális szimplex-egyenlethez jutunk:

$$\mathfrak{v}^{(5)} \equiv \begin{bmatrix} u_0^{(5)} \\ \hline x_1^{(5)} \\ x_3^{(5)} \\ u_3^{(5)} \\ u_4^{(5)} \\ v^{(5)} \\ x_2^{(5)} \\ x_4^{(5)} \end{bmatrix} = \left[\begin{array}{c|ccc} 113\frac{1}{2} & \frac{1}{4} & 1 & 1 \\ \hline \frac{7}{4} & \frac{1}{8} & 0 & 0 \\ 24 & 0 & 1 & 0 \\ \frac{7}{4} & \frac{1}{8} & 1 & -1 \\ 4 & 0 & 0 & 0 \\ 15 & -\frac{1}{2} & -1 & 1 \\ 10 & 0 & 0 & 0 \\ 45 & -\frac{1}{2} & -1 & 1 \end{array}\right] \begin{bmatrix} 1 \\ \hline -u_1^{(5)} \\ -u_2^{(5)} \\ -u_5^{(5)} \end{bmatrix} \equiv \mathfrak{A}_5(-\mathfrak{y}^{(5)}), \qquad (\mathbf{a}^0_{(5)} > \mathbf{0}^*).$$

Ebből az optimális program és értéke nyilván a következő:

$$\mathbf{x}^*_{\text{opt}} = \left[\frac{7}{4}, 10, 24, 45\right], \quad \mathbf{u}^*_{\text{opt}} = \left[0, 0, \frac{7}{4}, 4, 0, 0, 0.\right], \quad u_{0\,\text{opt}} = 113\frac{1}{2}.$$

Minthogy az előbbi feladatban $u_{0\,\text{opt}} = 126$ volt, megállapíthatjuk, hogy a két utólagos kényszerfeltétel a program értékét csökkentette (ami várható is volt).

III°. Termelési érték maximálása. Az I°-beli termelési feladatot most olyan értelemben módosítjuk, hogy az ottani fajlagos hozamok [Ft/cikkadag] helyébe a *fajlagos termelési értékek* [Ft/cikkadag] lépnek, az összes hozam [Ft] helyébe az *összes termelési érték* [Ft].

Számszerűen a fajlagos termelési értékek legyenek (ellenkező előjellel) az $\mathbf{a}^0 = [-56, -10, -17, -11]$ vektorba foglalva. Minden más számadat legyen változatlan. Az induló alapegyenlet tehát ez lesz:

$$\mathfrak{u} \equiv \begin{bmatrix} u_0 \\ \mathbf{u} \end{bmatrix} \equiv \begin{bmatrix} u_0 \\ \hline u_1 \\ u_2 \\ u_3 \\ u_4 \\ u_5 \end{bmatrix} = \left[\begin{array}{c|cccc} 0 & -56 & -10 & -17 & -11 \\ \hline 24 & 8 & 1 & 0 & 0 \\ 24 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 72 & 3 & 2 & 0 & 1 \\ 24 & 0 & 2 & 0 & 0 \\ 96 & 4 & 2 & 1 & 1 \end{array}\right] \begin{bmatrix} 1 \\ \hline -x_1 \\ -x_2 \\ -x_3 \\ -x_4 \end{bmatrix} \equiv \begin{bmatrix} a_{00} & \mathbf{a}^0 \\ \mathbf{a}_0 & \mathbf{A} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ -\mathbf{x} \end{bmatrix} \equiv \mathfrak{A}(-\mathfrak{x}).$$

Látható, hogy az I°-beli alapegyenlethez képest csak az $\mathbf{a}^0$ vektorban van változás, más szóval az új feladat a réginek egy változata, *variánsa*. A régi feladat megoldásának birtokában szükségtelen az új feladat megoldását elölről kezdeni, hanem célszerű a régi feladat optimális táblázatának bizonyos elemeiből és az új $\mathbf{a}^0$ vektorból közvetlenül az új optimális program értékét kiszámítani és optimalitását az új $\mathbf{a}^0_{(p)}$-vel ellenőrizni, (ésszerűen megmaradva a korábbi generáló elemek, vagyis a_{11}, a'_{23}, a''_{54} mellett). A számítást a *b) β)* V°-ban megismert (24*c*) matrix értelemszerű alkalmazásával eszközöljük. Esetünkben:

$$-\mathbf{a}^{01} = [56, 17, 11], \quad -a^{02} \equiv -a_{02} = 10, \quad \mathbf{a}^*_{10} = [24, 24, 96]$$

$$\mathbf{A}_{11} = \begin{bmatrix} 8 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 4 & 1 & 1 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{A}_{12} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{A}_{21} = \begin{bmatrix} 3 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{A}_{22} = \begin{bmatrix} 2 \\ 2 \end{bmatrix},$$

továbbá — a régi feladat optimális táblázatából —

$$\Gamma \equiv \mathbf{A}_{11}^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{1}{8} & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ -\frac{1}{2} & -1 & 1 \end{bmatrix}, \quad \boldsymbol{\delta}_0 \equiv \mathbf{A}_{11}^{-1}\mathbf{a}_{10} = \begin{bmatrix} 3 \\ 24 \\ 60 \end{bmatrix}, \quad \boldsymbol{\Delta}_2 = \mathbf{A}_{11}^{-1}\mathbf{A}_{12} = \begin{bmatrix} \frac{1}{8} \\ 0 \\ \frac{3}{2} \end{bmatrix}.$$

Ezek felhasználásával, a (24*c*) matrix alapján írható, hogy

$$\mathbf{a}^{01}_{(3)} = -\mathbf{a}^{01}\Gamma = [56, 17, 11] \begin{bmatrix} \frac{1}{8} & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ -\frac{1}{2} & -1 & 1 \end{bmatrix} = \left[\frac{3}{2}, 6, 11\right] > \mathbf{0}^*,$$

$$a^{02}_{(3)} = a^{02} - \mathbf{a}^{01}\boldsymbol{\Delta}_2 = -10 + [56, 17, 11] \begin{bmatrix} \frac{1}{8} \\ 0 \\ \frac{3}{2} \end{bmatrix} = -10 + 23\frac{1}{2} = 13\frac{1}{2} > 0.$$

Eszerint a (korábbi generáló elemek mellett nyert) $\mathfrak{A}_3$ valóban optimális matrix. Az optimális program — a (24*c*) matrix értelmében — változatlan marad, azaz

$$\mathbf{x}^*_{opt} = [3, 0, 24, 60], \qquad \mathbf{u}^*_{opt} = [0, 0, 3, 24, 0],$$

értéke azonban módosul, mégpedig

$$u_{0\,\mathrm{opt}} \equiv u_0^{(3)} = 0 - \mathbf{a}^{01}\delta_0 = 0 + [56, 17, 11]\begin{bmatrix} 3 \\ 24 \\ 60 \end{bmatrix} = 1236.$$

Az $\mathfrak{A}_3 \equiv \mathfrak{A}_{\mathrm{opt}}$ matrix egyéb elemei változatlanok. Ezzel variánsfeladatunkat megoldottuk.

IV°. Önköltség minimálása. Az előbbi feladathoz képest csak annyi a változás, hogy az ottani fajlagos termelési értékek helyébe most *a fajlagos önköltségek,* ill. *az összes önköltség* lépnek.

Számszerűen legyenek most a fajlagos önköltségek (ellenkező előjellel) az $\mathbf{a}^0 = [50, 9, 15, 10]$ vektor koordinátái. Minden más számadat legyen változatlan. A feladat tehát így hangzik:

$$\mathbf{x} \geqq \mathbf{0}, \quad \mathbf{u} \geqq \mathbf{0}, \quad u_0 = \mathrm{Min!}$$

$$\hat{\mathfrak{u}} \equiv \begin{bmatrix} u_0 \\ \mathbf{u} \end{bmatrix} \equiv \begin{bmatrix} u_0 \\ u_1 \\ u_2 \\ u_3 \\ u_4 \\ u_5 \end{bmatrix} = \left[\begin{array}{c|cccc} 0 & 50 & 9 & 15 & 10 \\ \hline 24 & 8 & 1 & 0 & 0 \\ 24 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 72 & 3 & 2 & 0 & 1 \\ 24 & 0 & 2 & 0 & 0 \\ 96 & 4 & 2 & 1 & 1 \end{array}\right] \begin{bmatrix} 1 \\ \hline -x_1 \\ -x_2 \\ -x_3 \\ -x_4 \end{bmatrix} \equiv \begin{bmatrix} a_{00} & \mathbf{a}^0 \\ \mathbf{a}_0 & \mathbf{A} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ -\mathbf{x} \end{bmatrix} \equiv \hat{\mathfrak{A}}(-\mathfrak{x}).$$

E *minimumfeladat* nyilván *ekvivalens az alábbi maximumfeladattal:*

$$\mathbf{x} \geqq \mathbf{0}, \quad \mathbf{u} \geqq \mathbf{0}, \quad u_0 = \mathrm{Max!}$$

$$\mathfrak{u} \equiv \begin{bmatrix} u_0 \\ \mathbf{u} \end{bmatrix} \equiv \begin{bmatrix} u_0 \\ u_1 \\ u_2 \\ u_3 \\ u_4 \\ u_5 \end{bmatrix} = \left[\begin{array}{c|cccc} 0 & -50 & -9 & -15 & -10 \\ \hline 24 & 8 & 1 & 0 & 0 \\ 24 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 72 & 3 & 2 & 0 & 1 \\ 24 & 0 & 2 & 0 & 0 \\ 96 & 4 & 2 & 1 & 1 \end{array}\right] \begin{bmatrix} 1 \\ \hline -x_1 \\ -x_2 \\ -x_3 \\ -x_4 \end{bmatrix} \equiv$$

$$\equiv \begin{bmatrix} a_{00} & \mathbf{a}^0 \\ \mathbf{a}_0 & \mathbf{A} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ -\mathbf{x} \end{bmatrix} \equiv \mathfrak{A}(-\mathfrak{x}).$$

E feladat — láthatóan — variánsa az I°-belinek és a III°-belinek; azok adataitól csak az $\mathbf{a}^0$ vektorban tér el. E variánsszámítást teljesen a III°-beli mintájára, sőt számos részletének felhasználásával végezhetjük (ugyanazon generáló elemeknél maradva). Írható tehát, hogy

$$-\mathbf{a}^{01} = [50, 15, 10], \qquad -a^{02} = 9;$$

$$\mathbf{a}^{01}_{(3)} = -\mathbf{a}^{01}\Gamma = [50,\ 15,\ 10]\begin{bmatrix} \frac{1}{8} & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ -\frac{1}{2} & -1 & 1 \end{bmatrix} = \left[\frac{5}{4},\ 5,\ 10\right] > \mathbf{0}^*,$$

$$a^{02}_{(3)} = a^{02} - \mathbf{a}^{01}\Delta_2 = -9 + [50,\ 15,\ 10]\begin{bmatrix} \frac{1}{8} \\ 0 \\ \frac{3}{2} \end{bmatrix} = -9 + 21\frac{1}{4} = 12\frac{1}{4} > 0,$$

és így $\mathfrak{A}_3 \equiv \mathfrak{A}_{\text{opt}}$, továbbá

$$u_{0\,\text{opt}} = u_0^{(3)} = 0 - \mathbf{a}^{01}\delta_0 = 0 + [50,\ 15,\ 10]\begin{bmatrix} 3 \\ 24 \\ 60 \end{bmatrix} = 1100.$$

Az $\mathbf{x}_{\text{opt}}$ és az $\mathbf{u}_{\text{opt}}$ ugyanaz, mint az előbb.

Ezek után megállapíthatjuk, hogy a termelés programozása maximális összes hozamra vagy termelési értékre és minimális összes önköltségre — a fajlagos mutatókon kívül megegyező adatok mellett — egy és *ugyanazon optimális programra,* de különböző optimális programértékre vezet.

β) Gazdaságos keverésiarány-problémák

I°. Gazdaságos alapanyag-fogyasztás. Tegyük fel, hogy valamely légi közlekedési üzemben az $1, 2, \ldots, j, \ldots, m$ sorszámú alapanyagból az $1, 2, \ldots, i, \ldots, n$ sorszámú standard üzemanyagokat keverik oly módon, hogy a j-edik alapanyag egysége az i-edik keverék a_{ij} mennyiségében van jelen. Ismeretes továbbá az üzemanyagok minimális szükséglete, a_{i0} (az adott géptípusoknak megfelelően és bizonyos időszakra, pl. egy hétre vonatkozólag), továbbá az alapanyagok egységköltsége, $-a_{0j}(> 0)$. Megállapítandó a minimális összköltségű alapanyag-fogyasztás, x_j.

A feladat nyilván így *formulázható* meg:

$$x_j \geqq 0 \qquad (j = 1, 2, \ldots, m);$$

$$(K \equiv)\ -\sum_{j=1}^{m} a_{0j}x_j = \text{Min!} \qquad (-a_{0j} > 0);$$

$$(Q_i \equiv)\quad \sum_{j=1}^{m} a_{ij}x_j \geqq a_{j0}(> 0) \qquad (i = 1, 2, \ldots, n).$$

Számszerűen legyen pl. az eredeti, ill. a bővített alakban

$$\begin{array}{l|l} x_1 \geqq 0, \quad x_2 \geqq 0; & x_j \geqq 0, \quad u_i \geqq 0, \quad u_0 = \text{Min!} \\ 5x_1 + 6x_2 = \text{Min!} & u_0 = -0 + 5x_1 + 6x_2 \\ 2x_1 + x_2 \geqq 6 & u_1 = -6 + 2x_1 + x_2 \\ 2x_1 + 4x_2 \geqq 12 & u_2 = -12 + 2x_1 + 4x_2 \\ 4x_2 \geqq 4 & u_3 = -4 + 4x_2. \end{array}$$

E primál minimumfeladat helyett célszerű a megfelelő *duál maximumfeladatot* megoldani, azaz

$$\begin{array}{l|l} y_1 \geqq 0, \quad y_2 \geqq 0, \quad y_3 \geqq 0; & y_i \geqq 0, \quad v_j \geqq 0, \quad v_0 = \text{Max!} \\ 6y_1 + 12y_2 + 4y_3 = \text{Max!} & v_0 = 0 - 6(-y_1) - 12(-y_3) - 4(-y_3) \\ 2y_1 + 2y_2 \leqq 5 & v_1 = 5 + 2(-y_1) + 2(-y_2) \\ y_1 + 4y_2 + 4y_3 \leqq 6. & v_2 = 6 + 1(-y_1) + 4(-y_2) + 4(-y_3). \end{array}$$

Az utóbbiban a_{11}, a'_{22} generáló elemekkel próbálkozva írható, hogy

$$\mathbf{a}^{01} = [-6, -12], \quad a^{02} = -4, \quad \mathbf{a}_0^* = [5, 6]\,\mathbf{A}_{11} =$$

$$= \begin{bmatrix} 2 & 2 \\ 1 & 4 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{A}_{11}^{-1} = \frac{1}{6}\cdot\begin{bmatrix} 4 & -2 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{a}_{12} = \begin{bmatrix} 0 \\ 4 \end{bmatrix}, \quad \boldsymbol{\Delta}_2 = \mathbf{A}_{11}^{-1}\mathbf{a}_{12} = \frac{1}{6}\cdot\begin{bmatrix} -8 \\ 8 \end{bmatrix};$$

$$\mathbf{a}_{(2)}^{01} = -\mathbf{a}^{01}\mathbf{A}_{11}^{-1} = \frac{1}{6}\cdot[6, 12]\begin{bmatrix} 4 & -2 \\ -1 & 2 \end{bmatrix} = [1, 2]\begin{bmatrix} 4 & -2 \\ -1 & 2 \end{bmatrix} = [2, 2] > \mathbf{0}^*,$$

$$a_{(2)}^{02} = a^{02} - \mathbf{a}^{01}\boldsymbol{\Delta}_2 = -4 + \frac{1}{6}\cdot[6, 12]\begin{bmatrix} -8 \\ 8 \end{bmatrix} = -4 + 8\cdot[1, 2]\begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix} =$$

$$= -4 + 8 = 4 \quad > 0,$$

tehát így az optimális duálprogramhoz jutottunk, mégpedig

$$\mathbf{y}_{1\,\mathrm{opt}} = \mathbf{y}_1'' = \boldsymbol{\delta}_0 = \mathbf{A}_{11}^{-1}\mathbf{a}_0 = \frac{1}{6}\cdot\begin{bmatrix} 4 & -2 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 5 \\ 6 \end{bmatrix} = \frac{1}{6}\cdot\begin{bmatrix} 8 \\ 7 \end{bmatrix} > \mathbf{0},$$

$$y''_{3\,\mathrm{opt}} = v''_{1\,\mathrm{opt}} = v''_{2\,\mathrm{opt}} = 0;$$

$$v_{0\,\mathrm{opt}} = v_0'' = a_{00} - \mathbf{a}^{01}\boldsymbol{\delta}_0 = 0 + \frac{1}{6}\cdot[6, 12]\begin{bmatrix} 8 \\ 7 \end{bmatrix} = [1, 2]\begin{bmatrix} 8 \\ 7 \end{bmatrix} = 22.$$

Ebből egyszersmind az optimális primálprogram is kiolvasható, mégpedig

$$\mathbf{x}_{\mathrm{opt}}^* = \mathbf{a}^{01} = [2, 2], \quad u_{3\,\mathrm{opt}} = a_{(2)}^{02} = 4;$$

$$u_{1\,\mathrm{opt}} = u_1'' = 0, \quad u_{2\,\mathrm{opt}} = u_2'' = 0; \quad u_{0\,\mathrm{opt}} = v_{0\,\mathrm{opt}} = 22.$$

II°. Gazdaságos üzemanyag-keverés. Legyen ismét az 1, 2, ..., i, ..., m sorszámú alapanyag használatos a légi közlekedési üzemben és belőle most csak egyetlen üzemanyag készítendő, valamilyen $x_1 : x_2 : \ldots : x_m$

($\sum_j x_j = 1$) arányú keveréssel. Legyen továbbá az $1, 2, \ldots, i, \ldots, n$ sorszámmal jelezve az alapanyagok és az üzemanyag egy-egy tömegarányos mutatója (pl. kalória-, űr- stb.-tartalom), amely az alapanyagok egységében éppen a_{ij} mértékben van jelen, a keverék egységében pedig legalább, legfeljebb, ill. pontosan a_{i0} mennyiségben kell foglaltatnia. Az alapanyagok — a_{0j} egységköltségének ismeretében meghatározandó az $x_{j\,\mathrm{opt}}$ gazdaságos keverési arány.

A feladat most így *formulázható* meg:

$$x_j \geqq 0 \quad (j = 1, 2, \ldots, m);$$
$$(K \equiv) - \sum_j a_{0j}x_j = \text{Min!}$$
$$\sum_j x_j = 1,$$
$$(Q_i \equiv) \quad \sum_j a_{ij}x_j \underset{(<)}{\overset{>}{=}} a_{i0}$$
$$(i = 1, 2, \ldots, n).$$

Számszerűen legyen pl. primál minimumfeladat a következő:

$$\begin{array}{l|l} x_1 \geqq 0, \quad x_2 \geqq 0; & x_j \geqq 0, \quad u_i \geqq 0, \quad u_0 = \text{Min!} \\ 4x_1 + 3x_2 = \text{Min!} & u_0 = -0 + 4x_1 + 3x_2 \\ \left.\begin{array}{l} x_1 + x_2 = 1 \\ 2x_1 + 3x_2 \geqq \frac{1}{2} \\ 3x_1 + 2x_2 \geqq \frac{9}{4} \end{array}\right\} & \left.\begin{array}{l} u_1 = -1 + x_1 + x_2 \\ u_2 = -\frac{1}{2} + 2x_1 + 3x_2 \\ u_3 = -\frac{9}{4} + 3x_1 + 2x_2 \end{array}\right\} \end{array}$$

Egyszerű esetünkben *elemi úton is* megoldható a feladat. Az első feltételi egyenlet értelmében ugyanis $x_2 = 1 - x_1$ helyettesítéssel az egész formularendszerből kiküszöbölhető az x_2, nyerve a következő egy változós, feltételes minimumfeladatot:

$$x_1 \geqq 0, \quad x_1 + 3 = \text{Min!}$$
$$x_1 \leqq \frac{5}{2}, \quad x_1 \geqq \frac{1}{4}.$$

Az $y_1 = x_1 + 3$ függvény az $\frac{1}{4} \leqq x_1 \leqq \frac{5}{2}$ szakaszon nyilván az $x_1 = \frac{1}{4}$ helyen veszi fel minimumát, az $y_1 = \frac{10}{4}$ értéket. Az optimális program és értéke tehát ez lesz:

$$x_{1\,\mathrm{opt}} = \frac{1}{4}, \quad x_{2\,\mathrm{opt}} = 1 - x_{1\,\mathrm{opt}} = \frac{3}{4}, \quad u_{0\,\mathrm{opt}} = \frac{10}{4}.$$

Természetesen, *nagyobb méretű* feladatok esetén az általános 1. prs-i feladat megoldásáról tanultak szerint (l. a *b) γ)*-ban) és ismert matrixalgoritmusunk alkalmazásával járunk el.

III°. Gazdaságos takarmányozás (diéta). Valamely termelőszövetkezet bizonyos állatfajta etetésére az $1, 2, \ldots, j, \ldots, m$ jelű takarmányokat alkalmazza. Az állatoknak az $1, 2, \ldots, i, \ldots, n$ jelű vitaminokból és egyéb alapvető tápanyagokból (egységnyi időszakban, pl. egy héten) legalább $a_{i0}(> 0)$ mennyiségre van szükségük (mert kevesebb káros lenne, több pedig nem járna lényeges haszonnal); az említett takarmányok egységnyi mennyiségében ezek a_{ij} mértékben vannak jelen. Ismerve még a takarmányok fajlagos költségét, $-a_{0j}$ (> 0)-t, keresendők a leggazdaságosabb (legkisebb összköltségű) takarmányozás x_j tételei.

A feladat *megformulázása* a következő:

$$x_j \geqq 0 \quad (j = 1, 2, \ldots, m);$$

$$(K \equiv) = \sum_j a_{0j} x_j = \text{Min!}$$

$$(Q_i \equiv) \sum_j a_{ij} x_j \geqq a_{i0}$$

$$(i = 1, 2, \ldots, n).$$

A formularendszer s így a feladat megoldása is a *β) I°*-belihez hasonló. Megjegyzendő, hogy a kényszerfeltételek között felülről korlátozó is előfordulhat; a feladat ilyenkor általánossá válik.

Számpélda: $x_1 \geqq 0, \quad x_2 \geqq 0;$

$$u_0 = 30x_1 + 50x_2 = \text{Min!}$$

$$\left.\begin{aligned} 150x_1 + 200x_2 &\geqq 200 \\ 14x_1 + 4x_2 &\leqq 14 \end{aligned}\right\}.$$

Általános feladat; megoldása: $x_{1\,\text{opt}} = 0{,}909$; $x_2 = 0{,}318$; $u_{0\,\text{opt}} = 43{,}170$.

γ) Gazdaságos ütemtervezési feladatok*

I°. Optimális létszámütemezés. Valamely folytonosan működő üzemben, pl. vasúti állomáson, a munka eloszlása olyan, hogy a (0 órától kezdve) egymást követő, egyenlő hosszúságú (t órás) $1, 2, \ldots, i, \ldots, n$ $(= 24/t)$ sorszámú időszakokban, ún. turnusokban, rendre legalább $a_{10}, a_{21}, \ldots, a_{i0}, \ldots, a_{in}$ főnyi létszámra van szükség. Minden munkás két egymást követő turnust (tehát egyhuzamban 2 t órát) dolgozik végig. Kérdés, hogyan kell megállapítani a turnusok elején munkába lépők $x_1, x_2, \ldots, x_i,$

* L. pl. *Beckenbach* [62], *Hosszú* [61].

..., x_n létszámát úgy, hogy ezek összege, vagyis az igénybe vett munkások létszáma minimális legyen.

A feladat (a gyakorlati $t = 4$ óra, $m = 24/4 = 6$ turnus esetére) eképpen *formulázható* meg:

$$x_i \geqq 0 \qquad (i = 1, 2, \dots, 5, 6);$$

$$(u_0 \equiv) \sum_i x_i = \text{Min!}$$

$$x_i + x_{i+1} \geqq \alpha_i \equiv \begin{cases} A_i, & \text{ha} \quad a_{i0} \neq A_{i-1}; \\ a_{i+1,0}, & \text{ha} \quad a_{j0} = A_{i-1}; \end{cases}$$

$$[A_i \equiv \text{maj}\,(a_{i0};\, a_{i+1,0}), \quad x_7 \equiv x_1, \quad a_{70} \equiv a_{10}].$$

Számszerűen legyen a turnusonként szükséges a_{i0} minimális létszám rendre

$$a_{i0}:\ 3,\ 8,\ 10,\ 8,\ 14,\ 5;$$

a megfelelő α_i mutatók pedig

$$\begin{array}{ccccccc} \alpha_i: & 8, & 10, & 8, & 14, & 5, & 3. \\ & (A_1) & (A_2) & (a_{40}) & (A_4) & (a_{60}) & (a_{10}) \end{array}$$

Formularendszerünk tehát most — részletesen kiírva — így alakul:

$$x_1 \geqq 0, \quad x_2 \geqq 0, \dots, x_6 \geqq 0;$$

$$(u_0 \equiv) \quad x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 + x_6 = \text{Min!}$$

$$\left.\begin{array}{rcl} x_1 + x_2 & \geqq & 8 \\ x_2 + x_3 & \geqq & 10 \\ x_3 + x_4 & \geqq & 8 \\ x_4 + x_5 & \geqq & 14 \\ x_5 + x_6 & \geqq & 5 \\ x_1 + \qquad\qquad\qquad + x_6 & \geqq & 3 \end{array}\right\}$$

Az egyenlőtlenség-rendszer egyszerű szerkezete lehetővé teszi az elemi úton való megoldást. Sorozatos kiküszöböléssel azt kapjuk ugyanis, hogy

$$x_2 \geqq 8 - x_1, \quad x_3 \geqq 2 + x_1, \quad x_4 \geqq 6 - x_1,$$

$$x_5 \geqq 8 + x_1, \quad [x_6 \geqq -3 - x_1,] \quad x_6 \geqq 3 - x_1,$$

(ahol az utolsó előtti relációt — mint az utolsóból következőt — mellőzzük. Ezek felhasználásával a célfüggvény

$$u_{0\,\text{opt}} = x_1 + (8 - x_1) + (2 + x_1) + (6 - x_1) + (8 + x_1) + (3 - x_1) = 27 \text{ (fő)}$$

minimuma adódik, a (paraméter jellegű) x_1 választásától függetlenül. Az előbbi egyenlőtlenségekből és az x_i-k nemnegativitási követelményéből következik, hogy

$$0 \leqq x_1 \leqq 3.$$

Az x_i létszámok természetes *integritásának* (egészszámúságának) megfelelően, az alábbi *alternatív optimumok* léteznek:

x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	$\sum_i x_i$
0	8	2	6	8	3	27
1	7	3	5	9	2	27
2	6	4	4	10	1	27
3	5	5	3	11	0	27

II°. Gazdaságos termelésütemezés. Valamely alkatrészgyár havi áruforgalmának (keresletének) várható (előzetes tapasztalati adatokból becsült) alakulását jellemezze a k_i (db/hónap; $i = 1, 2, \ldots, n$) sorozat. A gyártás nem szokta szorosan követni a keresletet, hanem pl. gyengébb hónapokban a keresleten túl raktárra dolgozik normál termeléssel, erősebb hónapokban pedig még túlórás termelést is latba vet a kereslet biztosítására. A raktározás és a túlórázás azonban többletköltséggel jár, tehát csak bizonyos mértékben helyes élni vele. Legyen *az i-edik hónapban* x_i (db) a normál termelés, a_i (db) felső korláttal (kapacitással); ξ_i (db) a túlórás termelés, α_i (db) felső korláttal, β (Ft/db) fajlagos havi költséggel; r_i (db) a raktárkészlet, 0 (db) alsó korláttal, r_0 (db) kezdeti értékkel, b (Ft/db) fajlagos havi költséggel. Keresendő a minimális K (túlórázási és raktározási) többletköltséggel járó termelési ütemterv (menetrend), vagyis az $x_{i\,\mathrm{opt}}$, $\xi_{i\,\mathrm{opt}}$ sorozat.

Ezek után feladatunk eképpen *formulázható* meg:

$$0 \leqq x_i \leqq a_i; \qquad 0 \leqq \xi_i \leqq \alpha_i;$$

$$r_i = r_0 + \sum_{l=1}^{i} x_l + \sum_{l=1}^{i} \xi_l - \sum_{l=1}^{i} k_l \geqq 0 \quad (i = 1, 2, \ldots, n)$$

$$(K \equiv)\, \beta \sum_{i=1}^{n} \xi_i + b \sum_{i=1}^{n} r_i =$$

$$= b\left[nr_0 + \sum_{i=1}^{n}\left(\sum_{l=1}^{i} \xi_l + \frac{\beta}{b}\xi_i + \sum_{l=1}^{i} x_l - \sum_{l=1}^{i} k_l\right)\right] = \mathrm{Min!}$$

Írjuk fel külön és részletesen az $n = 2$ *speciális esetnek* (kéthónapos időszaknak) megfelelő formularendszert:

$$x_1 \geqq 0, \quad x_2 \geqq 0; \quad \xi_1 \geqq 0, \quad \xi_2 \geqq 0;$$

$$(K \equiv)\ 2bx_1 + bx_2 + (2b + \beta)\xi_1 + (b + \beta)\eta_2 + b(2r_0 - 2k_1 - k_2) = \text{Min!}$$

$$\left.\begin{array}{l} -x_1 + a_1 \geqq 0 \\ -x_2 + a_2 \geqq 0 \\ -\xi_1 + \alpha_1 \geqq 0 \\ -\xi_2 + \alpha_2 \geqq 0 \\ x_1 + \xi_1 + (r_0 - k_1) \geqq 0 \\ x_1 + x_2 + \xi_1 + \xi_2 + (rt - k_1 - k_2) \geqq 0 \end{array}\right\}$$

A megfelelő *duál maximumfeladat* ez lesz:

$$y_1 \geqq 0, \quad y_2 \geqq 0; \quad \eta_1 \geqq 0, \quad \eta_2 \geqq 0;$$

$$(L \equiv)\ -a_1y_1 - a_2y_2 - \alpha_1\eta_1 - \alpha_2\eta_2 + (k_1l_1 + k_1l_2 + k_2l_2) = \text{Max!}$$

$$\left.\begin{array}{l} y_1 + (l_1 + l_2 - 2b) \leqq 0 \\ y_2 + (l_2 - b) \leqq 0 \\ \eta_1 + (l + l_2 - 2b - \beta) \leqq 0 \\ \eta_2 + (l_2 - b - \beta) \leqq 0 \end{array}\right\}$$

Itt az y_i, η_i és l_i mennyiségek ún. határköltségek.

E feladatok a 1. prs általános feladatával kapcsolatos ismereteink szerint oldhatók meg.

III°. Termelésütemezés, vállalatokra lebontva. Legyen az említett alkatrészekből a havi kereslet k_j $(j = 1, 2, \ldots, m)$, *az i-edik gyártó üzem* $(i = 1, 2, \ldots, n)$ havi kapacitása a_i, *fajlagos önköltsége* pedig a j-edik hónapban a_{ij}. Az esetleges eladatlan készletek *raktározásra* kerülnek r_{ij} mennyiségben, (megkezdett) havonként b fajlagos költséggel (és $r_0 = 0$ kezdeti raktárkészlettel). A túlórás termeléstől most eltekintünk $(\xi_{ij} \equiv 0)$. Keresendő a minimális (ön- és raktározási) összköltséggel járó termelési ütemterv, vagyis az $x_{ji,\text{opt}}$ sorozat. (E feladat — láthatóan — összetettebb az előzőnél!)

A feladat *megformulázása* most nyilván így alakul:

$$0 \leqq x_{ij} \leqq a_i \quad (i = 1, 2, \ldots, n);$$

$$(R_j \equiv)\ \sum_{i=1}^{n} r_{ij} = \sum_{l=1}^{m}\left(\sum_{i=1}^{n} x_{il} - k_l\right) \geqq 0 \quad (j = 1, 2, \ldots, m);$$

$$(K \equiv) \sum_{i=1}^{n}\left[\sum_{j=1}^{m}(a_{ij}x_{ij} + br_{ij})\right] =$$

$$= \sum_{j=1}^{m}\left[\sum_{i=1}^{n}\left(b\sum_{l=1}^{j} x_i + a_{ij}x_{ij}\right) - b\sum_{l=1}^{j} k_l\right] = \text{Min!}$$

Számszerűen legyen pl. $n = 2$, $m = 4$, továbbá $[k_j] = [8, 12, 16, 10] \cdot 10^3$;

$$[a_i]^* = [8, 6] \cdot 10^3,$$

$$\left\langle \sum_j k_j = 46 \cdot 10^3 < m \cdot \sum_i a_i = 4 \cdot 14 \cdot 10^3 = 56 \cdot 10^3 \right\rangle;$$

$$[a_{ij}] = \begin{bmatrix} 4 & 6 & 8 & 5 \\ 6 & 8 & 10 & 7 \end{bmatrix}, \quad b = 1.$$

Oldjuk meg ilyen adatok mellett feladatunkat, a 1. prs általános feladatára vonatkozó ismereteink szerint!

d) Szállítási és egyéb lineáris programozás, szimplex-matrixalgoritmussal (StMA, ScMA)

α) A szállítási probléma és különböző alakjai

I°. Megformulázása. *1'.* Tegyük fel, hogy valamely homogén terméket (pl. cementet) n különböző *telephelyen* tárolunk, mégpedig az i-edik telephelyen (T_i) $t_i > 0$ mennyiségben ($i = 1, 2, \ldots, n$) és e terméket m különböző *felvevőhelyre* kell elszállítani, mégpedig a j-edik felvevőhelyre (F_j) $f_j > 0$ mennyiségben ($j = 1, 2, \ldots, m$). A T_i-ről az F_j-re szállítandó *termékmennyiséget* jelöljük x_{ij} (> 0)-vel, a termékmennyiség szállítási költségét (az ún. szállítási *koefficienst*) pedig, ugyancsak a $T_i \to F_j$ viszonylatban, c_{ij}-vel. Megjegyzendő, hogy az $m \gtreqless n$ esetek mindegyike lehetséges.

Ezek alapján írható, hogy a T_i-ről *elszállítandó* össztermékmennyiség

$$x_{i1} + x_{i2} + \ldots + x_{im} = \sum_{j=1}^{m} x_{ij} = t_i \quad (t_i > 0, \quad i = 1, 2, \ldots, n), \tag{1}$$

az F_j-re *odaszállítandó* össztermékmennyiség pedig

$$x_{1j} + x_{2j} + \ldots + x_{nj} = \sum_{i=1}^{n} x_{ij} = f_j \quad (f_j > 0, \quad j = 1, 2, \ldots, m), \tag{2}$$

ahol a $T_i \to T_j$ viszonylatban szállítandó termékmennyiség nyilván *nemnegatív*, azaz

$$x_{ij} \geqq 0. \tag{3}$$

Feltételezzük (és szükség esetén T_y, t_y, c_{yj}, vagy F_y, f_y, c_{iy} jellemzőjű fiktív hely felvételével is biztosítjuk), hogy a T_i-ken adva levő és az F_j-kre elszállítandó össztermékmennyiség egymással *egyenlő* (legyen),

$$t_1 + t_2 + \ldots + t_n \equiv \sum_{i=1}^{n} t_i = \sum_{j=1}^{m} f_j \equiv f_1 + f_2 + \ldots + f_m. \tag{4}$$

Az ***alapfeladat*** ezek után a következő: *A* $T_i \to F_j$ $(i = 1, 2, \ldots, m;$ $j = 1, 2, \ldots, n)$ *viszonylatban szállitandó* $x_{ij} > 0$ *termékmennyiségeket — az (1—4) összefüggések figyelembevételével — úgy kell megállapitani, hogy az adott* c_{ij} *szállitási együtthatókkal számitott szállitási összköltség a lehető legkisebb legyen,* azaz

$$Q = \sum_{i=1}^{n} Q_i = \sum_{i=1}^{n} \left(\sum_{j=1}^{m} c_{ij} x_{ij}\right) = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{m} c_{ij} x_{ij} = \text{Min!} \tag{5}$$

2'. Bevezetve ezután az

$$\underset{(1 \times n \cdot m)}{\mathbf{x}^*} = [x_{11}, x_{12}, \ldots, x_{1m}; \quad x_{21}\, x_{22}, \ldots, x_{2m}; \quad \ldots; \; x_{n1}, x_{n2}, \ldots, x_{nm}], \tag{6a}$$

$$\underset{1 \times (n+m)}{\mathbf{b}^*} = [t_1, t_2, \ldots, t_i, \ldots, t_n; \quad f_1, f_2, \ldots, f_j, \ldots, f_m] = [b_k]^*, \tag{6b}$$

$$\mathbf{a}^*_{ij} = [\underset{1}{\underbrace{0}}\; 0 \ldots 0 \; \underset{i}{\underbrace{1}} \; 0 \ldots \underset{n}{\underbrace{0}}, \; 0 \; 0 \ldots 0 \; \underset{n+j}{\underbrace{1}} \; 0 \ldots \underset{n+m}{\underbrace{0}}] = [\delta_{ki} + \delta_{k,\,n+j}] \tag{6c}$$

$$(i = 1, 2, \ldots, n; \quad j = 1, 2, \ldots, m; \quad k = 1, 2, \ldots, n + m),$$

$$\mathbf{c}^* = [c_{11}, c_{12}, \ldots, c_{1m}; \quad c_{21}, c_{22}, \ldots, c_{2m}; \quad \ldots; \; c_{n1}, c_{n2}, \ldots, c_{nm}] \tag{6d}$$

vektorokat, valamint az

$$\underset{[(n+m) \times nm]}{\mathbf{A}} = [\mathbf{a}_{11}, \mathbf{a}_{12}, \ldots, \mathbf{a}_{1m}; \quad \mathbf{a}_{21}, \mathbf{a}_{22}, \ldots, \mathbf{a}_{2m}; \ldots; \mathbf{a}_{n1}, \mathbf{a}_{n2}, \ldots, \mathbf{a}_{nm}] =$$

$$= \left[\begin{array}{cccc|cccc|c|cccc}
1 & 1 & \ldots & 1 & 0 & 0 & \ldots & 0 & \ldots\ldots & 0 & 0 & \ldots\ldots & 0 \\
0 & 0 & \ldots & 0 & 1 & 1 & \ldots & 1 & \ldots\ldots & 0 & 0 & \ldots\ldots & 0 \\
\cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\
0 & 0 & \ldots & 0 & 0 & 0 & \ldots & 0 & \ldots\ldots & 1 & 1 & \ldots\ldots & 1 \\
\hline
1 & 0 & \ldots & 0 & 1 & 0 & \ldots & 0 & \ldots\ldots & 1 & 0 & \ldots\ldots & 0 \\
0 & 1 & \ldots & 0 & 0 & 1 & \ldots & 0 & \ldots\ldots & 0 & 1 & \ldots\ldots & 0 \\
\cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\
0 & 0 & \ldots & 1 & 0 & 0 & \ldots & 1 & \ldots\ldots & 0 & 0 & \ldots\ldots & 1
\end{array}\right] \tag{6e}$$

matrixot, az (1—5) egyenletek a következő *matrixos alakban* írhatók fel:

$$\mathbf{Ax} = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{m} x_{ij} \mathbf{a}_{ij} = \mathbf{b} \qquad \text{[az (1) és a (2) helyett],} \tag{7}$$

$$\mathbf{x} \geqq \mathbf{0}, \quad \sum_{k=1}^{n} \mathbf{b}^* \mathbf{e}_k = \sum_{k=n+1}^{n+m} \mathbf{b}^* \mathbf{e}_k \qquad \text{[a (3) és a (4) helyett],} \tag{8, 9}$$

$$Q = \mathbf{c}^* \mathbf{x} = \text{Min!} \qquad \text{[az (5) helyett].} \tag{10}$$

3'. Bevezetve továbbá az

$$\mathbf{u} \equiv \mathbf{0}, \quad -\mathbf{a}^0 \equiv \mathbf{c}, \quad \mathbf{a}_0 \equiv \mathbf{b}, \quad a_{00} \equiv 0, \quad u_0 \equiv Q \tag{11a-e}$$

jelöléseket, valamint az

$$\mathfrak{u} \equiv \begin{bmatrix} u_0 \\ \mathbf{u} \end{bmatrix}, \quad \mathfrak{A} \equiv \begin{bmatrix} a_{00} & \mathbf{a}^0 \\ \mathbf{a}_0 & \mathbf{A} \end{bmatrix}, \quad -\mathfrak{x} \equiv \begin{bmatrix} 1 \\ -\mathbf{x} \end{bmatrix} \tag{11f-h}$$

hipervektorokat és hipermatrixot, a (7—10)-ből az alábbi *hipermatrixos alakhoz* jutunk:

$$\mathfrak{u} \equiv \begin{bmatrix} u_0 \\ \mathbf{u} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{00} & \mathbf{a}^0 \\ \mathbf{a}_0 & \mathbf{A} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ -\mathbf{x} \end{bmatrix} \equiv \mathfrak{A}(-\mathfrak{x}); \tag{12}$$

$$\mathbf{x} \geqq \mathbf{0}, \quad \mathbf{u} = \mathbf{0}, \quad a_{00} = 0, \quad u_0 \text{ Min!}; \quad \sum_{k=1}^{n} \mathbf{a}_0^* \mathbf{e}_k = \sum_{k=n+1}^{n+m} \mathbf{a}_0^* \mathbf{e}_k. \tag{13—14}$$

Az előző alfejezetek alapján nem nehéz felismerni, hogy az (1—5), ill. a (7—10), ill. (12—14) formularendszer egy *speciális l. prs-i feladatot* ír le. Specialitása abban áll, hogy — a (4) következtében — az (1,2) l. egyenletrendszerben csak $m + n - 1$ egyenlet független egymástól. Ily módon — a (9) miatt a (7)-ben az $\mathbf{A}$ matrix sorvektorai között csak $m + n - 1$ l. ftl vektor van (szükségképpen ugyanannyi az $\mathbf{A}$ l. ftl oszlopvektorainak a száma is); tehát az $\mathbf{A}$ *matrix rangja* $m + n - 1$, vagyis eggyel kisebb az $\mathbf{A}$ sorainak a számánál.

Megjegyezzük, hogy egyelőre a szállítási problémakörnek csupán a legegyszerűbb, ún. *alapfeladatáról* beszélünk. Később szó lesz *bonyolultabb feladatokról* is.

II°. Elnevezések. Módszerek. *1'*. Megjegyzendő, hogy az $\mathbf{A} = [\mathbf{a}_{kl}]$-t *együtthatómatrixnak*, a k, l indexeket kiindulási, ill. rendeltetési *címeknek* (hely, szállítóeszköz, útvonal stb.), az $\mathbf{A}$ matrix $[\mathbf{a}_{ij}]$ oszlopvektorait *eljárásvektoroknak*, a $[c_{ij}]$ együtthatókat a feladatbeli ($\mathbf{a}_{ij}$-kre vonatkozó) *fajlagos jellemzőknek* (pl. fajlagos szállítási költségnek), később az optimumkeresésnél döntő szerepet játszó $\bar{c}_{ij}$ fiktív értékeket a feladat *közvetett fajlagos jellemzőinek*, a $\mathbf{C} = [c_{ij}]$ matrixot *paramétermatrixnak* (pl. fajlagos szállítási költségmatrixnak), a t_i, f_j állandók és az x_{ij} változók táblázatát *kombinációs matrixnak*, a $c_{ij} - \bar{c}_{ij}$ különbségeket (amelyek az $\mathbf{x}$ *lehetséges megoldások* minősítésére alkalmasak) *módosító tényezőknek*, másként marginális jellemzőknek, ugyanezeket, ha nem pozitívok (megkeresésük igen lényeges!), *javító tényezőknek*, a $\mathbf{c}^*\mathbf{x}$ lineáris függvényt *hatékonysági függvénynek* stb. nevezzük.* Az x_{ij} *tervszámokat* összefoglaló $\mathbf{x}^* = [x_{ij}]$ vektorváltozó lehet folytonos (pl. cementnél) és diszkrét (pl. gépkocsinál).

* L. bővebben *Jándy* [69].

A fenti feladat — matematikai szempontból — *feltételes szélsőérték-feladat*, amely azonban klasszikus eszközökkel (pl. *Lagrange*-féle multiplikátorokkal) nem mindig kezelhető, mert egyrészt $\mathbf{c}^*\mathbf{x}$ függvény nem mindig deriválható (pl. diszkrét problémáknál), másrészt pedig nem lokális, hanem abszolút szélsőértéket keresünk. Éppen ezért itt különleges módszerekre van szükség.

A szállítási probléma megoldására nálunk *használatos módszerek* a következők:

a) *Szimplexmódszer (G. B. Dantzig*, 1947); a lineáris programozási feladatok legáltalánosabb módszere (pl. termelési feladatoknál is ezt használtuk).

b) *Disztribuciós módszer:* ez a szimplexmódszer egyszerűsített s a szállítási problémára specializált alakja.

c) *Magyar módszer: H. W. Kuhn* nevezte így és alkalmazta először l. prs-ra ezt a *König—Egerváry*-tételen (1931) nyugvó módszert; *Egerváry* 1958-ban általánosította a tételt; különösen degenerált szállítási problémáknál előnyös.

Az irodalomban *egyéb módszerek* is találhatók, pl. a *Kantorovics*-féle „megoldó együtthatók módszere" (1939), az ún. japán módszer.

Bár a disztribuciós és a magyar módszer sűrűbben használatos a szállítási probléma megoldására, itt — helyszűke miatt és a módszertani egység kedvéért — csupán a *szimplexmódszer* alkalmazását ismertetjük, s a másik kettő tekintetében a bő hazai irodalomra utalunk.*

1. Pl. Írjuk fel az alábbi, egyesített kombinációs- és költségmatrixával megadott, *szállítási feladat* skaláris, vektoros-matrixos, végül hipermatrixos formularendszerét:

$i \backslash j$	1	2	3	4	$m = 5$	t_i
1	6 x_{11}	3 x_{12}	5 x_{13}	2 x_{14}	7 x_{15}	200
2	3 x_{21}	7 x_{22}	4 x_{23}	4 x_{24}	1 x_{25}	80
3	5 x_{31}	2 x_{32}	3 x_{33}	1 x_{34}	6 x_{35}	130
$n = 4$	3 x_{41}	5 x_{42}	2 x_{43}	3 x_{44}	2 x_{45}	90
f_j	30	210	60	80	120	$S = 500$

(A c_{ij} fajlagos költségek az i, j mezők bal felső sarkában olvashatók!) —

* *Jándy* [69], *Krekó* [2].

Az (1—5) *skaláris formularendszer* most bizonyára ez lesz: (1—2)

$$\left.\begin{aligned} x_{11}+x_{12}+x_{13}+x_{14}+x_{15}&=200\\ x_{21}+x_{22}+x_{23}+x_{24}+x_{25}&=80\\ x_{31}+x_{32}+x_{33}+x_{34}+x_{35}&=130\\ x_{41}+x_{42}+x_{43}+x_{44}+x_{45}&=90 \end{aligned}\right\} \qquad \left.\begin{aligned} x_{11}+x_{21}+x_{31}+x_{41}&=30\\ x_{12}+x_{22}+x_{32}+x_{42}&=210\\ x_{13}+x_{23}+x_{33}+x_{43}&=60\\ x_{14}+x_{24}+x_{34}+x_{44}&=80\\ x_{15}+x_{25}+x_{35}+x_{45}&=120 \end{aligned}\right\},$$

$$x_{ij}\geqq 0 \quad (i=1,2,3,4;\quad j=1,2,3,4,5), \tag{3}$$

$$\sum_{i=1}^{4} t_i = 200+80+130+90 = 30+210+60+80+120 = \sum_{j=1}^{5} f_j\,[=500\equiv S], \tag{4}$$

$$Q\equiv 6x_{11}+3x_{12}+5x_{13}+2x_{14}+7x_{15}+3x_{21}+7x_{22}+4x_{23}+4x_{24}+1x_{25}+$$
$$+5x_{31}+2x_{32}+3x_{33}+1x_{34}+6x_{35}+3x_{41}+5x_{42}+2x_{43}+3x_{44}+2x_{45}=\text{Min!} \tag{5}$$

A megfelelő (7—10) *matrixos formularendszer* nyilván így alakul (lévén $n=4$, $m=5$; $k=n+m=9$, $n\cdot m=20$)

$$\underset{(9\times 20)}{\mathbf{A}}\ \underset{(20\times 1)}{\mathbf{x}} \equiv [\mathbf{a}_{11},\mathbf{a}_{12},\mathbf{a}_{13},\mathbf{a}_{14};\quad \mathbf{a}_{21},\mathbf{a}_{22},\mathbf{a}_{23},\mathbf{a}_{24},\mathbf{a}_{25};\ \ldots; \tag{6}$$
$$\mathbf{a}_{41},\mathbf{a}_{42},\mathbf{a}_{43},\mathbf{a}_{44},\mathbf{a}_{45}]\begin{bmatrix}x_{11}\\ \vdots\\ x_{45}\end{bmatrix}\equiv$$

$$\equiv\begin{bmatrix}
1\,1\,1\,1\,1 & 0\,0\,0\,0\,0 & 0\,0\,0\,0\,0 & 0\,0\,0\,0\,0\\
0\,0\,0\,0\,0 & 1\,1\,1\,1\,1 & 0\,0\,0\,0\,0 & 0\,0\,0\,0\,0\\
0\,0\,0\,0\,0 & 0\,0\,0\,0\,0 & 1\,1\,1\,1\,1 & 0\,0\,0\,0\,0\\
0\,0\,0\,0\,0 & 0\,0\,0\,0\,0 & 0\,0\,0\,0\,0 & 1\,1\,1\,1\,1\\
\\
1\,0\,0\,0\,0 & 1\,0\,0\,0\,0 & 1\,0\,0\,0\,0 & 1\,0\,0\,0\,0\\
0\,1\,0\,0\,0 & 0\,1\,0\,0\,0 & 0\,1\,0\,0\,0 & 0\,1\,0\,0\,0\\
0\,0\,1\,0\,0 & 0\,0\,1\,0\,0 & 0\,0\,1\,0\,0 & 0\,0\,1\,0\,0\\
0\,0\,0\,1\,0 & 0\,0\,0\,1\,0 & 0\,0\,0\,1\,0 & 0\,0\,0\,1\,0\\
0\,0\,0\,0\,1 & 0\,0\,0\,0\,1 & 0\,0\,0\,0\,1 & 0\,0\,0\,0\,1
\end{bmatrix}
\begin{bmatrix}x_{11}\\x_{12}\\x_{13}\\x_{14}\\x_{15}\\ \\x_{21}\\x_{22}\\x_{23}\\x_{24}\\x_{25}\\ \vdots\\x_{45}\end{bmatrix}
=\begin{bmatrix}200\\80\\130\\90\\ \\30\\210\\60\\80\\20\end{bmatrix}\equiv \underset{(9\times 1)}{\mathbf{b}}, \tag{7}$$

$$\mathbf{x}\geqq \mathbf{0},\qquad \sum_{k=1}^{4}\mathbf{b}^*\mathbf{e}_k = \sum_{k=5}^{9}\mathbf{b}^*\mathbf{e}_k \quad (=500), \tag{8—9}$$

$$\mathbf{c}^*\mathbf{x}\equiv[6\ 3\ 5\ 2\ 7\quad 3\ 7\ 4\ 4\ 1\quad 5\ 2\ 3\ 1\ 6\quad 3\ 5\ 2\ 3\ 2]\begin{bmatrix}x_{11}\\ \vdots\\ x_{45}\end{bmatrix}=\text{Min!} \tag{10}$$

Végül a megfelelő (12—14) *hipermatrixos formularendszer* bizonyára a következő lesz:

$$\mathfrak{z} \equiv \begin{bmatrix} z_0 \\ \mathbf{z} \end{bmatrix} =$$

$$= \left[\begin{array}{c|ccccc ccccc ccccc ccccc|c}
0 & 6 & 3 & 5 & 2 & 7 & 3 & 7 & 4 & 4 & 1 & 5 & 2 & 3 & 1 & 6 & 3 & 5 & 2 & 3 & 2 & 1 \\
\hline
200 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
80 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
130 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
90 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \\
30 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
210 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
60 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\
80 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\
120 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0
\end{array}\right]
\left[\begin{array}{c}
1 \\ \hline -x_{11} \\ -x_{12} \\ -x_{13} \\ -x_{14} \\ -x_{15} \\ -x_{21} \\ -x_{22} \\ -x_{23} \\ -x_{24} \\ -x_{25} \\ \vdots \\ -x_{45} \\ \hline -u_0
\end{array}\right] \equiv \qquad (11)$$

$$\equiv \begin{bmatrix} a_{00} & \mathbf{a}^0 & 1 \\ \mathbf{a}_0 & \mathbf{A} & \mathbf{0} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ -\mathbf{x} \\ -u_0 \end{bmatrix} \equiv \mathfrak{A}(-\mathfrak{x}), \qquad (12)$$

$$\mathfrak{z} = \mathfrak{O}, \quad \mathbf{x} \geqq \mathbf{0}, \quad u_0 = \text{Min!}; \quad \sum_{k=1}^{n} \mathbf{a}_0^* \mathbf{e}_k = \sum_{k=n+1}^{n+m} \mathbf{a}_0^* \mathbf{e}_k \quad (= 500). \qquad (13\text{—}14)$$

A fentiekből nyilvánvaló, hogy pl.

$$\mathfrak{a}_0^* \equiv [a_{00}, \mathbf{a}_0^*] = [0 \mid 200\ 80\ 130\ 90\ 30\ 210\ 60\ 80\ 120],$$

$$\mathfrak{a}_{22}^* \equiv [-c_{22}, \mathbf{a}_{22}^*] = [-3 \mid 0\ 1\ 0\ 0\ 1\ 0\ 0\ 0\ 0\ ];$$

$$\mathfrak{a}^0 \equiv [a_{00}, \mathbf{a}^0] = [0 \mid 6\ 3\ 5\ 2\ 7\quad 3\ 7\ 4\ 4\ 1\quad 5\ 2\ 3\ 1\ 6\quad 3\ 5\ 2\ 3\ 2],$$

$$\mathfrak{a}^5 \equiv [b_5, \mathbf{a}^5] = [30 \mid 1\ 0\ 0\ 0\ 0\quad 1\ 0\ 0\ 0\ 0\quad 1\ 0\ 0\ 0\ 0\quad 1\ 0\ 0\ 0\ 0].$$

β) Megoldás transzport szimplex matrixalgoritmussal (StMA)

I°. I n d u l ó p r o g r a m. *1'.* Mint az *α)* I°-ben már megállapítottuk, az (1—5), a (7—10) és a (12—14) formularendszerek valamelyikével leírt szállítási (alap-) probléma egy speciális l. prs-i feladat, s mint ilyen, várhatóan megoldható *szimplex matrixalgoritmusunkkal.* Mint tudjuk, e módszernél nagy szerepet játszanak a *bázisviszonyok.*

Nyomban felvetődik a kérdés: a (6*e*) alatti **A** matrix $\mathbf{a}_{ij}$ oszlopvektorai közül melyek választhatók be az *induló bázisba*?

Az *α)* I°-ben már említettük, hogy az $\mathbf{a}_{ij}$ vektorok közt a soraik számánál eggyel kevesebb, vagyis $(n + m - 1)$ l. ftl vektor van, tehát az **A** matrix rangja

$$r = \varrho(\mathbf{A}) = n + m - 1. \tag{15}$$

Az $\mathbf{a}_{ij}$ vektorok (6*e*) szerinti egyszerű szerkezete alapján könnyen belátható, hogy pl. a

$$\mathbf{B}_0 \equiv [\mathbf{a}_{11}, \mathbf{a}_{12}, \ldots, \mathbf{a}_{1m}; \mathbf{a}_{21}\, \mathbf{a}_{31}, \ldots, \mathbf{a}_{n1}] \tag{16}$$

vektor- $(n + m - 1)$-es l. ftl s így $\mathbf{B}_0$ indulóbázisnak választható (sőt többnyire ez a legcélszerűbb indulóbázis).

2'. A többi, nembázis-vektorok előállítása — a bázisvektorok l. komb-jaként, a (6*c*) felhasználásával — eképpen adódik:

$$\begin{aligned} \mathbf{a}_{ij} &= [\delta_{ki} + \delta_{k,n+j}] = [-\delta_{k1} - \delta_{k,n+1} + \delta_{k1} + \delta_{k,n+j} + \delta_{ki} + \delta_{k,n+1}] = \\ &= -[\delta_{k1} + \delta_{k,n+1}] + [\delta_{k1} + \delta_{k,n+j}] + [\delta_{ki} + \delta_{k,n+1}] = \\ &= -\mathbf{a}_{11} + \mathbf{a}_{1j} + \mathbf{a}_{i1} \equiv \mathbf{B}_0 \cdot [-1, \delta_{ju}; \delta_{vi}]^* \equiv \mathbf{B}_0 \tilde{\mathbf{a}}_{ij} \quad (\mu, \nu \neq 1). \end{aligned} \tag{17a}$$

Az $\mathbf{a}_0 \equiv \mathbf{b}$ vektor báziselőállítása pedig ez lesz:

$$\begin{aligned} \mathbf{a}_0 &= [t_1, \ldots, t_n; f_1, \ldots, f_m]^* = [(f_1 - t_2 - \ldots - t_n)(\delta_{k1} + \delta_{k,n+1}) + \\ &+ f_2(\delta_{k1} + \delta_{k,n+2}) + \ldots + f_m(\delta_{k1} + \delta_{k,n+m}) + t_2(\delta_{k2} + \delta_{k,n+1}) + \ldots \\ &\ldots + t_n(\delta_{kn} + \delta_{k,n+1})] = \\ &= (f_1 - t_2 - \ldots - t_n)\mathbf{a}_{11} + f_2\mathbf{a}_{12} + \ldots + f_m\mathbf{a}_{1m} + t_2\mathbf{a}_{21} + \ldots + t_n\mathbf{a}_{n1} \equiv \\ &\equiv \mathbf{B}_0 \cdot [f_1 - t_2 - \cdots - t_n, f_2, \ldots, f_m; t_2, \ldots, t_n]^* \equiv \mathbf{B}_0 \tilde{\mathbf{a}}_0 . \end{aligned} \tag{17b}$$

Ugyanezek — a $-c_{ij}$-vel, ill. $a_{00} = 0$-sal bővített $\mathfrak{a}_{ij}$ és $\mathfrak{a}_0$ *hipervektorokra vonatkozólag* — nyilván így festenek:

$$\mathfrak{a}_{ij} = -\mathfrak{a}_{11} + \mathfrak{a}_{1j} + \mathfrak{a}_{i1}, \tag{18a, b}$$

$$\mathfrak{a}_0 = (f_1 - t_2 - \ldots - t_n)\,\mathfrak{a}_{11} + f_2\mathfrak{a}_{12} + \ldots + f_m\mathfrak{a}_{1m} + t_2\mathfrak{a}_{21} + \ldots + t_n\mathfrak{a}_{n1},$$

és belőlük külön

$$c_{ij} = -c_{11} + c_{1j} + c_{i1} \equiv \mathbf{c}^*\tilde{\mathbf{a}}_{ij} \tag{18c, d}$$

$$\begin{aligned} a_{00} &= (f_1 - t_2 - \ldots - t_n)\, c_{11} + f_2c_{12} + \ldots + f_mc_{1m} + \\ &+ t_2c_{21} + \ldots + t_nc_{n1} \equiv \mathbf{c}^*\tilde{\mathbf{a}}_0; \end{aligned}$$

itt voltaképpen a

$$\mathfrak{B}_0 = \begin{bmatrix} 1 & \mathbf{c}_b^* \\ \mathbf{0} & \mathbf{B} \end{bmatrix} = [e_0; \mathfrak{a}_{11}, \mathfrak{a}_{12}, \ldots, \mathfrak{a}_{1m}; \mathfrak{a}_{21}, \mathfrak{a}_{31}, \ldots, \mathfrak{a}_{n1}] \tag{19}$$

bővített bázissal dolgoztunk.

Az indulóprogram és értéke a

$$\mathfrak{B}_0 \cdot \mathfrak{y} \equiv \mathfrak{z} \equiv \begin{bmatrix} z_0 \\ \mathbf{z}_b \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{00} & \tilde{\mathbf{c}}^* & 1 \\ \mathbf{a}_0 & \tilde{\mathbf{A}} & \mathbf{0} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ -\mathbf{x} \\ -u_0 \end{bmatrix} \equiv [\tilde{\mathfrak{a}}_0, \tilde{\mathfrak{A}}', e_0] \begin{bmatrix} 1 \\ -\mathbf{x} \\ -u_0 \end{bmatrix} \equiv \tilde{\mathfrak{A}}(-\mathfrak{x}) \equiv \tag{20a}$$

$$= [\tilde{\mathfrak{a}}_0, \tilde{\mathfrak{A}}'_{nb}, \mathfrak{E}] \begin{bmatrix} 1 \\ -\mathbf{x}_{nb} \\ -\mathfrak{x}_b \end{bmatrix}$$

induló alapegyenletből, $\mathbf{x}_{nb} = \mathbf{0}$ választással

$$\mathbf{0} = \tilde{\mathfrak{a}}_0 - \mathfrak{x}_b, \quad \text{azaz} \quad u_0 = \tilde{a}_{00}, \quad \mathbf{x}_b = \tilde{\mathbf{a}}_0 \tag{20b}$$

módon adódik.

A most nyert formulák segítségével az induló szimplexmatrixot s belőle az induló programot és értékét könnyen előállíthatjuk.

Megjegyzendő, hogy rendszerint

$$x_{11} = \tilde{a}_{10} \equiv f_1 - t_2 - \ldots - t_n < 0 \tag{21}$$

s ilyenkor az indulóprogram nem „lehetséges". Ez a nehézség azonban — mint látni fogjuk — néhány szimplexlépésen belül kiküszöbölhető.

2. Pl. Transzformáljuk a $\mathfrak{B}_0$ bázisra az 1. példában megadott (12) hipermatrix-egyenletet! —

A (18*a*—19) felhasználásával írható, hogy

$$\mathfrak{B}_0 = [e_0; \ \mathfrak{a}_{11}, \mathfrak{a}_{12}, \ldots, \mathfrak{a}_{15}; \mathfrak{a}_{21}, \mathfrak{a}_{31}, \mathfrak{a}_{41}],$$

továbbá pl.

$$\tilde{a}_{00} = -270 \cdot 6 + 210 \cdot 3 + 60 \cdot 5 + 80 \cdot 2 + 120 \cdot 7 +$$
$$+ 80 \cdot 3 + 130 \cdot 5 + 90 \cdot 3 = 1470,$$

$$\mathfrak{a}_0 = 1470 e_0 - 270\mathfrak{a}_{11} + 210\mathfrak{a}_{12} + 60\mathfrak{a}_{13} + 80\mathfrak{a}_{14} + 120\mathfrak{a}_{15} +$$
$$+ 80\mathfrak{a}_{21} + 130\mathfrak{a}_{31} + 90\mathfrak{a}_{41},$$

valamint pl.

$$\tilde{c}_{34} = -c_{11} + c_{14} + c_{31} = -6 + 2 + 5 = 1,$$

$$\mathfrak{a}_{34} = e_0 - \mathfrak{a}_{11} + \mathfrak{a}_{14} + \mathfrak{a}_{31} = \mathfrak{B}_0 \cdot [-1, 0, 0, 1 \ 0, \ , 1, 0]^*.$$

További hasonló számítással eképpen nyerhető a (12) alap-egyenlet $\mathfrak{B}_0$-ra transzformált (20*a*) alakja:

$$\mathfrak{O} \equiv \mathfrak{z} \equiv \begin{bmatrix} z_0 \\ \mathbf{z}_b \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \tilde{a}_{00} & \tilde{\mathbf{c}}^* & 1 \\ \tilde{\mathbf{a}}_0 & \tilde{\mathbf{A}} & \mathbf{0} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ -\mathbf{x} \\ -u_0 \end{bmatrix} \equiv \tilde{\mathfrak{A}}(-\mathfrak{x}) =$$

$$= \begin{bmatrix} z_0 \\ \hline z_{11} \\ z_{12} \\ z_{13} \\ z_{14} \\ z_{15} \\ z_{21} \\ z_{31} \\ z_{41} \end{bmatrix} = \left[\begin{array}{r|rrrrr|rrrrr|rrrrr|}
1470 & 6 & 3 & 5 & 2 & 7 & 3 & 0 & 2 & -1 & 4 & 5 & 2 & 4 & 1 & 6 \\ \hline
-270 & 1 & & & & & & -1 & -1 & -1 & -1 & & -1 & -1 & -1 & -1 \\
210 & & 1 & & & & & 1 & & & & & 1 & & & \\
60 & & & 1 & & & & & 1 & & & & & 1 & & \\
80 & & & & 1 & & & & & 1 & & & & & 1 & \\
120 & & & & & 1 & & & & & 1 & & & & & 1 \\
80 & & & & & & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & & & & & \\
30 & & & & & & & & & & & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\
90 & & & & & & & & & & & & & & &
\end{array} \right.$$

$$\left. \begin{array}{|rrrrr|r} 3 & 0 & 2 & -1 & 4 & 1 \\ \hline
 & -1 & -1 & -1 & -1 & 0 \\
 & 1 & & & & 0 \\
 & & 1 & & & 0 \\
 & & & 1 & & 0 \\
 & & & & 1 & 0 \\
 & & & & & 0 \\
 & & & & & 0 \\
1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0
\end{array} \right] \begin{bmatrix} 1 \\ \hline -x_{11} \\ -x_{12} \\ -x_{13} \\ -x_{14} \\ -x_{15} \\ -x_{21} \\ -x_{22} \\ -x_{23} \\ \vdots \\ -x_{45} \\ \hline -u_0 \end{bmatrix}.$$

Ebből kiolvasható az indulóprogram és értéke, nevezetesen ($\mathfrak{z} \equiv \mathfrak{O}$, $\mathbf{x}_{nb} = \mathbf{0}$-nál):

$$u_0 = 1470; \; x_{11} = -270, \; x_{12} = 210, \; x_{13} = 60, \; x_{14} = 80, \; x_{15} = 120, \; x_{21} = 80,$$
$$x_{31} = 130, \; x_{41} = 9; \text{ a többi } x_{ij} = 0.$$

Megjegyzendő, hogy ez nem „lehetséges program", mert $x_{11} = -270 < 0$ miatt az $\mathbf{x} \geqq \mathbf{0}$ követelményt nem teljesíti. Ezen a nehézségen azonban az első szimplexlépések során úrrá leszünk majd.

II°. J a v í t ó p r o g r a m o k. *1'.* Az előzőkben megszerkesztett induló szimplexmatrixból kiindulva, most szimplexeljárást indítunk meg a feladat megoldására.

Célszerűen az ismert *módosított szimplexmódszert* alkalmazzuk, mert esetünkben az $\mathbf{A}_0$ oszlopainak $n \cdot m$ száma $n, m > 2$ esetén nagyobb (pl. $n, m > 6$ esetén

legalább háromszor akkora) mint sorainak $n + m$ száma. Ennek megfelelően, az első szimplexmatrixot a 2. §. *b) γ)* IV° helyen már említettnek értelemszerűen megfelelő

$$\mathfrak{A}_1 = \mathfrak{A}_0 - \frac{1}{a_{k,l\lambda}} (\mathfrak{a}_{l\lambda} - \mathfrak{e}_k)\mathfrak{a}^k \quad (\mathfrak{A}_0 \equiv \tilde{\mathfrak{A}}) \tag{22}$$

matrixformulánkkal állítjuk elő, ahol $a_{k,l\lambda} \neq 0$ a generáló elem, $\mathfrak{e}_k = [\delta_{ik}]$ $(i = 0, 1, \ldots, k, \ldots, n)$ egységvektor, végül

$$\mathfrak{a}_{l\lambda} = -\mathfrak{a}_{11} + \mathfrak{a}_{1\lambda} + \mathfrak{a}_{l1} \tag{18a'}$$

a bázisba újonnan bevonandó (s a jobb oldalon három bázisvektor l. kombjaként kifejezett) vektor.

2'. A (22) formula alkalmazásában azonban most némi *eltérés* mutatkozik (a 2. §. *b) γ)* helyi) korábbihoz képest. Most ugyanis — mint tudjuk — a

$$\mathfrak{B} \equiv [\mathfrak{e}_0; \mathfrak{a}_{11}, \mathfrak{a}_{12}, \ldots, \mathfrak{a}_{1m}; \mathfrak{a}_{21}, \mathfrak{a}_{31}, \ldots, \mathfrak{a}_{n1}], \tag{23a}$$

$$\mathbf{c}_b^* \equiv [0; c_{11}, c_{12}, \ldots, c_{1m}; c_{21}, c_{31}, \ldots, c_{n1}] = [0; \mathbf{c}_b^*]$$

bázisvektorokat, ill. paramétereiket használjuk a korábbi(nak értelemszerűen megfelelő)

$$\mathfrak{E}_{m+n} \equiv [\mathfrak{e}_0; \mathfrak{e}_1, \mathfrak{e}_2, \ldots, \mathfrak{e}_{m+n}],$$

$$\mathbf{c}_b^* \equiv [0; 0, 0, \ldots, 0] = [0; \mathbf{0}^*] = \mathfrak{O}^* \tag{23b}$$

mennyiségek helyett.* E miatt az új program értéke — a (pl. $k < m$ esetre érvényes)

$$\mathbf{c}_b'^* \equiv [0, c_{11}, c_{12}, \ldots, c_{1,k-1}, c_{l\lambda}, c_{1,k+1}, \ldots, c_{1m}; c_{21}, c_{31}, \ldots c_{n1}] = [0; \mathbf{c}_b'^*] \tag{24}$$

vektor igénybevételével —

$$u_0' = \mathbf{c}_b'^*\mathbf{a}_0' = [\mathbf{c}_b^* + (c_{l\lambda} - c_{1k})\mathbf{e}_k^*]\left[\mathbf{a}_0 - \frac{a_{k0}}{a_{k,l\lambda}}(\mathbf{a}_{l\lambda} - \mathbf{e}_k)\right] = \tag{25}$$

$$= \mathbf{c}_b^*\mathbf{a}_0 - a_{k0}(c_{l\lambda} - c_{1k}) - \delta_0(\bar{c}_{l\lambda} - c_{1k}) - \delta_0(a_{lk,\lambda} - 1)(c_{l\lambda} - c_{1k}) =$$

$$= \mathbf{c}_b^*\mathbf{a}_0 - \delta_0(\bar{c}_{l\lambda} - c_{l\lambda}) = u_0 - \delta_0 \cdot \Delta c_{l\lambda} = u_0 + \Delta u$$

$$\left\langle \delta_0 = \frac{a_{k0}}{a_{k,l\lambda}}, \quad \mathbf{c}_b^*\mathbf{a}_{l\lambda} = -c_{11} + c_{1\lambda} + c_{l1} = c_{l\lambda};\right.$$

$$\left.\mathbf{c}_b^*\mathbf{a}_0 = (f_1 - t_2 - \ldots - t_n)c_{11} + f_2c_{12} + \ldots + f_mc_{1m} + t_2c_{21} + \ldots + t_nc_{n1} = u_0\right\rangle$$

módon alakul, szemben a korábbi $u_0' = 0 - \delta_0(0 - c_{l\lambda}) = \delta_0 c_{l\lambda}$-val.** Más szóval a programérték növekményét most $\Delta u_0 = \delta_0(c_{l\lambda} - \bar{c}_{l\lambda})$ szolgáltatja, a korábbi

* és ** L. a 3. példa T_0 táblázatát!

$\Delta u_0 = \delta_0 c_{l\lambda}$ helyett, az $a_{k,l\lambda}$ generáló elemmel kapcsolatos szimplexlépés során. Az említett eltérés tehát abban áll, hogy *az induló szimplexmatrixban (ill. táblázatban) a 0 indexű (legfelső) sor ij (= 11, 12, ..., nm) indexű helyein* — a korábbi maximum feladatnál használt c_{ij} paraméterek helyett — *a mostani minimum feladatnál a* — $(c_{ij} - \check{c}_{ij}) = \tilde{c}_{ij} - c_{ij} = \Delta c_{ij}$ *paraméter-növekményeket fogjuk szerepeltetni!* A Δc_{ij} növekmények képzéséhez szükséges c_{ij} értékeket a T_0 és az S_0 táblázat között ajánlatos feltüntetni.*

A fentiek értelmében a szóban forgó módosított szimplexeljárás lebonyolítása a szerző által javasolt

$$\mathfrak{A}_{q+1} = \mathfrak{A}_q - \frac{1}{a^{(q)}_{k_q,l\lambda_q}} (\mathfrak{a}^{(q)}_{l\lambda_q} - \mathfrak{e}_{k_q})\mathfrak{a}^{k_q}_{(q)} \tag{26}$$

$$\langle \mathfrak{A}_0 \equiv \mathfrak{A}, \quad \mathfrak{A}_q = \mathfrak{B}_q^{-1} \cdot \mathfrak{A}_0; \quad k_q, \quad a_{k_q,l\lambda_q} \neq 0, \quad l\lambda_q \neq 00;$$

$$q = 0, 1, 2, \ldots, p-1; \quad \mathfrak{a}^0_{(q)} = \Delta\mathfrak{c}^*_{(q)};$$

$$\mathfrak{B}_q = \begin{bmatrix} 1 & \Delta\mathbf{c}^{(q)*} \\ \mathbf{0} & \mathbf{B}_q \end{bmatrix}, \quad \mathfrak{B}_q^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & -\Delta\mathbf{c}^{(q)*}\mathbf{B}_q^{-1} \\ \mathbf{0} & \mathbf{B}_q^{-1} \end{bmatrix} \rangle$$

szimplex matrixalgoritmussal (StMA) történik. A q indexű *program és értéke* a q indexű

$$\mathfrak{B}_q \cdot \left| \mathfrak{O} \equiv \mathfrak{z}^{(q)} \equiv \begin{bmatrix} z_0^{(q)} \\ \mathbf{z}_b^{(q)} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{00}^{(q)} & \Delta\mathbf{c}^{(q)*} & 1 \\ \mathbf{a}_0^{(q)} & \mathbf{A}_q & \mathbf{0} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ -\mathbf{x}^{(q)} \\ -u_0^{(q)} \end{bmatrix} \equiv [\mathfrak{a}_0^{(q)}, \mathfrak{A}'_q, \mathfrak{e}_0] \begin{bmatrix} 1 \\ -\mathbf{x}^{(q)} \\ -u_0^{(q)} \end{bmatrix} \equiv \mathfrak{A}_q(-\mathfrak{x}^{(q)}) \right. \tag{27a}$$

alapegyenletből, $\mathfrak{z} = \mathfrak{O}$, $\mathbf{x}_{nb} = \mathbf{0}$ választással

$$\mathfrak{O} = \mathfrak{v}^{(q)} - \mathfrak{a}^{(q)}, \quad \text{azaz} \quad u_0^{(q)} = a_{00}^{(q)}, \quad \mathbf{x}_b^{(q)} = \mathbf{a}_0^{(q)} \tag{27b}$$

módon adódik.

Hangsúlyozzuk, hogy a (26) rekurzív formulát akkor is *előnyösen* alkalmazhatjuk numerikus számításra (a hagyományos skalár formulahalmaz helyett), ha megtartjuk a szimplextáblázatok külső formáját.**

3'. Ami az $a^{(q)}_{k_q,l_q} \neq 0$ *generáló elem választását* illeti, az — értelemszerűen — *a normálfeladat rendes esetében*, vagyis az

$$\mathbf{a}_0^{(q)} = [a_i^{(q)}] > \mathbf{0}, \quad (q = 0, 1, 2, \ldots, p-1) \tag{28}$$

esetben a szokásos módon történik. Eszerint az $\mathfrak{A}_q$ szimplexmatrixban csak olyan $l\lambda_q$ indexű oszlop jöhet szóba generáló oszlopként, amelyben

$$a^{(q)}_{0,l\lambda_q} \equiv \Delta c^{(q)}_{l\lambda_q} > 0 \tag{29a}$$

---

* L. a 3. példa (S_q) táblázatát!

** Így járunk el a 3. példában is.

és csak olyan k_q indexű sor generáló sorként, amelyben

$$a^{(q)}_{k_q,l\lambda_q} > 0 \quad \text{és} \quad \delta_0 \equiv \frac{a^{(q)}_{k_q 0}}{a^{(q)}_{k_q,l\lambda_q}} = \min \frac{a^{(q)}_{i_q,0}}{a^{(q)+}_{i_q,l\lambda_q}} \quad (> 0). \tag{29b-c}$$

Ez esetben a programérték növekménye — a minimumfeladat követelményének megfelelően — *negativ*, lévén

$$\Delta u^{(q)}_0 = -\delta_0 a^{(q)}_{0,l\lambda_q} = -\delta_0 \cdot \Delta c^{(q)}_{l\lambda} < 0. \tag{30}$$

Mint a (21) formulával kapcsolatban már említettük, gyakran megesik induláskor, sőt később is előfordul, hogy

$$a^{(q)}_{h_q,0} < 0, \tag{31}$$

ami által megszűnik az $\mathbf{x}$ megoldás „lehetséges" jellege. Ha más sorból választjuk a generáló elemet (azaz $k_q \neq h$), mégpedig a (28a-d) szerint, akkor a program (29) javítását az ilyen „nem lehetséges" megoldással is előrevihetjük.

Természetesen, mielőbb meg kell szüntetni az ilyen „nem lehetséges javító" programokat, mert az optimális program csakis „lehetséges" lehet. Éppen ezért igyekszünk mielőbb a rendellenes sorban *generáló elemet* választani ($k_q = h_q$), mégpedig *negativ* számot,

$$a^{(q)}_{h_q l\lambda_q} < 0, \qquad \text{a} \qquad \delta_0 \equiv \frac{a^{(q)}_{h_q,0}}{a^{(q)}_{h_q,l\lambda_q}} = \min \frac{a^{(q)\pm}_{i_q,0}}{a^{(q)\pm}_{i_q,l\lambda_q}} \quad (> 0),$$

$$a^{(q)}_{0,l\lambda_q} \equiv \Delta c^{(q)}_{l\lambda_q} > 0$$

feltételek egyidejű teljesítése mellett, amely — (30) szerint — a program kívánt értékcsökkenését is magával hozza. Az effajta generálóelem-választást esetleg ismételni is kell, mindaddig, amíg „lehetséges" programhoz nem jutunk.

A *normálfeladat elfajuló esetével*, vagyis az

$$\mathbf{a}^{(q)}_0 = [a^{(q)}_{i_q,0}] \geqq 0, \qquad (q = 0, 1, 2, \ldots, p-1)$$

esettel kapcsolatban a korábban megismert *Charnes*-féle perturbációs módszerre emlékeztetünk! A (31) nehézség ilyenkor is felbukkanhat, s leküzdése az imént vázolt módon történik.

Végül szemléltessük az elmondottakat egy példán!

3. Pl. Oldjuk meg — most már elejétől végéig — az 1—2. példában megadott szállítási feladatot, mégpedig a matrixalgoritmikus módszer és a táblázatos külső forma kombinált alkalmazásával! —

A megoldás menetét az alábbi táblázat-sorozat szemlélteti, amely a fenti elméleti meggondolások szerint készült. A táblázatokban megjelöltük a generáló elemeket (○) és a megfelelő paraméter-növekményeket (□).

	1	$-x_{11}$	$-x_{12}$	$-x_{13}$	$-x_{14}$	$-x_{15}$	$-x_{21}$	$-x_{22}$	$-x_{23}$	$-x_{24}$	$-x_{25}$	$-x_{31}$	$-x_{32}$	$-x_{33}$	$-x_{34}$	$-x_{35}$	$-x_{41}$	$-x_{42}$	$-x_{43}$	$-x_{44}$	$-x_{45}$	$-u_0$	
Q	0	6	3	5	2	7	3	7	4	4	1	5	2	3	1	6	3	5	2	3	2	1	c_{ij}
t_1	200	1	11	1	1	1																	
t_2	80						1	1	1	1	1												
t_3	130											1	1	1	1	1							
t_4	90																1	1	1	1	1		
f_1	30	1					1					1					1						T_0
f_2	210		1					1					1					1					
f_3	60			1					1					1					1				
f_4	80				1					1					1					1			
f_5	120					1					1					1					1		
—	—	6	3	5	2	7	3	0	2	—1	4	5	2	4	1	6	3	0	2	—1	4		$\tilde{c}_{ij}$
z_0	1470	0	0	0	0	0	0	—7	—2	—5	[3]	0	0	1	0	0	0	—5	0	—4	2	1	Δc_{ij}
z_{11}	—270	1						—1	—1	—1	—1		—1	—1	—1	—1		—1	—1	—1	—1		
z_{12}	210		1					1					1					1					
z_{13}	60			1					1					1					1				
z_{14}	80				1					1					1					1			S
z_{15}	120					1					1					1					1		
z_{21}	80						1	1	1	1	(1)												
z_{31}	130											1	1	1	1	1							
z_{41}	90																1	1	1	1	1		
z'_0	1230	0	0	0	0	0	—3	—10	—5	—8	0	0	0	[1]	0	0	0	—5	0	—4	2	1	c'_{ij}
z'_{11}	—190	1					1						—1	—1	—1	—1		—1	—1	—1	—1		
z'_{12}	210		1					1					1					1					
z'_{13}	60			1					1					(1)					1				
z'_{14}	80				1					1					1					1			S_1
z'_{15}	40					1	—1	—1	—1	—1						1					1		
z'_{21}	80						1	1	1	1	1												
z'_{31}	130											1	1	1	1	1							
z'_{41}	90																1	1	1	1	1		
z''_1	1170	0	0	—1	0	0	—3	—10	—6	—8	0	0	0	0	0	0	0	—5	—1	—4	[2]	1	$\Delta c''_{ij}$
z''_{11}	—130	1		1			1		1				—1		—1	—1		—1		—1	—1		
z''_{12}	210		1					1					1					1					
z''_{13}	60			1					1					1					1				
z''_{14}	80				1					1					1					1			
z''_{15}	40					1	—1	—1	—1	—1						1					(1)		S_2
z''_{21}	80						1	1	1	1	1												
z''_{31}	70			—1					—1			1	1		1	1			—1				
z''_{41}	90																1	1	1	1	1		

	1	$-x_{11}$	$-x_{12}$	$-x_{13}$	$-x_{14}$	$-x_{15}$	$-x_{21}$	$-x_{22}$	$-x_{23}$	$-x_{24}$	$-x_{25}$	$-x_{31}$	$-x_{32}$	$-x_{33}$	$-x_{34}$	$-x_{35}$	$-x_{41}$	$-x_{42}$	$-x_{43}$	$-x_{44}$	$-x_{45}$	$-u_0$	
z_0''	1090	0	0	−1	0	−2	−1	−8	−4	−6	0	0	[0]	0	0	−2	0	−5	−1	−4	0	1	$\Delta c_{ij}'''$
z_{11}'''	−90	1		1		1		−1		−1			−(1)		−1			−1		−1			
z_{12}'''	210		1					1					1					1					
z_{13}'''	60			1					1					1					1				
z_{14}'''	80				1					1					1					1			
z_{15}'''	40					1	−1	−1	−1	−1						1					1		S_3
z_{21}'''	80						1	1	1	1	1												
z_{31}'''	70			−1					−1			1	1		1	1			−1				
z_{41}'''	50					−1	1	1	1	1						−1	1	1	1	1			
$z_0^{(4)}$	1090	0	0	−1	0	−2	−1	−8	−4	−6	0	0	0	0	0	−2	0	−5	[−1]	−4	0	1	$\Delta c_{ij}^{(4)}$
$z_{11}^{(4)}$	90	−1		−1		−1		1		1			1		1			1		1			
$z_{12}^{(4)}$	120	1	1	1		1				−1					−1					−1			
$z_{13}^{(4)}$	60			1					1					1					1				
$z_{14}^{(4)}$	80				1					1					1					1			
$z_{15}^{(4)}$	40					1	−1	−1	−1	−1						1					1		S_4
$z_{21}^{(4)}$	80						1	1	1	1	1												
$z_{31}^{(4)}$	−20	1				1		−1	−1	−1		1				1		−1	−(1)	−1			
$z_{41}^{(4)}$	50					−1	1	1	1	1						−1	1	1	1	1			
$z_0^{(5)\prime}$	1100	−1	0	−1	0	−3	−1	−7	−3	−5	0	−1	0	0	[0]	−3	0	−4	0	−3	0	1	$\Delta' c_{ij}^{(5)}$
$z_{11}^{(5)\prime}$	90	−1		−1		−1		1		1			1		1			1		1			
$z_{12}^{(5)\prime}$	120	1	1	1		1				−1					−1					−1			
$z_{13}^{(5)\prime}$	40	1		1		1		−1		−1		1		1		1		−1		−1			
$z_{14}^{(5)\prime}$	80				1					1					(1)					1			
$z_{15}^{(5)\prime}$	40					1	−1	−1	−1	−1						1					1		S_5'
$z_{21}^{(5)\prime}$	80						1	1	1	1	1												
$z_{31}^{(5)\prime}$	20	−1				−1		1	1	1		−1				−1		1	1	1			
$z_{41}^{(5)\prime}$	30	1					1					1					1						
$z_0^{(5)\prime\prime}$	1100	−1	0	−1	0	−3	−1	−7	−3	−5	0	−1	0	0	0	−3	0	−4	0	−3	0	1	$\Delta''^{(5)}_{ij}$
$z_{11}^{(5)\prime\prime}$	10	−1		−1	−1	−1		1					1					1					
$z_{12}^{(5)\prime\prime}$	200	1	1	1	1	1																	
$z_{13}^{(5)\prime\prime}$	40	1		1		1		−1		−1		1		1		1		−1		−1			
$z_{14}^{(5)\prime\prime}$	80				1					1					1					1			
$z_{15}^{(5)\prime\prime}$	40					1	−1	−1	−1	−1						1					1		S_5''
$z_{21}^{(5)\prime\prime}$	80						1	1	1	1	1												
$z_{31}^{(5)\prime\prime}$	20	−1				−1		1	1	1		−1				−1		1	1	1			
$z_{41}^{(5)\prime\prime}$	30	1					1					1					1						

Láthatóan, két egyenlő értékű, mégpedig

$$u_{0\,\mathrm{opt}} = u_0^{(5)'} = u_0^{(5)''} = 1100$$

programértékű bázisoptimum létezik, nevezetesen

$$\mathbf{x}_{\mathrm{opt,\,I}} = \mathbf{x}^{(5)'} = [0 \;\; 120 \;\; 0 \;\; 80 \;\; 0; \;\; 0 \;\; 0 \;\; 0 \;\; 0 \;\; 80; \;\; 0 \;\; 90 \;\; 40 \;\; 0 \;\; 0; \;\; 30 \;\; 0 \;\; 20 \;\; 0 \;\; 40],$$

$$\mathbf{x}_{\mathrm{opt,\,II}} = \mathbf{x}^{(5)''} = [0 \;\; 200 \;\; 0 \;\; 0 \;\; 0; \;\; 0 \;\; 0 \;\; 0 \;\; 0 \;\; 80; \;\; 0 \;\; 10 \;\; 40 \;\; 80 \;\; 0; \;\; 30 \;\; 0 \;\; 20 \;\; 0 \;\; 40].$$

γ) Gazdaságos gyártási alternatíva-problémák

I°. G é p ó r á k m i n i m á l á s a, a l t e r n a t í v g é p h a s z n á l a t n á l. Tegyük fel, hogy az $1, 2, \ldots, j, \ldots, m$ jellegű cikkek az $1, 2, \ldots, i, \ldots, n$ jellegű gépek bármelyikén előállíthatók, mégpedig egységenként (pl. kg-ként) a_{ij} gépi munkaóra (röviden gépóra) alatt. Legyen az egyes gépek kapacitása h_i gépóra, az egyes cikkek tervelőírása pedig f_j egység (pl. kg). Hogyan választandó a gépekre és cikkekre lebontott x_{ij} (pl. kg) gyártási program, ha az összes gépi munkaidőt (vagyis az összes gépórák számát) minimálni kívánjuk.

Feladatunk *megformulázása* nyilván a következő:

$$x_{ij} \geqq 0 \qquad (i = 1, 2, \ldots, n; \qquad j = 1, 2, \ldots, m); \qquad (A)$$

$$\sum_{j=1}^{m} a_{ij}x_{ij} \leqq h_i, \quad \sum_{i=1}^{n} x_{ij} = f_j; \qquad (B,\ C)$$

$$Q \equiv \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{m} a_{ij}x_{ij} = \mathrm{Min!} \qquad (D)$$

Feladatunk *hasonlít* a szállítási probléma alapfeladatához; eltérés a $\sum_j x_{ij} = t_i$ és $\sum_i t_i = \sum_j f_j$ előírások hiányában és a *(B)* követelmények adottságában van. Ennek megfelelően, a szállítási feladatnál szokásos *redukció itt csak oszloponként* eszközölhető, soronként nem. Más szóval, ha $\alpha_j = \min a_{ij}$, akkor $(i = 1, 2, \ldots, n)$

$$Q' \equiv \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{m} (a_{ij} - \alpha_j)x_{ij} = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{m} a_{ij}x_{ij} - \sum_{j=1}^{m} \alpha_j \sum_{i=1}^{n} x_{ij} = Q - \sum_{j=1}^{m} \alpha_j f_j = Q - C;$$

eszerint az oszloponként redukált és az eredeti program értéke csak egy ismert állandóban különbözik egymástól, s így azonos x_{ij} programnál veszi fel minimumát. A redukció egyébként gyakran lényegesen leegyszerűsíti a feladat megoldását.

Számszerűen legyen pl. $n = 3$, $m = 4$, továbbá

$$\mathbf{h}^* \equiv [h_i]^* = [400, 400, 400], \quad \mathbf{f}^* \equiv [f_j]^* = [100, 50, 80, 60];$$

$$\mathbf{A} \equiv [a_{ij}] = \begin{bmatrix} \boxed{2} & \boxed{3} & 5 & 4 \\ 4 & 5 & \boxed{5} & \boxed{3} \\ 3 & 4 & 6 & 5 \end{bmatrix}, \quad \boxed{\alpha_j} \qquad \mathbf{A}' \equiv [a'_{ij}] \equiv [a_{ij} - \alpha_j] = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 2 & 2 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 2 \end{bmatrix};$$

$$C \equiv \sum_{j=1}^{m} \alpha_j f_j = 2 \cdot 100 + 3 \cdot 50 + 5 \cdot 80 + 3 \cdot 60 = 930.$$

Formularendszerünk most így konkretizálódik:

$$x_{ij} \geqq 0 \qquad (i = 1, 2, 3; \; j = 1, 2, 3, 4); \tag{A}$$

$$\left.\begin{aligned} 2x_{11} + 3x_{12} + 5x_{13} + 4x_{14} &\leqq 400 \\ 4x_{21} + 5x_{22} + 5x_{23} + 3x_{24} &\leqq 400 \\ 3x_{31} + 4x_{32} + 6x_{33} + 5x_{34} &\leqq 400 \end{aligned}\right\}, \quad \left.\begin{aligned} x_{11} + x_{21} + x_{31} &= 100 \\ x_{12} + x_{22} + x_{32} &= 50 \\ x_{13} + x_{23} + x_{33} &= 80 \\ x_{14} + x_{24} + x_{34} &= 60 \end{aligned}\right\}, \tag{B, C}$$

$$Q \equiv Q' + C \equiv x_{14} + 2x_{21} + 2x_{22} + x_{31} + x_{32} + x_{33} + 2x_{34} + 930 = \text{Min!}.$$

Célszerűen a Q'-ben zérus együtthatóval szereplő

$$x_{11}, x_{12}, x_{13}, x_{23}, x_{24}$$

változókat maximálisra választva, biztosítjuk a többi változó s velük a Q' (és a Q) minimálisát. Ily módon, ha pl. a C_1, C_2 és C_4 egyenlet alapján rendre

$$x_{11} = 100, \quad x_{12} = 50, \quad x_{24} = 60,$$

s ezzel

$$x_{21} = x_{31} = x_{22} = x_{32} = x_{14} = x_{34} = 0$$

választással élünk, akkor a $B_1 \sim B_2$-ből és a C_3-ból rendre

$$x_{13} = 10, \quad x_{23} = 44, \quad x_{33} = 26$$

eredmény adódik (egyszersmind a B_3-nak is elegettéve). Más szóval a terhelés zöme (290-ből 264 kg) az első két gépre hárul, a harmadikra csak töredéke (26 kg) jut. E termelési programnak megfelelő minimális munkaidő nyilván

$$Q_{\min} = Q'_{\min} + C = 0 + 26 + 930 = 956 \quad \text{(óra)}.$$

II°. T e r m e l é s m a x i m á l á s a a l k a t r é s z g y á r t á s b a n, a l t e r n a t í v g é p h a s z n á l a t n á l. A cikkek ($j = 1, 2, \ldots, m$), a gépek ($i = 1, 2, \ldots, n$), a fajlagos gépóraszükségletek (a_{ij}), a gépkapacitások (h_i), a gépekre és cikkekre lebontott termelési mutatók (x_{ij}) most is az előbbi érte-

lemben szerepelnek. Most azonban a cikkek egy komplex gyártmány alkatrészei, s mint ilyenek, egyenlő mennyiségben készítendők ($f_j \equiv \sum_i x_{ij} = f = $ $= \text{const}$). Továbbá, most (az előbbi gépóra-minimálás helyett) a komplex gyártmány termelését (f) kell maximálni.

Formularendszerünk most nyilván így alakul:

$$x_{ij} \geqq 0 \quad (i = 1, 2, \dots, n;\ j = 1, 2, \dots, m);$$

$$\sum_{j=1}^{m} a_{ij}x_{ij} \leqq h_i, \quad (f_j \equiv) \sum_{i=1}^{n} x_{ij} = \text{const} \ (\equiv f);$$

$$(f_j = f \equiv) \sum_{i=1}^{n} x_{ij} = \text{Max!}$$

Efféle termelési problémákkal a szovjet *Kantorovics* foglalkozott.

Számszerűen legyen pl. $n = 3$, $m = 2$, továbbá

$$\mathbf{h}^* \equiv [h_i]^* = [720, \ 720, \ 720], \quad \mathbf{A} \equiv [a_{ij}] = \begin{bmatrix} 24 & 12 \\ 12 & 8 \\ 24 & 9 \end{bmatrix}.$$

Feladatunk most így konkretizálódik:

$$x_{ij} \geqq 0 \quad (i = 1, 2, 3;\ j = 1, 2); \tag{A}$$

$$\left.\begin{array}{l} 24x_{11} + 12x_{12} \leqq 720 \\ 12x_{21} + 8x_{22} \leqq 720 \\ 24x_{31} + 9x_{32} \leqq 720 \\ x_{11} - x_{12} + x_{21} - x_{22} + x_{31} - x_{32} = 0 \end{array}\right\}, \tag{B}$$

$$(f_1 \equiv) \quad x_{11} + x_{21} + x_{31} = \text{Max!}, \quad (\text{vagy } f_2 \equiv x_{12} + x_{22} + x_{32} = \text{Max!}) \tag{C}$$

[Megjegyzendő, hogy a (B_0) egyenlet az $f_1 = f_2$ tényt fejezi ki $f_1 - f_2 = 0$ alakban.]

Láthatóan, a 1. prs módosított normálfeladatával állunk szemben, s azt — ismereteink alapján — nehézség nélkül megoldhatjuk. Említésre méltó még, hogy az $f_j = f$ adottságának hiányában az előző példában használt redukciót itt nem alkalmazhatjuk a számítások lerövidítésére.

III°. Anyagfelhasználás minimálása alternatív anyagválasztásnál. A $j = 1, 2, \dots, m$ jelöljön ismét különféle cikkeket, az $i = 1, 2, \dots, n$ viszont most olyan anyagokat, amelyek bármelyikéből előállíthatók cikkeink. Jelentse most a_{ij} a fajlagos anyagszükségleteket, a_{i0} az anyagkapacitásokat, f_j az egyes cikkek tervelőírását, x_{ij} pedig az anyagokra és cikkekre lebontott gyártási programot. Kérdés, hogy választandó az utóbbi, ha az összes anyagfelhasználást (M) kívánjuk maximálni.

Feladatunk most így *formulázható* meg:

$$x_{ij} \geqq 0 \quad (i = 1, 2, \ldots, n; \quad j = 1, 2, \ldots, m); \qquad (A)$$

$$\sum_{j=1}^{m} a_{ij}x_{ij} \leqq a_{i0}, \quad \sum_{i=1}^{n} x_{ij} = f_j; \qquad (B, C)$$

$$(M \equiv) \sum\sum a_{ij}x_{ij} = \text{Min!} \qquad (D)$$

Összevetve feladatunkat a *γ)* I°-kal, azonnal szembetűnő, hogy — az eltérő műszaki értelmezés ellenére — a két feladat matematikai szempontból azonos. (Ez a jelenség egyébként nem ritka a l. prs változatos alkalmazási területén.) Ebből következik, hogy az ott közölt megoldási útbaigazítások itt is érvényesek

Számszerűen legyen pl. $n = 3$, $m = 4$, továbbá

$$\mathbf{a}_0^* \equiv [a_{i0}]^* = [9, \quad 8, \quad 1] \cdot 10^4, \qquad \mathbf{f}^* \equiv [f_j]^* = [20, \quad 30, \quad 5, \quad 100] \cdot 10;$$

$$\mathbf{A} \equiv [a_{ij}] = \begin{bmatrix} 20 & 20 & 100 & 5 \\ \boxed{15} & \boxed{20} & \boxed{80} & 6 \\ 25 & 20 & N & \boxed{1} \end{bmatrix}, \quad \mathbf{A}' \equiv [a'_{ij}] \equiv [a_{ij} - \alpha_j] = \begin{bmatrix} 5 & 0 & 20 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 5 \\ 10 & 0 & N' & 0 \end{bmatrix};$$

$$C \equiv \sum \alpha_j f_j = (15 \cdot 2 + 20 \cdot 3 + 80 \cdot 5 + 1 \cdot 10)10^2 = 50\,000.$$

Az $a_{33} = N$ jelölés arra utal, hogy a harmadik cikk gyártása a harmadik anyagféleségből csak igen nagy fajlagos anyagfelhasználással, ill. költséggel volna lehetséges, vagyis gyakorlatilag nem realizálható.

Feladatunk tehát így konkretizálódik:

$$x_{ij} \geqq 0 \quad (i = 1, 2, 3; \quad j = 1, 2, 3, 4); \qquad (A)$$

$$\left.\begin{aligned} 20x_{11} + 20x_{12} + 100x_{13} + 5x_4 &\leqq 9000 \\ 15x_{21} + 20x_{22} + 80x_{23} + 6x_4 &\leqq 8000 \\ 25x_{31} + 20x_{32} + Nx_{33} + x_4 &\leqq 1000 \end{aligned}\right\}, \quad \left.\begin{aligned} x_{11} + x_{21} + x_{31} &= 200 \\ x_{12} + x_{22} + x_{32} &= 300 \\ x_{13} + x_{23} + x_{33} &= 50 \\ x_{14} + x_{24} + x_{34} &= 1000 \end{aligned}\right\}; \qquad (B, C)$$

$$M = M' + C = 5x_{11} + 20x_{13} + 4x_{14} +$$
$$+ 5x_{24} + 10x_{31} + N'x_{33} + 5 \cdot 10^4 = \text{Min!}$$

Most ismét az M'-ben zérus együtthatóval szereplő

$$x_{12}, \quad x_{21}, \quad x_{22}, \quad x_{23}, \quad x_{32}, \quad x_{34}$$

változókat maximáljuk, a többiek s velük együtt az M' minimálása céljából. Ezen kívül most az $x_{33} = 0$ választás is kézenfekvő (a nagy N' miatt). Írható tehát, hogy

$$x_{33} + 0; \quad x_{21} = 200, \quad x_{11} = x_{31} = 0; \quad x_{23} = 50, \quad x_{13} = x_{33} = 0;$$

$$x_{34} = 1000, \quad x_{14} = x_{24} = 0; \quad x_{32} = 0; \quad 0 \leqq x_{22} \leqq 50.$$

$$0 \leqq x_{12} \leqq 3000 - x_{22};$$

$$M_{\min} = M'_{\min} + C = 0 + 5 \cdot 10^4 = 50\,000.$$

δ) Csebüsev-approximáció, lineáris programozással (ScMA)

I°. Ekvivalens feladat. *1'*. A Csebüsev-féle (a továbbiakban: Cs.-) approximáció lineáris és nemlineáris változatai, valamint a megfelelő matematikai programozási feladatok viszonya, és az előbbieknek az utóbbiak megoldásával történő eszközlése az utóbbi 3—4 évben erősen foglalkoztatja a szakirodalmat. A függvényapproximáció általános jellemzésére, funkcionálanalitikus segédeszközeire, továbbá a Cs.-approximáció különféle változataira itt nem térhetünk ki (l. ezeket pl. [76] munkánkban)* csupán a nagy fontosságú *valós, lineáris és diszkrét Cs.-approximálást* tárgyaljuk, mégpedig az ekvivalens valós, lineáris programozása útján.

Mint a [76] munkánkban részletesen kifejtettük, alkalmas jelölések bevezetése után az ilyen Cs.-approximációs ***feladat*** a

$$\mathbf{h} \equiv \begin{bmatrix} h_1 \\ h_i \\ h_\nu \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11} & \cdot & a_{1j} & \dots & a_{1m} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ a_{i1} & \cdot & a_{ij} & \dots & a_{im} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{\nu 1} & \cdot & a_{\nu j} & \dots & a_{\nu m} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_1 \\ \cdot \\ y_j \\ \vdots \\ y_m \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} g_1 \\ \cdot \\ g_i \\ \vdots \\ g_\nu \end{bmatrix} \equiv \mathbf{A}\mathbf{y} + \mathbf{g} \tag{1a}$$

$$\|\varepsilon\| \equiv \max_{1 \leq i \leq \nu} |h_i| = \text{Min!} \quad (\equiv \varepsilon_0) \tag{1b}$$

alakban fogalmazható meg [ahol $\varepsilon_0 = \min(\max|h_i|) \equiv \min\|\varepsilon\|$ módon értendő). A keresett $\mathbf{y}$ vektor(ok) szolgáltatjá(k) az ún. Cs.-pontokat.**

Vezessük be most a

$$(0 \leqq)\ |h_i| \leqq y_{m+1} \quad (i = 1, 2, \dots, \nu) \tag{2a}$$

kiegészítő változót és az

$$\mathbf{a} \equiv \mathbf{g}, \quad \mathbf{e}^* \equiv [1, 1, \dots, 1], \quad \mathbf{u} \equiv \mathbf{h} + y_{m+1} \cdot \mathbf{e} \geqq \mathbf{0}, \quad \tilde{\mathbf{u}} = -\mathbf{h} + y_{m+1} \cdot \mathbf{e} \geqq \mathbf{0}$$

vektrokat. Ezek felhasználásával, az (1a, b) Cs.-approximációs feladathoz az

$$\mathbf{u} = \mathbf{a} + \mathbf{A}\mathbf{y} + y_{m+1} \cdot \mathbf{e}, \quad \tilde{\mathbf{u}} = -\mathbf{a} - \mathbf{A}\mathbf{y} + y_{m+1} \cdot \mathbf{e};$$

$$\mathbf{u} \geqq \mathbf{0}, \quad \tilde{\mathbf{u}} \geqq \mathbf{0}, \quad y_{m+1} = \text{Min!} \tag{3a-b}$$

---

* L. erről még a *moszkvai Matematikai Világkongresszuson* elhangzott [75] előadásunkat és [74] cikkváltozatát, valamint a [76] munkánkban és Collatz [72] könyvében megadott bő szakirodalmat.

** A Cs.-pont(ok) *érdekes geometriai sajátságairól* l. szintén a [76] munkánkat.

vagy — hipermatrixos írásmóddal élve — az

$$\mathfrak{u} \equiv \begin{bmatrix} u_0 \\ \hdashline \mathbf{u} \\ \tilde{\mathbf{u}} \end{bmatrix} = \left[\begin{array}{c:cc} 0 & \mathbf{0}^* & -1 \\ \hdashline \mathbf{a} & -\mathbf{A} & -\mathbf{e} \\ -\mathbf{a} & \mathbf{A} & -\mathbf{e} \end{array}\right] \begin{bmatrix} 1 \\ \hdashline -\mathbf{y} \\ -y_{m+1} \end{bmatrix} \equiv \mathfrak{A}(-\mathfrak{y}); \quad \left.\begin{array}{l} \mathbf{u} \geqq \mathbf{0} \\ \tilde{\mathbf{u}} \geqq \mathbf{0} \\ u_0 = \text{Min!} \end{array}\right\} \qquad (4a\text{-}b)$$

lineáris programozási feladatot rendelhetjük hozzá.

Nem nehéz megmutatni*, hogy az (1a, b) Cs.-approximációs és a (3a-b) vagy a (4a—b) lineáris programozási feladat *ekvivalens* egymással.

2'. A (4a-b) lineáris programozási s vele az (1a, b) ekviva ens Cs.-approximációs feladat megoldását a szerző általános szimplex matrixalgoritmusának (SMA)** idevágó változatával, a (4a) alapegyenletből kiinduló

$$\mathfrak{v}_{q+1} = \mathfrak{A}_{q+1}(-\mathfrak{x}_{q+1}) \equiv \quad (q+1 = 1, 2, \ldots, \mathrm{p}) \qquad (5)$$

$$\equiv \boxed{\mathfrak{v}_q + (y_{l_q} - u_{k_q})\,\mathfrak{e}_{k_q} = \left[\mathfrak{A}_q - \frac{1}{a^{(q)}_{k_q l_q}}(\mathfrak{a}_{l_q} - \mathfrak{e}_{k_q})(\mathfrak{a}^{l_q} + \mathfrak{e}^{k_q})\right][-\mathfrak{x}_q - (u_{k_q} - y_{l_q})\,\mathfrak{e}_{l_q}]}$$

$$\langle \mathfrak{v}_0 \equiv \mathfrak{u},\ \mathfrak{A}_0 \equiv \mathfrak{A},\ \mathfrak{x}_0 \equiv \mathfrak{y};\ a^{(q)}_{0l_q} = \max a^{(q)}_{0j},\ a^{(q)}_{k_q 0}/a^{(q)}_{k_q l} = \min a^{(q)}_{i0}/a^{(q)+}_{il_q} > 0 \rangle$$

alakú *Cs.-approximációs szimplex matrixalgoritmussal* (ScMA) célszerű lebonyolítani. Biztonságos alkalmazását — természetesen — előmozdítja az általános SMA gyakorlott ismerete.

További magyarázat helyett mutassuk meg *az ScMA használatát* egy részletesen kidolgozott példán!

1. Pl. Oldjuk meg az alábbi Cs.-approximációs feladatot lineáris programozással:

$$\left.\begin{array}{l} h_1 = -3 + 2y_1 - y_2 \\ h_2 = 2 + y_1 + y_2 \\ h_3 = 1 + y_1 - 3y_1 \\ h_4 = 2 + y_1 - 2y_2 \\ \max\limits_{1 \leq i \leq 4} |h_i| = \text{Min!} \end{array}\right\}$$

E Cs.-feladat — láthatóan — az (1a, b) alakban jelentkezik. Az *ekvivalens* lineáris programozási feladat — a $(0 \leqq)\ |h_i| \leqq y_3$ kiegészítő változó és $(0 \leqq)$

* L. pl. *Zuhovickij* [71] könyvében.

** L. bővebben pl. a 2. §. helyen!

$u_i = h_i + y_3$, $(0\leqq)$ $\tilde{u}_i = -h_i + y_3$ kombináció bevezetésével — a (4a-b) hipermatrixos alakban eképpen írható fel)

$$\mathfrak{u} \equiv \begin{bmatrix} u_0 \\ \hline u_1 \\ u_2 \\ u_3 \\ u_4 \\ \hline \tilde{u}_1 \\ \tilde{u}_2 \\ \tilde{u}_3 \\ \tilde{u}_4 \end{bmatrix} = \left[\begin{array}{r|rrr} 0 & 0 & 0 & -1 \\ \hline -3 & -2 & 1 & \boxed{-1} \\ 2 & -1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & 3 & -1 \\ 2 & -1 & 2 & -1 \\ \hline 3 & 2 & -1 & -1 \\ -2 & 1 & 1 & -1 \\ -1 & 1 & -3 & -1 \\ -2 & 1 & -2 & -1 \end{array}\right] \begin{bmatrix} 1 \\ \hline -y_1 \\ -y_2 \\ -y_3 \end{bmatrix} \equiv \mathfrak{A}(-\mathfrak{y}); \qquad \left.\begin{aligned} u_0 &= \text{Min!} \\ u_i &\geqq 0, \\ \tilde{u}_i &\geqq 0. \end{aligned}\right\}$$

E hipermatrix-egyenlet egyszersmind szimplex matrixalgoritmusunk (ScMA) ún. *induló alapegyenlete* ($ScMA_0$). Ebből az induló program és értéke:

$$y_1 = y_2 = y_3 = 0; \; u_1 = -3 < 0, \ldots \tilde{u}_4 = -2 < 0; \; u_0 = 0,$$

s ez nyilván nem „lehetséges" program.

Az algoritmus *első lépéseként* ($ScMA_1$) az u_0-lal egyenlő y_3-at cé szerű a 0 értékű nembázis-változók körül kivinni és a („tág keresztmetszetű") u_1 bázisváltozó helyére beiktatni (s ott sorával együtt törölni is, az u_0 sorának felesleges ismétlődését elkerülendő), még akkor is, ha e változócsere — az $a_{03} = -1 < 0$ miatt a programérték növelését eredményezi. Így $a_{kl} \equiv a_{13} = -1 = 1/\gamma_1$ s vele (az említett törlésre külön jellel nem utalva)

$$\mathfrak{v}_1 \equiv \mathfrak{u} + (y_3' - u_1')\mathfrak{e}_1 = [\mathfrak{A} - \gamma_1(\mathfrak{a}_3 - \mathfrak{e}_1)(\mathfrak{a}^1 + \mathfrak{e}^3)][-\mathfrak{y} - (u_1' - y_3')\mathfrak{e}_3] \equiv \mathfrak{A}_1(-\mathfrak{x}_1),$$

$$\begin{bmatrix} u_0' \\ \hline u_2' \\ u_3' \\ u_4' \\ \hline \tilde{u}_1' \\ \tilde{u}_2' \\ \tilde{u}_3' \\ \tilde{u}_4' \end{bmatrix} = \left(\mathfrak{A} + \begin{bmatrix} -1 \\ \hline -1 \\ -1 \\ -1 \\ \hline -1 \\ -1 \\ -1 \\ -1 \end{bmatrix} [-3 \;\vdots\; -2 \quad 1 \quad 0]\right)(-\mathfrak{x}_1) \equiv \left[\begin{array}{r|rrr} 3 & 2 & -1 & -1 \\ \hline 5 & 1 & -2 & -1 \\ 4 & 1 & 2 & -1 \\ 5 & 1 & 1 & -1 \\ \hline 6 & 4 & -2 & -1 \\ 1 & \boxed{3} & 0 & -1 \\ 2 & 3 & -4 & -1 \\ 1 & 3 & -3 & -1 \end{array}\right] \begin{bmatrix} 1 \\ \hline -y_1' \\ -y_2' \\ -u_1' \end{bmatrix}.$$

Az új program és értéke:

$y_1' = y_2' = u_1' = 0$; $u_2' = 5 > 0, \ldots \tilde{u}_4 = 1 > 0$; $u_0' = (y_3' =)\, 3 > 0$, s ez már nyilván „lehetséges" (bár „rontott") program. (Az $a_{i0}' > 0$ körülmény láthatóan

a $\Delta = -3/(-1) = 3$ „tág keresztmetszet"-tal és az $a_{i3} = -1$ faktorral nyert $\Delta_{i3} = -3$ kivonandónak, vagyis $-\Delta a_{i3} = +3$ összeadandónak köszönhető!)

Az algoritmus *második lépése* (ScMA$_2$) $a'_{0l_1} \equiv a'_{01} = 2 > 0$ választással már javított programot ígér; a generáló sort keresve, a

$$\min\left(\frac{a'_{i0}}{a'_{i1}}\right) = \frac{a'_{60}}{a'_{61}} = \frac{a'_{80}}{a'_{81}} = \frac{1}{3}$$

körülmény degenerációt jelez; a két lehetőség közül kezdjük a vizsgálatot az $a'_{k_1l_1} = a'_{61} = 3 = 1/\gamma_2 > 0$ generáló elemekkel, nevezetesen

$$\mathfrak{v}_2 \equiv \mathfrak{v}_1 + (y''_1 - u''_2)\,\mathfrak{e}_6 = [\mathfrak{A}_1 - \gamma_2\,(\mathfrak{a}^{(1)}_1 - \mathfrak{e}_6)\,(\mathfrak{a}^6_{(1)} + \mathfrak{e}^1)]\,\cdot$$

$$\cdot\,[-\mathfrak{x}_1 - (u''_2 - y''_1)\mathfrak{e}_1] \equiv \mathfrak{A}_2\,(-\mathfrak{x}_2),$$

$$\begin{bmatrix} u''_0 \\ \hline u''_2 \\ u''_3 \\ u''_4 \\ \hline \tilde{u}''_1 \\ y''_1 \\ \tilde{u}''_3 \\ \tilde{u}''_4 \end{bmatrix} = \left(\mathfrak{A}_1 - \frac{1}{3}\begin{bmatrix} 2 \\ \hline 1 \\ 1 \\ 1 \\ \hline 4 \\ 2 \\ 3 \\ 3 \end{bmatrix} 1 \,\vdots\, 4 \quad 0 \quad -1]\right)(-\mathfrak{x}_2) \equiv \left[\begin{array}{c|ccc} 7/3 & -2/3 & -1 & -1/3 \\ \hline 14/3 & & & \\ 11/3 & & & \\ 14/3 & & & \\ \hline 1\ /3 & & & \\ 1/3 & & & \\ 1 & & & \\ 0 & & & \end{array}\right] \begin{bmatrix} 1 \\ \hline -\tilde{u}''_2 \\ -y''_2 \\ -u''_1 \end{bmatrix}.$$

Az új program és értéke

$$\tilde{u}''_2 = y''_2 = u''_1 = u''_4 = 0; \quad u''_2 = u''_4 = \tilde{u}''_1 = \frac{14}{3} > 0, \quad u''_3 = \frac{11}{3} > 0,$$

$$y''_1 = \frac{1}{3} > 0, \quad \tilde{u}''_3 = 1; \quad u''_0 = \frac{7}{3} < 3 = u'_0,$$

s ez nyilván lehetséges, javított, sőt tovább nem javítható, *optimális program* (s mint ilyen, *egyetlen*, az $a_{0j} < 0$ körülmény folytán); írható tehát, hogy

$$\mathbf{y}^*_{\text{opt}} = \left[\frac{1}{3},\ 0\right], \quad \mathbf{h}^* = [-7/3,\ 7/3,\ 4/3,\ 7/3],$$

$$\varepsilon_0 = u_{\text{opt}} = y_{3\,\text{opt}} = \max|h_i| = \frac{7}{3}, \quad \mathfrak{u}^* = \left[0,\ \frac{14}{3},\ \frac{11}{3},\ \frac{14}{3},\ \frac{14}{3},\ 0,\ 1,\ 0\right] > \mathfrak{O}^*.$$

Ez az $\mathbf{y}_{\text{opt}}$ egyszersmind Cs.-approximációnk *egyetlen Cs.-pontja* is! Megjegyzendő, hogy az $a'_{k_1l_1} = a'_{81} = 3 = 1/\gamma_2 > 0$ másik generáló elem ugyanezen,

egyetlen optimális megoldáshoz vezet (némileg eltérő elrendezésben és $a''_{0j} = -1/3 < 0$; $j = 1, 2, 3$ elemekkel). Ezzel kettős (appr. és progr.) feladatunkat megoldottuk.*

Megjegyzendő, hogy ugyanez az optimális megoldása a *duál maximum-feladatnak* is.**

II°. Feladat korlátozó feltételekkel. *1'.* Az (1a, b) valós, lineáris, diszkrét Cs.-approximációs feladat s a (4a-d) alakú ekvivalens ineáris programozási feladat *általánosabb alakokban is* jelentkezhet. Nézzünk most egy ilyen feladatot, amelynél *korlátozó feltételek* jelentkeznek, mégpedig *lineáris egyenlőtlenség-rendszer* alakjában. Nevezetesen, az (1a)-val azonos

$$\mathbf{h} \equiv \mathbf{A}\mathbf{y} + \mathbf{a} \quad (\dim \mathbf{h} = \nu, \quad \dim \mathbf{y} = m) \tag{6a}$$

hibafüggvény most kiegészül a

$$\ddot{\mathbf{u}} \equiv \ddot{\mathbf{A}}\mathbf{y} + \ddot{\mathbf{a}} \geqq \mathbf{0} \quad (\dim \ddot{\mathbf{u}} = p, \quad \dim \mathbf{y} = m) \tag{6b}$$

korlátozó (vektor-) egyenlőtlenséggel s ezek figyelembevételével teljesítendő az (1*b*)-vel azonos

$$\|\varepsilon\| \equiv \max_{1 \leq i \leq \nu} |h_i| = \text{Min!} \; (\equiv \varepsilon_0)$$

Cs.-követelmény. Keresendők a (6*a*, *b*, *c*)-nek elegettevő $\mathbf{y}$ Cs.-pontok!

2'. E Cs.-approximációs feladathoz — a (2*a*, *b*) jelölésekkel — az

$$\left.\begin{aligned} u_0 &= \qquad\qquad -1(-y_{m+1}) \\ \mathbf{u} &= \mathbf{a} - \mathbf{A}(-\mathbf{y}) - \mathbf{e}(-y_{m+1}) \\ \tilde{\mathbf{u}} &= -\mathbf{a} + \mathbf{A}(-\mathbf{y}) - \mathbf{e}(-y_{m+1}) \\ \ddot{\mathbf{u}} &= \ddot{\mathbf{a}} - \ddot{\mathbf{A}}(-\mathbf{y}) \end{aligned}\right\}; \quad \left.\begin{aligned} u_0 &= \text{Min!} \\ \mathbf{u} &\geqq \mathbf{0} \\ \tilde{\mathbf{u}} &\geqq \mathbf{0} \\ \ddot{\mathbf{u}} &\geqq \mathbf{0} \end{aligned}\right\} \tag{7a, b}$$

matrixos, ill.

$$\mathfrak{u} \equiv \begin{bmatrix} u_0 \\ \mathbf{u} \\ \tilde{\mathbf{u}} \\ \ddot{\mathbf{u}} \end{bmatrix} = \left[\begin{array}{c|cc} 0 & \mathbf{0}^* & -1 \\ \hline \mathbf{a} & -\mathbf{A} & -\mathbf{e} \\ -\mathbf{a} & \mathbf{A} & -\mathbf{e} \\ \ddot{\mathbf{a}} & -\ddot{\mathbf{A}} & \mathbf{0} \end{array}\right] \left[\begin{array}{c} 1 \\ \hline -\mathbf{y} \\ -y_{m+1} \end{array}\right] \equiv \mathfrak{A}(-\mathfrak{y}); \quad \left.\begin{aligned} u_0 &= \text{Min!} \\ \mathbf{u} &\geqq \mathbf{0} \\ \tilde{\mathbf{u}} &\geqq \mathbf{0} \\ \ddot{\mathbf{u}} &\geqq \mathbf{0} \end{aligned}\right\} \tag{8a, b}$$

hipermatrixos *lineáris programozási feladat* rendelhető hozzá, sőt azzal — igazolhatóan — *ekvivalens.*

E kettős feladat a (8*a*) alapegyenletből kiindulva, az (5) *Cs.-approximációs szimplex matrixalgoritmus* (ScMA) értelemszerű alkalmazásával oldható meg.

---

* E feladatot a [71] könyv egy hármas (három lépést egyesítő) ugrással és egy negyedik lépéssel, tehát kb. dupla munkával oldja meg, a behatóbb elemzés hiányában.

** L. a [71]-ben.

2. Pl. Oldjuk meg az alábbi Cs.-approximációs feladatot lineáris programozással:

$$\left.\begin{array}{l} \max\limits_{1\le i\le 3} |h_i| = \text{Min!} \\ h_1 = \qquad\quad y_1 - 2y_2 \\ h_2 = -3 + 3y_1 + y_2 \\ h_3 = -3 + 3y_1 + y_2 \\ \ddot{u} = \quad 1 - y_1 - y_2 \geqq 0 \\ \qquad y_1 \geqq 0,\ y_2 \geqq 0 \end{array}\right\}.$$

E Cs.-feladat — láthatóan — a (6*a, b, c*) alakban jelentkezik. A vele *ekvivalens*, hipermatrixos (8*a, b*) lineáris programozási feladat most így alakul:

$$\mathfrak{u} \equiv \begin{bmatrix} u_0 \\ u_1 \\ u_2 \\ u_3 \\ \tilde{u}_1 \\ \tilde{u}_2 \\ \tilde{u}_3 \\ \ddot{u} \end{bmatrix} = \left[\begin{array}{r|rrr} 0 & 0 & 0 & -1 \\ \hline 0 & -1 & 2 & -1 \\ -4 & -2 & 1 & \boxed{-1} \\ -3 & -3 & -1 & -1 \\ \hline 0 & 1 & -2 & -1 \\ 4 & 2 & -1 & -1 \\ 3 & 3 & 1 & -1 \\ \hline 1 & 1 & 1 & 0 \end{array}\right] \begin{bmatrix} 1 \\ \hline -y_1 \\ -y_2 \\ -y_3 \end{bmatrix} \equiv \mathfrak{A}(-\mathfrak{y}); \qquad \left.\begin{array}{l} u_0 = \text{Min!} \\ u_i \geqq 0 \\ \tilde{u}_i \geqq 0 \\ y_1 \geqq 0 \\ y_2 \geqq 0 \end{array}\right\}.$$

E hipermatrixos *induló alapegyenletből* ($ScMA_0$), az induló program és értéke

$$y_1 = y_2 = y_3 = 0; \quad u_1 = 0, \quad u_2 = -4, \ldots, \quad \tilde{u}_3 = 3, \quad \ddot{u} = 1; \quad u_0 = 0,$$

s ez nyilván nem „lehetséges" program.

Az algoritmus *első lépéseként* ($ScMA_1$) az u_0-lal egyenlő y_3-at vonjuk ki a nembázisváltozók közül, és a reá nézve „tág keresztmetszetű" u_2-t iktatjuk helyére. Így $a_{kl} = a_{23} = -1 = 1/\gamma$ s vele (az y_3' sorának törlésével)

$$\mathfrak{v}_1 \equiv \mathfrak{u} + (y_3' - u_2')\mathfrak{e}_2 = [\mathfrak{A} - \gamma_1 (\mathfrak{a}_3^{(1)} - \mathfrak{e}_2)(\mathfrak{a}_{(1)}^2 + \mathfrak{e}^3)] \cdot$$

$$\cdot [-\mathfrak{y} - (u_2' - y_3')\mathfrak{e}_3] \equiv \mathfrak{A}_1 (-\mathfrak{x}_1),$$

$$\begin{bmatrix} u_0' \\ \hline u_1' \\ u_3' \\ \hline \tilde{u}_1' \\ \tilde{u}_2' \\ \tilde{u}_3' \\ \hline \ddot{u}' \end{bmatrix} = \left(\mathfrak{A} + \begin{bmatrix} -1 \\ \hline -1 \\ -1 \\ \hline -1 \\ -1 \\ -1 \\ \hline 0 \end{bmatrix} [-4 \mid -2 \quad 1 \quad 0]\right)(-\mathfrak{x}_1) \equiv \left[\begin{array}{r|rrr} 4 & 2 & -1 & -1 \\ \hline 4 & 1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & -2 & -1 \\ 4 & 3 & -3 & -1 \\ 8 & 4 & -2 & -1 \\ 7 & 5 & 0 & -1 \\ \hline 1 & 1 & 1 & 0 \end{array}\right] \begin{bmatrix} 1 \\ \hline -y_1' \\ -y_2' \\ -u_2' \end{bmatrix}.$$

Az új program és értéke

$$y_1' = y_2' = u_2' = 0; \quad u_1' = 4, \quad u_3' = 1, \ldots, \tilde{u}_3' = 7, \quad \ddot{u}' = 1; \quad u_0' = 4,$$

vagyis ez már lehetséges, bár rontott program.

Az algoritmus *második lépését* (ScMA$_2$) a generáló elem hagyományos (javító, szűk keresztmetszetes) választásával eszközöljük, vagyis

$$a'_{0l_1} \equiv a'_{01} = 2 > 0, \quad \min\left(\frac{a'_{i0}}{a'^{(+)}_{i1}}\right) = \frac{a'_{70}}{a'_{71}} = \frac{1}{1} = 1, \qquad a'_{k_1 l_1} = a'_{71} = 1/\gamma_2 = 1] > 0.$$

Így írható, hogy

$$\mathfrak{v}_2 \equiv \mathfrak{v}_1 + (y_1'' - \ddot{u}'')\, \mathfrak{e}_7 = [\mathfrak{A}_1 - \gamma_2\, (\mathfrak{a}^{(1)}_1 - \mathfrak{e}_7)\, (\mathfrak{a}^7_{(1)} + \mathfrak{e}^1)]\, [-\mathfrak{x}_1 - (\ddot{u}'' - y_1'')\, \mathfrak{e}_1] \equiv$$

$$\equiv \mathfrak{A}_2 (-\mathfrak{x}_2),$$

$$\begin{bmatrix} u_0'' \\ u_1'' \\ u_3'' \\ u_1'' \\ u_2'' \\ u_3'' \\ y_1'' \end{bmatrix} = \left(\mathfrak{A}_1 - 1. \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ -1 \\ 3 \\ 4 \\ 5 \\ 0 \end{bmatrix} [1 \mid 2 \quad 1 \quad 0]\right)(-\mathfrak{x}_2) = \begin{bmatrix} 2 & -3 & -3 & -1 \\ 3 & & & \\ 2 & & & \\ 1 & & & \\ 4 & & & \\ 2 & & & \\ 1 & & & \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ -\ddot{u}'' \\ -y_2' \\ u_2'' \end{bmatrix}.$$

Az új program és értéke

$$\ddot{u}'' = y_2'' = u_2'' = 0; \quad u_1'' = 3, \quad \tilde{u}_3'' = 2, \quad \tilde{u}_1'' = y_1'' = 1, \quad \tilde{u}_2'' = 4\ (> 0);$$

$$u_0'' = 2 < 4 = u_0';$$

ez nyilván lehetséges, javított, sőt *optimális program*, s mint ilyen, egyetlen, lévén $a''_{0j} < 0$; $(j = 1, 2, 3)$. Írható tehát, hogy

$$\mathbf{h}^* = [1, -2, 0],$$

$$\mathbf{y}_{\text{opt}} = [1, 0], \quad \mathfrak{u}^* = [3, 0, 2; 1, 4, 2; 0] \geqq \mathfrak{O}^*,$$

$$\varepsilon_0 = u_{0\,\text{opt}} = y_{3\,\text{opt}} = \max |h_i| = 2.$$

Az így nyert $\mathbf{y}_{\text{opt}}$ egyszersmind Cs.-approximációnk *egyetlen Cs.-pontja* is.

3'. Megjegyezzük, hogy a Cs.-approximációnak *számos további lineáris és nemlineáris változata,* valamint ekvivalens matematikai programozási feladata van. Ezek itteni ismertetésére már nincs mód, s helyette a [74, 75, 76] munkáinkban található további vizsgálatokra, valamint a szakirodalomra, pl. a [71, 72] munkákra kell utalnunk.

e) Integer (lineáris) programozás, szimplex-matrixalgoritmussal (SiMA)

α) Az integer (lineáris) programozásról általában

I°. A feladat jelentősége. *1'.* A l. prs szerteágazó és az adott keretek között korántsem áttekinthető speciális feladatai közül napjaink szakirodalmában mind nagyobb jelentőségre tesz szert az ún. *integer programozás**. Ez — mint mindjárt bővebben is látni fogjuk — olyan, többnyire (s az alábbiakban mindig) lineáris prs, amelyben a l. célfüggvény extrémálásánál — a változók nemnegativitási feltétele és a l. korlátozó feltételek mellett *a változók némelyikének vagy mindegyikének egész (integer) értékűségét is megköveteljük.*

Az utóbbi időben kitűnt, hogy *az üzemgazdasági problémák széles változatossága* kezelhető int. prs-sal, köztük olyan problémák is, amelyek kapcsolata az int. prs-sal egyáltalán nem nyilvánvaló. Jellegzetes int. prs-i problémák pl.: a termelés-prs-i feladat oszthatatlan termékek vagy (és) termelési tényezők esetén; az ún. kijelölési probléma, az ún. elhelyezési vagy irodaház-probléma, az ún. utazóügynök-probléma, továbbá bizonyos faita szállítás- és gépterhelés prs-i problémák stb. Ezek egyikére-másikára később még visszatérünk.

2'. E sokoldalú üzemgazdasági alkalmazások érthetővé teszik, hogy az elmúlt években az int. prs-i feladatok megoldásának *módszertani vonatkozásai* a kutatás előterébe kerültek. Több általános módszer született mostanában; pl. a *Markowitz—Mann*-féle eljárás [24], a *Gomory—Baumol*-féle MIF**-módszer [22], különféle (felülről vagy alulról) közelítő módszerek, a mellékfeltételek alkalmas módosítása stb. Emellett számos speciális módszert is közöltek újabban; pl. a kijelölési, az irodaház-, az utazóügynök-problémára stb. Itt bővebben csak a *Gomory—Baumol*-féle módszert lesz módunkban tárgyalni, az SMA-val kombinálva, s egyebekben a legfrissebb szakirodalom gazdag anyagára kell utalnunk.

Elméleti vonatkozásban említésre méltó, hogy pl. *Markowitz* és *Mann* [24] megállapítása szerint az elméletileg nagyon igényes konkáv prs, továbbá a nem konvex lehetséges megoldáshalmazzal kapcsolatos prs is tárgyalható int. prs-sal, legalább elvileg. Érdekes, hogy *Gomory* [22] említése szerint az ún. négyszínű térkép problémája is megadható int. prs-i formulázásban. A fenti bevezető megjegyzések bizonyára érzékeltetik az olvasóval az integer programozás jelentőségét a modern üzemgazdaságban.

II°. A feladat normálalakja és változatai. *1'.* Utalva a l. prs általános feladatának *b) β)* I°-beli formuláira, és a fentebbi értelmezésre,

* A továbbiakban így **rövidítjük**: int. prs.
** Method of Integer Forms.

a l. int. prs primál maximumfeladata, eredeti (primál változós) alakjában és skaláris írásmódon gy fogalmazható meg:

Megoldandó az

$$x_j \geqq 0 \quad (j = 1, 2, \ldots, m)$$

nemnegatív változókra értelmezett és az

$$\left.\begin{array}{l} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1m}x_m \leqq a_{10} \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2m}x_m \leqq a_{20} \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \ldots + a_{nm}x_m \leqq a_{n0} \end{array}\right\} \quad (a_{ij} = \text{Int!}) \qquad (1)$$

l. kényszerfeltételnek alávetett (és $a_{00} = 0$-sal értendő)

$$u_0 = (a_{00} +)\, a_{01}x_1 + a_{02}x_2 + \ldots + a_{0m}x_m \quad (a_{0j} = \text{Int!})$$

l. célfüggvényre vonatkozó

$$u_0 = \text{Max!}$$

(kötött) szélsőérték-feladat, mégpedig csakis*

$$x_j = \text{Int!} \quad (j = 1, 2, \ldots, m)$$

egész értékek felhasználásával.

Ugyanez az előzőkből jól ismert (duál változókkal) *bővített alakjában, skaláris írásmódon és az ún. Tucker-féle elrendezésben* így alakul:

$$x_j \geqq 0, \quad u_i \geqq 0, \quad x_j = \text{Int!}$$

$$(j = 1, 2, \ldots, m; \quad i = 1, 2, \ldots, n);$$

$$u_0 = a_{00} + a_{01}(-x_1) + a_{02}(-x_2) + \ldots + a_{0m}(-x_m) = \text{Max!} \quad (a_{0j} = \text{Int!})$$

$$\left.\begin{array}{l} u_1 = a_{10} + a_{11}(-x_1) + a_{12}(-x_2) + \ldots + a_{1m}(-x_m) \\ u_2 = a_{20} + a_{21}(-x_1) + a_{22}(-x_2) + \ldots + a_{2m}(-x_m) \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ u_n = a_{n0} + a_{n1}(-x_1) + a_{n2}(-x_2) + \ldots + a_{nm}(-x_m) \end{array}\right\} \quad (a_{ij} = \text{Int!}) \qquad (2)$$

A továbbiakban *ezt az alakot és elrendezést*, valamint a reá támaszkodó szimplex egyenleteket és matrixos, hipermatrixos formulákat *fogjuk alkalmazni*, a legfrissebb szakirodalmi gyakorlatnak megfelelően.

---

* Itt az összes x_j változók egészértékűségét [integritását] megköveteljük.

Az előző alfejezetekben alkalmazott jelölések igénybevételével, a *l. int. prs primál maximumfeladata, bővített alakjában és matrixos írásmódon* így formulázható meg:*

$$\mathbf{x} \geqq \mathbf{0}, \quad \mathbf{u} \geqq \mathbf{0}, \quad \mathbf{x} = \text{Int!}$$

$$u_0 = a_{00} + \mathbf{a}^0(-\mathbf{x}) = \text{Max!} \quad (a_{00} = 0, \ \mathbf{a}^0 = \text{Int!})$$

$$\mathbf{u} = \mathbf{a}^0 + \mathbf{A}(-\mathbf{x}) \quad (\mathbf{a}_0, \mathbf{A} = \text{Int!}) \tag{3}$$

Ugyanez a korábban is alkalmazott *hipermatrixos írásmódon* így fest:

$$\mathbf{x} \geqq \mathbf{0}, \quad \mathbf{u} \geqq \mathbf{0}, \quad \mathbf{x} = \text{Int!}$$

$$\mathbf{u} \equiv \begin{bmatrix} u_0 \\ \mathbf{u} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{00} & \mathbf{a}^0 \\ \mathbf{a}_0 & \mathbf{A} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ -\mathbf{x} \end{bmatrix} \equiv \mathfrak{A}(-\mathbf{x}), \quad u_0 = \text{Max!} \quad (\mathfrak{A} = \text{Int!})^{**} \tag{4}$$

Megjegyzendő, hogy e helyen csupán az

$$\mathbf{a}_0^* = [a_{10}, a_{20}, \ldots, a_{n0}] \geqq \mathbf{0}$$

esetre, vagyis az ún. *normálfeladatra* szorítkozunk.

3'. Megformulázván az előbb a l. int. prs általános feladatát, nem lesz érdektelen most vázolni néhányat az I° 1'-ben említett *speciális l. int. prs-i feladatok* közül, utalva a szakirodalomban található bővebb áttekintésekre.***

a) Termelés-prs, oszthatatlan végtermékek esetén (pl. gépek, aggregátorok stb.). m számú ilyen lehetséges T_j végtermék esetén megállapítandók a maximális Q összhozamra vezető x_j termékmennyiségek, az E_i termelési tényezők vagy erőforrások (gépióra, munkaerő, nyersanyagok stb.) bizonyos s_i korlátai (erőforráskapacitások), valamint adott a_{ij} technikai koefficiensek és p_j fajlagos hozamok mellett. Jelekkel (skaláris és matrixos írásmódon):

$$0 \leqq x_j = \text{Int!} \quad (j = 1, 2, \ldots, m); \qquad \mathbf{0} \leqq \mathbf{x} = \text{Int!}$$

$$\sum_{j=1}^{m} a_{ij}x_j \leqq s_i \quad (i = 1, 2, \ldots, n); \qquad \mathbf{A}\mathbf{x} \leqq \mathbf{s}, \tag{5}$$

$$Q = \sum_{j=1}^{m} p_j x_j = \text{Max!} \qquad Q = \mathbf{p}^*\mathbf{x} = \text{Max!}$$

E feladat oszthatatlan termelési tényezők vagy erőforrások (pl. kohók, energia-aggregátorok), sőt oszthatatlan termékek és erőforrások esetére is megformulázható és alkalmazható az üzemgazdaságban.

---

* Az $\mathbf{x}$, $\mathbf{a}^0$, $\mathbf{a}_0$, $\mathbf{A}$ = Int! jelölés e vektorok, ill. matrix összes elemeinek egészértékűségére utal.

** Megjegyzendő, hogy az $\mathbf{A}$ = Int!, vagyis az összes együtthatók integritása csupán célszerűségi követelmény és csak az $\mathbf{x}$ = Int! a lényeges megszorítás.

*** L. pl. *Krelle* [29].

b) Kijelölési probléma (Assignment Problem). m számú oszthatatlan termelési tényezőt (embereket, gépeket, szerszámokat stb.) úgy kell $n = m$ üzemhelyre elosztani, hogy az általuk eredményezett Q összhozam maximális legyen, adott a_{ij} fajlagos hozamok mellett. Lényegében az $\mathbf{A} = [a_{ij}]$ hozammatrixból kell soronként és oszloponként egy-egy elemet kijelölni! Jelekkel:

$$Q = \sum_{i=1}^{n} \sum_{i=1}^{m} a_{ij}\Delta_{ij} = \text{Max!}; \quad \sum_{j=1}^{n} \Delta_{ij} = 1, \quad \sum_{i=1}^{n} \Delta_{ij} = 1, \quad \Delta_{ij} = \begin{cases} 1 \\ 0 \end{cases}. \tag{6}$$

Éppen az utóbbi az integritási feltétel. Megjegyzendő, hogy a feladat olykor $n \leqq m$ sajátságú nehezebb változatban is előfordul.

c) Elhelyezési vagy irodaház-probléma. Egy cég m irodáját úgy kell elhelyezni egy (új) irodaház $n = m$ helyiségében, hogy a c_{ij} távolságú és b_{ij} forgalmú irodák között szükséges járkálás, ill. az így okozott veszteség minimális legyen. Jelekkel:

$$Sp(\mathbf{C}\boldsymbol{\Delta}^*\mathbf{B}\boldsymbol{\Delta}) = \text{Min!}; \quad \sum_{i=1}^{n} \Delta_{ij} = 1, \quad \sum_{j=1}^{n} \Delta_{ij} = 1, \quad \Delta_{ij} = \begin{cases} 1 \\ 0 \end{cases}; \tag{7}$$

tt $\Delta_{ij} = 1$, ha a j iroda az i helyiségbe kerül, egyébként $\Delta_{ij} = 0$, továbbá pl. $Sp(\mathbf{A}_n) = a_{11} + a_{22} + \ldots + a_{nn}$, végül $\mathbf{C} = [c_{ij}]$ $(c_{ii} = 0)$, $\mathbf{B} = [b_{ij}]$ $(b_{ii} = 0)$ és $\boldsymbol{\Delta} = [\Delta_{ij}]$. E feladat szintén előfordul $n \neq m$ nehezebb változatban is.

d) Körutazási probléma (Travelling-Salesman Problem). Egy utazónak n helyet kell meglátogatnia, $i \to j$ viszonylatban c_{ij} útiköltséggel utazva, vegül kiindulási helyére kell visszatérnie; kérdés, melyik a legolcsóbb körút. Jelekkel:

$$\sum_{i=1}^{n} \sum_{\substack{j=1 \\ (i \neq j)}}^{n} c_{ij}\Delta_{ij} = \text{Min!} \quad \text{(költségminimálás)}; \tag{8}$$

$$\sum_{i=1}^{n} \Delta_{ij} = 1, \quad \sum_{j=1}^{n} \Delta_{ij} = 1 \quad (i \neq j) \quad \text{(minden hely csak egyszer érintendő)};$$

$${}'\boldsymbol{\Delta}^*\boldsymbol{\Delta}'\boldsymbol{\Delta} = \boldsymbol{\Omega}, \quad \sum_{i=1}^{n} {}'\Delta_{ij} = 1, \quad \sum_{j=1}^{n} \Delta_{ij} = 1 \quad \text{(a kiindulási helyre kell visszatérni)};$$

$$\Delta_{ij} = \begin{cases} 1 \\ 0 \end{cases} (i \neq j), \quad {}'\Delta_{ij} = \begin{cases} 0 \\ 1 \end{cases} \quad \text{(integritás)};$$

itt $\boldsymbol{\Delta} = [\Delta_{ij}]$, $'\boldsymbol{\Delta} = [{}'\Delta_{ij}]$, $\boldsymbol{\Omega} = [\omega_{ij}]$, ahol $\omega_{ij} = \delta_{i+1,j}$, vagyis $\boldsymbol{\Omega}$ éppen az ún. primitív ciklikus (másnéven jólrendezési) matrix.

E problémák behatóbb tárgyalása és továbbiak ismertetése tekintetében a szakirodalomra utalunk.*

* L. az irodalomjegyzéket!

β) A feladat megoldása integer szimplex matrixalgoritmussal (SiMA)

I°. P r i m á l s z i m p l e x a l g o r i t m u s (PSA).

1'. Mint már az *α)* II° 2' pontban láttuk, a *l. int. prs primál maximumfeladata* bővített alakjában, matrixos írásmódon (az együtthatók célszerű integritás követelményét a továbbiakban mellőzve) így alakul:

$$\mathbf{0} \leqq \mathbf{x} = \text{Int!} \quad \mathbf{u} \geqq \mathbf{0}, \quad u_0 = \text{Max!}$$

$$\left.\begin{aligned} u_0 &= a_{00} + \mathbf{a}^0(-\mathbf{x}) \\ \mathbf{u} &= \mathbf{a}_0 + \mathbf{A}(-\mathbf{x}) \end{aligned}\right\}, \tag{9}$$

hipermatrixos írásmódon pedig így:

$$\mathbf{0} \leqq \mathbf{x} = \text{Int!}, \quad \mathbf{u} \geqq \mathbf{0}, \quad u_0 = \text{Max!}$$

$$\mathfrak{u} \equiv \begin{bmatrix} u_0 \\ \mathbf{u} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{00} & \mathbf{a}^0 \\ \mathbf{a}_0 & \mathbf{A} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ -\mathbf{x} \end{bmatrix} \equiv \mathfrak{A}(-\mathfrak{x}), \tag{10}$$

ahol normálfeladat esetén

$$\mathbf{a}_0^* = [a_{10}, a_{20}, \ldots, a_{n0}] \geqq \mathbf{0}. \tag{11}$$

Korábban már említettük, hogy a l. int. prs általános módszerei közül a *Gomory—Baumol-féle „integer formák módszerét”** tárgyaljuk. E figyelemre méltó módszer egészen új keletű, 1960-ban közölték a szerzők [22] cikkükben. Választásunk azért is esett erre, mert az említett cikk tárgyalásmódja — az (ott mellőzött) matrixos tárgyalástól eltekintve — közel áll könyvünkéhez (pl. duál változókkal bővített alak, *Tucker*-féle elrendezés) *és előnyösen kombinálható szimplex matrixalgoritmusunkkal.*

2'. A SiMA *t ö b b s z a k a s z b ó l* áll:

A) Első szakasz: *a primál szimplex algoritmus* (PSA) alkalmazása a közönséges primál feladat megoldására, nem integer primál optimális program (egyszersmind duál lehetséges program) előállításával.

B) Második szakasz: a tulajdonképpeni *„integer formák módszer”-ének* (IFM) alkalmazása, az „integrálás”-t célzó járulékos kényszerfeltétel kirovása útján.

C) Harmadik szakasz: *a duál szimplex módszer* (DSM) alkalmazása, az A) végén nyert és a B) során kiegészített duál feladat megoldására, mely még rendszerint nem lesz integer.

D) Negyedik szakasz: *az integer duál algoritmus* (IDA) alkalmazása, vagyis a B) és C) szakasz ismétlése, míg integer duál optimális programot nem nyerünk.

3'. Szóljunk most *külön-külön az egyes szakaszokról!* Először a PSA-t alkalmazzuk, az adott (9) primál maximum feladatra, de az $\mathbf{x}$ = Int! követelmény

* A továbbiakban így **rövidítjük:** IFM.

átmeneti mellőzésével és normálfeladatra szorítkozva. Az $a^{(q)}_{k_q l_q}$ generáló elemek *b) α)* III° 2′ szerinti

$$a^{(q)}_{0 l_q} < 0, \quad a^{(q)}_{k_q l_q} > 0, \quad \delta^{(q)}_0 \equiv \frac{a^{(q)}_{k_q 0}}{a^{(q)}_{k_q l_q}} = \min \frac{a^{(q)}_{i0}}{a^{(q+)}_{i l_q}} \tag{12}$$

$$(k_q, l_q \neq 0, \quad q+1 = 1, 2, \ldots, p)$$

választásának* megfelelő szimplex lépések $\mathfrak{A}_p$ eredménymatrixa, a *b) β)* V°-ban részletezett

$$\mathfrak{A}_p = \mathfrak{A}_0 - \mathfrak{A}^{(-)}_p \mathbf{A}^{-1}_{pp} \mathfrak{A}^p_{(+)} \quad (\mathfrak{A}_0 \equiv \mathfrak{A}) \tag{13}$$

szimplex matrixformulánkkal (SMF) határozható meg. Amennyiben $\mathfrak{A}_p$ már optimális matrix (mondjuk, egyetlen), akkor benne

$$\mathbf{a}^{0p}_{(p)} = -\mathbf{a}^{0p}\Gamma_{(p)} > \mathbf{0}^*, \quad \mathbf{a}^{0m}_{(p)} = +\mathbf{a}^{0m} - \mathbf{a}^{0p}\Gamma_{(p)}\mathbf{A}_{pm} > \mathbf{0}^* \quad (\Gamma_{(p)} \equiv \mathbf{A}^{-1}_{pp}), \tag{14a}$$

vagyis $\mathbf{a}^0_{(p)}$ duál lehetséges megoldásnak tekinthető, továbbá az $\mathfrak{A}_p$-beli

$$\mathbf{x}^{(p)}_p = \mathbf{a}^{(p)}_{p0} = \Gamma_{(p)}\mathbf{a}_{p0} \geqq \mathbf{0}, \quad \mathbf{x}^{(p)}_m = \mathbf{0} \tag{14b}$$

optimális megoldás rendszerint nem integer, vagyis $\mathbf{x}^{(p)}_p$ koordinátái általában törtszámok.

II°. I n t e g e r f o r m á k m ó d s z e r e (IFM). *1′.* Ezután következik az IFM alkalmazása, az előbbi szakaszt lezáró

$$\mathfrak{y} \equiv \begin{bmatrix} u^{(p)}_0 \\ \mathbf{y} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a^{(p)}_{00} & \mathbf{a}^0_{(p)} \\ \mathbf{a}^{(p)}_0 & \mathbf{A}_p \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ -\mathbf{v} \end{bmatrix} \equiv \mathfrak{A}_p(-\mathfrak{v}) \equiv \mathbf{C}(-\mathfrak{v}) \tag{15}$$

$$(\mathbf{y}^* = [\mathbf{x}^{(p)*}_p, \mathbf{u}^{(p)*}_n], \ \mathbf{v}^* = [\mathbf{u}^{(p)*}_p, \mathbf{x}^{(p)*}_m], \ \mathbf{a}^{(p)}_0 \equiv \mathbf{c}_0 \geqq \mathbf{0}, \ \mathbf{a}^0_{(p)} \equiv \mathbf{c}^0 \geqq \mathbf{0}^*)$$

alapegyenletből kiindulva. Állítsuk elő most az $\mathbf{a}^0_{(p)} \equiv \mathbf{c}_0$ vektor koordinátáit és az $\mathbf{A}_p \equiv \mathbf{C}$ matrix elemeit *egész és pozitív valódi tört rész* összegeként, eképpen:

$$\begin{gathered} \mathbf{c}_0 = [c_{i0}] = [k_{i0} + f_{i0}] = [k_{i0}] + [f_{i0}] = \mathbf{k}_0 + \mathbf{f}_0 \geqq \mathbf{0}, \\ \mathbf{C} = [c_{ij}] = [k_{ij} + f_{ij}] = [k_{ij}] + [f_{ij}] = \mathbf{K} + \mathbf{F}, \\ (k_{i0} = \mathrm{Int}, \quad 0 \leqq f_{i0} \leqq 1; \quad k_{ij} = \mathrm{Int}, \quad 0 \leqq f_{ij} \leqq 1). \end{gathered} \tag{16}$$

Az egyszerűség kedvéért tegyük fel egyelőre, hogy

$$\mathbf{C} \geqq \mathbf{O}, \quad \text{s így} \quad \mathbf{K} = \mathrm{Int}(\mathbf{C}) \geqq \mathbf{O}. \tag{17}$$

Figyelembe veendők továbbá az

$$\mathbf{y} \geqq \mathbf{0}, \quad \mathbf{y} = \mathbf{int}; \quad \mathbf{v} \geqq \mathbf{0}, \quad \mathbf{v} = \mathbf{int} \tag{18}$$

követelmények.

---

* *Degeneráció* esetén a *b) β)* III°–IV°-beli *perturbációs módszerrel* választjuk.

A fentebbi alapegyenlet és a $\mathbf{C} \geqq \mathbf{O}$, $\mathbf{v} \geqq \mathbf{0}$, $\mathbf{y} = \mathbf{int}$ felhasználásával írható, hogy

$$\mathbf{0} \leqq \mathbf{Cv} = \mathbf{c}_0 - \mathbf{y} = \mathbf{f}_0 + (\mathbf{k}_0 - \mathbf{y}) = \mathbf{f}_0 + \mathbf{e} \qquad (\mathbf{0} \leqq \mathbf{e} = \mathbf{int})$$

s ebből a

$$\mathbf{Cv} \geqq \mathbf{f}_0 \tag{19}$$

első egyenlőtlenség nyerhető. Az előbbi egyenletet bármely $\mathbf{Qv}$ ($-\mathbf{K} \leqq \mathbf{Q} = \mathbf{int}$, $\mathbf{0} \leqq \mathbf{v} = \mathbf{int}$) integer vektorral bővítve, az $\mathbf{O} \leqq \mathbf{C}' = \mathbf{C} + \mathbf{Q}$ figyelembevételével a

$$\mathbf{0} \leqq \mathbf{C'v} = \mathbf{c}_0 + \mathbf{Qv} - \mathbf{y} = \mathbf{f}_0 + (\mathbf{e} + \mathbf{Qv}) = \mathbf{f}_0 + \mathbf{e}' \qquad (\mathbf{0} \leqq \mathbf{e}' = \mathbf{int})$$

egyenlet, s belőle a

$$\mathbf{C'v} \geqq \mathbf{f}_0 \tag{20}$$

második egyenlőtlenség adódik. Végül ez utóbbinak $\mathbf{Q} = -\mathbf{K}$, $\mathbf{C}' = \mathbf{C} + \mathbf{Q} = \mathbf{C} - \mathbf{K} = \mathbf{F}$ szélső esetenként nyerhető a legerősebb, mégpedig

$$\mathbf{Fv} \geqq \mathbf{f}_0 \tag{21}$$

alakú *harmadik egyenlőtlenség*. Ugyanez — alkalmas $\mathbf{s} = [s_i] \geqq \mathbf{0}$ járulékos vektor bevezetésével — az

$$\mathbf{s} = -\mathbf{f}_0 - \mathbf{F}(-\mathbf{v}), \quad \text{ill.} \quad s_i = -f_{i0} - \sum_{j=1}^{m} f_{ij}(-v_j) \tag{22}$$

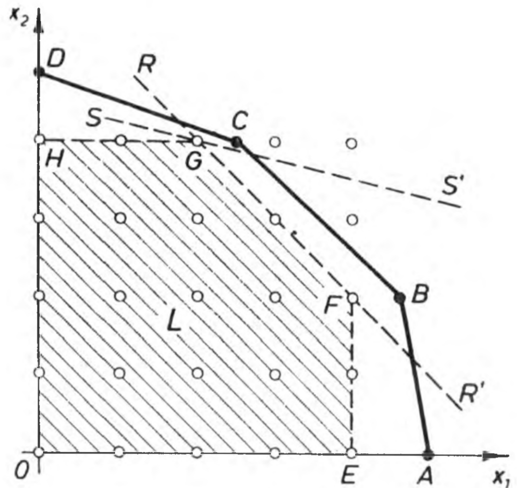
járulékos vektoregyenlet, ill. skalár egyenletrendszer alakjába írható át.

Megjegyzendő, hogy a $\mathbf{C} \geqq \mathbf{0}$ egyszerűsítő feltétel nem *szükséges* a (21) egyenlőtlenség levezetéséhez. Ugyanis ha $\mathbf{C}$-nek vannak negatív elemei, akkor valamely alkalmas $\mathbf{Q} \geqq \mathbf{O}$, $\mathbf{Int}$ matrix hozzáadásával a $\mathbf{C}' = \mathbf{C} + \mathbf{Q} \geqq \mathbf{O}$ matrixra jutunk, amelyre már érvényes a (20) egyenlőtlenség, sőt $\mathbf{Q}_0 = \text{Min}\,\mathbf{Q}$ esetben a (21) is.

2'. Beszéljünk külön az

$$s_i = -f_{i0} - \sum_{j=1}^{m} f_{ij}(-v_j) \tag{23}$$

járulékos egyenletekről, más néven *kényszerfeltételekről*. Említést érdemel, hogy ezeket az eredeti egyenletek egész számú többszöröseivel lineá-



3. ábra

risan kombinálva, belőlük a fenti módon újabb kényszerfeltételeket lehet levezetni, mégpedig — igazolhatóan — véges számban.

Állapítsuk meg ezután a kényszerfeltételek *néhány sajátságát (3. ábra)!*

a) $s_i = \text{int}$. — Ui. a (19)-hez vezető egyenlet értelmében $\mathbf{s} = -\mathbf{f}_0 - \mathbf{F}(-\mathbf{v}) = \mathbf{e} - \mathbf{K}\mathbf{v} = \mathbf{e}^0 = \mathbf{int}$, azaz $s_i = \text{int}$.

b) A PSA-szakasz nem-egész optimális megoldásai *nem elégítik ki* a (23)-at [másszóval a (23) kizárja azokat a lehetséges megoldások L halmazából]. — Ui. a (23) levezetésénél felhasználtuk az $\mathbf{y} = \mathbf{int}$, $\mathbf{v} = \mathbf{int}$ körülményt.

c) A PSA-szakasz esetleges egész lehetséges megoldásai *kielégítik* a (23)-at [a (23) nem zárja ki azokat az L-ből].

d) A (23)-at esetleg az L-hez nem tartozó egész programok *is kielégítik* $s_i = 0$ mellett.

e) Az előzők értelmében néhány kényszerfeltétel — mint fölösleges — *kieshet,* egyidejűleg tehát legfeljebb n kényszerfeltétel érvényesíthető. —

A megmaradó kényszerfeltételeket *a gyakorlatban* nem egyszerre, vagy tetszőleges sorrendben egymás után érvényesítjük, hanem közülük egyelőre csak a

$$\text{Max}\,\frac{f_{i0}}{f_{ij}} = \frac{f_{h0}}{f_{hj}} \qquad (f_{ij} \neq 0) \tag{24a}$$

viszonyszámot felmutató ($i = h$ sorindexű)

$$s_h = -f_{h0} - f_{hj}(-v_j) \tag{24b}$$

kényszerfeltételt rójuk ki (ui. — ellenőrizhetően — így vágjuk le a legnagyobb „fölös" részt az L halmazból), érvényesítését a következő szakaszra halasztva.

Ezekben vázoltuk az IFM-szakaszra vonatkozó főbb tudnivalókat, további elméleti és geometriai részletek tekintetében a szakirodalomra utalva.*

III°. Duál szimplex módszer (DSM) és integer duál algoritmus (IDA). *1'.* A PSA-szakasz és az első IFM-lépés befejeztével az alábbi *kombinált primál maximumfeladat* áll előttünk:

$$\begin{array}{lll} u_0^{(p)} & = c_{00} + \mathbf{c}^0\,(-\mathbf{v}) \\ \mathbf{y} & = \mathbf{c}_0 + \mathbf{C}\,(-\mathbf{v}) \\ s_h & = -f_{h0} - \mathbf{f}_h^*(-\mathbf{v}) \end{array} \Bigg\| \quad \eta \equiv \begin{bmatrix} u_0^{(p)} \\ \mathbf{y} \\ s_h \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} c_{00} & \mathbf{c}^0 \\ \mathbf{c}_0 & \mathbf{C} \\ -f_{h0} & -\mathbf{f}_h^* \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ -\mathbf{v} \end{bmatrix} \equiv \Gamma(-\mathfrak{v}) \tag{25}$$

$$u_0^{(p)} = \text{Max!}$$

$$(\mathbf{v}, \mathbf{y}, \mathbf{c}_0\mathbf{f}_h, \geqq \mathbf{0}, \quad \mathbf{c}^0 \geqq \mathbf{0}^*, \quad \mathbf{C} \geqq \mathbf{O}, \quad f_{h0} \geqq 0, \quad 0 \leqq s_h = \text{int}).$$

---

* L. az irodalomjegyzéket!

A $\mathbf{c}^0 \geqq \mathbf{0}^*$ körülményre való tekintettel célszerűbb ehelyett a

$$\begin{aligned} v_0 &= -c_{00} + \mathbf{y}^*\mathbf{c}_0 + s_h(-f_{h0}) \\ \mathbf{v}^* &= -\mathbf{c}^0 + \mathbf{y}^*\mathbf{C} + s_h(-\mathbf{f}_h^*) \end{aligned} \quad \Bigg\| \quad \begin{aligned} [v_0, \mathbf{v}^*] &= [-1, \mathbf{y}^*, s_h] \begin{bmatrix} c_{00} & \mathbf{c}^0 \\ \mathbf{c}_0 & \mathbf{C} \\ -f_{h0} & -\mathbf{f}_h^* \end{bmatrix} \equiv \\ &\equiv \text{'}\mathfrak{v}^* = \text{'}\eta^*\Gamma \end{aligned}$$

$$v_0 = \text{Min!} \tag{26}$$

kombinált duál minimumfeladatot tárgyalni (ti. ez a $-\mathbf{c}^0 \leqq \mathbf{0}^*$ tény miatt normálfeladat, amaz pedig $-f_{h0} \leqq 0$ miatt nem olyan).

A DSM csupán a *generáló elem* választásában tér el a PSA-től; ezt ugyanis a DSM-ben

$$\gamma_{n+1,0} \equiv f_{h0} < 0, \qquad \gamma_{n+1,l} \equiv -f_{hl} < 0, \qquad \text{Min}\, \frac{\gamma_{n+1,0}}{\gamma_{n+1,}^{(-)}} = \frac{f_{h0}}{f_{hl}} \tag{27}$$

módon eszközöljük. A $\gamma_{n+1,l} \equiv -f_h$ generáló elemmel kapcsolatos *szimplex lépést* a szerzőtől származó [47, 73]

$$\boxed{\Gamma_1 = \Gamma - \frac{1}{\gamma_{n+1,l}}(\gamma_l - \mathbf{e}_{n+1})(\gamma^{n+1} + \mathbf{e}^l) =}$$

$$= \begin{bmatrix} c_{00} & \mathbf{c}^0 \\ \mathbf{c}_0 & \mathbf{C} \\ -f_{h0} & -\mathbf{f}_h^* \end{bmatrix} + \frac{1}{f_{hl}} \begin{bmatrix} c_{0l} & -0 \\ \mathbf{c}_l & -\mathbf{0} \\ -f_{hl} & -1 \end{bmatrix} [-f_{h0}, -\mathbf{f}_h^* + \mathbf{e}^l] \tag{28}$$

formulával (SiMA_1) tehetjük meg. Az így nyert Γ_1 matrix egyes elemei, pl. γ_0' vektorei már egészek lehetnek. Ezzel az első DSM-lépés elintézettnek tekinthető.

2'. Ezután következik az eljárást befejező integer duál algoritmus, vagyis az IDA-szakasz. Ennek során a Γ_1 alapján újabb

$$s_{h_1}' = -f_{h_1 0}' - f_{h_1 j}'(-v_j') \quad \left(\text{Min}\,\frac{f_{i0}'}{f_{il}'} = \frac{f_{h_1 0}}{f_{h_1 l}}\right) \tag{29}$$

kényszerfeltételt állapítunk meg (ez a második IFM-lépés), majd az $\eta' = \Gamma_1(-\mathfrak{v})$ egyenletet vele kiegészítve, a

$$\Gamma_2 = \begin{bmatrix} \Gamma_1 \\ -\mathbf{f}_{h_1}'^* \end{bmatrix} - \frac{1}{f_{h_1 l_1}'} \begin{bmatrix} \gamma_{l_1}' & -\mathbf{0} \\ -f_{h_1 l_1}' & -1 \end{bmatrix} [-\mathbf{f}_{h_1}'^* + \mathbf{e}^{l_1}] \quad \left(\text{Max}\,\frac{\gamma_{n+2,0}'}{\gamma_{n+2,j}'^{(-)}} = \frac{f_{h_1 0}'}{f_{h_1 l_1}'}\right) \tag{30}$$

formulánkkal (SiMA_2)szimplex lépést eszközlünk (ez a második DSM-lépés). Az így nyert Γ_2 matrixnak a Γ_1-énél több (esetleg valamennyi) eleme egész.

Az efféle kettős (IFM- és DSM-) lépéseket mindaddig *ismételjük*, amíg a Γ_ν eredménymatrix teljes integritása s ezen belül a ($\mathbf{v}^{(\nu)} = \mathbf{0}$-nál jelentkező) $\mathbf{y}^{(\nu)} =$

$= \gamma_0^{(\nu)}$ *optimális megoldás integritása* be nem következik. (Megjegyzendő, hogy az utóbbi rendszerint már előbb megvalósul.) Ezzel az IDA-szakasz és vele együtt a l. int. prs-i normálfeladatunk megoldása teljes befejezést nyert.

3'. Hangsúlyozni kívánjuk végül, hogy a fentiekben csupán a l. int. prs-i normálfeladat egyik megoldási módszerét vázoltuk, és további elméleti, geometriai, gyakorlati vonatkozásai, de méginkább egyéb módszerek, sőt speciális feladatok tekintetében a gyorsan gyarapodó szakirodalmat kell az olvasó figyelmébe ajánlanunk.

1. Pl. Oldjuk meg az előzőkben ismertetett módszerrel a következő *l. int. prs-i feladatot:*

$$0 \leqq x_i = \text{Int!}, \qquad u_0 = \text{Max!}$$

$$\left.\begin{aligned} 4x_1 + 5x_2 + x_3 &= u_0 \\ 3x_1 + 2x_2 \qquad &\leqq 10 \\ x_1 + 2x_2 \qquad &\leqq 11 \\ 3x_1 + 3x_2 + x_3 &\leqq 13 \end{aligned}\right\}.$$

— Először is írjuk át az adott feladatot eredeti alakjáról és skaláris írásmódjáról az u_1, u_2, u_3 duál változókkal *bővített alakjára és hipermatrixos írásmódjára* eképpen:

$$\mathbf{0} \leqq \mathbf{x} = \text{Int!}, \qquad \mathbf{0} \leqq \mathbf{u} = \text{Int!}, \qquad u_0 = \text{Max!}$$

$$\mathfrak{u} \equiv \begin{bmatrix} u_0 \\ \mathbf{u} \end{bmatrix} \equiv \begin{bmatrix} u_0 \\ u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{bmatrix} = \left[\begin{array}{c|ccc} 0 & -4 & -5 & -1 \\ \hline 10 & 3 & 2 & 0 \\ 11 & 1 & 4 & 0 \\ 13 & 3 & 3 & 1 \end{array}\right] \left[\begin{array}{c} 1 \\ \hline -x_1 \\ -x_2 \\ -x_3 \end{array}\right] \equiv \begin{bmatrix} a_{00} & \mathbf{a}^0 \\ \mathbf{a}_0 & \mathbf{A} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ -\mathbf{x} \end{bmatrix} \equiv \mathfrak{A}(-\mathfrak{x}).$$

Láthatóan normálfeladatról van szó, lévén $\mathbf{a}_0^* = [10, 11, 13] > \mathbf{0}$.

A PSA-szakaszra térve, a primál és duál változók $x_i \leftrightarrow u_i$ $(i = 1, 2, 3)$ csoportos cseréje megvalósítható, mert

$$|\mathbf{A}| = \det(\mathbf{A}) = a_{11}a'_{22}a''_{33} = \begin{vmatrix} 3 & 2 & 0 \\ 1 & 4 & 0 \\ 3 & 3 & 1 \end{vmatrix} = 10 \qquad (\neq 0, > 0)$$

és ez bizonyára a primál optimális programot adja, minthogy

$$-\mathbf{a}^{0'''} = -\mathbf{a}^0\mathbf{A}^{-1} = \frac{1}{10}[4, \quad 5, \quad 1] \begin{bmatrix} 4 & -2 & 0 \\ -1 & 3 & 0 \\ -9 & -3 & 10 \end{bmatrix} = \frac{1}{10}[2, \quad 4, \quad 10] > \mathbf{0}.$$

Az $\mathfrak{A}_3$ hipermatrixot — többször idézett szimplex matrixformulánkkal (SMF) — így számítjuk ki:

$$\mathfrak{A}_3 = \mathfrak{A}_0 - \begin{bmatrix} \mathbf{a}^0 & -\mathbf{0}^* \\ \mathbf{A} & -\mathbf{E} \end{bmatrix} \cdot \mathbf{A}^{-1} \cdot [\mathbf{a}_0 + \mathbf{0},\ \mathbf{A} + \mathbf{E}] =$$

$$= \left[\begin{array}{c|ccc} 0 & -4 & -5 & -1 \\ \hline 10 & 2 & 2 & 0 \\ 11 & 1 & 4 & 0 \\ 13 & 3 & 3 & 0 \end{array}\right] - \begin{bmatrix} -4 & -5 & -1 \\ \hline 2 & 2 & 0 \\ 1 & 3 & 0 \\ 3 & 3 & 0 \end{bmatrix} \cdot \frac{1}{10} \begin{bmatrix} 4 & -2 & 0 \\ -1 & 3 & 0 \\ -9 & -3 & 10 \end{bmatrix} \cdot$$

$$\cdot \left[\begin{array}{c|ccc} 10 & 4 & 2 & 0 \\ 11 & 1 & 5 & 0 \\ 13 & 3 & 3 & 2 \end{array}\right] = \left[\begin{array}{c|ccc} 19{,}4 & 0{,}2 & 0{,}4 & 1 \\ \hline 1{,}8 & 0{,}4 & -0{,}2 & 0 \\ 2{,}3 & 0{,}1 & 0{,}3 & 0 \\ 0{,}7 & -0{,}9 & -0{,}3 & 1 \end{array}\right].$$

[Láthatóan $\mathbf{A}_3 = \mathbf{A} - (\mathbf{A} - \mathbf{E})\,\mathbf{A}^{-1}\,(\mathbf{A} + \mathbf{E}) = \mathbf{A}^{-1}$.] A primál optimális program és értéke tehát (az $\mathfrak{y} \equiv \begin{bmatrix} u_0''' \\ \mathbf{x}''' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{00}''' & \mathbf{a}^{0'''} \\ \mathbf{a}_0''' & \mathbf{A}''' \end{bmatrix} \begin{bmatrix} +1 \\ -u \end{bmatrix} \equiv \mathfrak{A}_3(-\mathfrak{v})$ egyenletből, $\mathbf{u}''' = \mathbf{0}$-nál) a következő:

$$\mathbf{x}'''^* = \mathbf{a}_0'''^* = [1{,}8 \quad 2{,}3 \quad 0{,}7], \quad \mathbf{u}'''^* = [0 \quad 0 \quad 0] = \mathbf{0}^*, \quad u_0''' = a_{00}''' = 19{,}4.$$

$\mathfrak{A}_3$ matrix és benne az $\mathbf{a}_0'''$ vektor elemei — mint látjuk — (jórészt) törtszámok.

Az első SiMA-lépés előkészítésére állítsuk elő az $\mathfrak{A}_3 \equiv \mathfrak{C}$ matrixot $\mathfrak{K}$ egész rész és $\mathfrak{F}$ pozitív valódi tört rész összegeként, eképpen:

$$\mathfrak{C} = \mathfrak{K} + \mathfrak{F} = \left[\begin{array}{c|ccc} 19 & 0 & 0 & 1 \\ \hline 1 & 0 & -1 & 0 \\ 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & -1 & 1 \end{array}\right] + \left[\begin{array}{c|ccc} 0{,}4 & 0{,}2 & 0{,}4 & 0 \\ \hline 0{,}8 & 0{,}4 & 0{,}8 & 0 \\ 0{,}3 & 0{,}1 & 0{,}3 & 0 \\ 0{,}7 & 0{,}1 & 0{,}7 & 0 \end{array}\right].$$

Az első kényszerfeltétel felírására az $i = 3$ indexű sort vesszük alapul, lévén

$$\operatorname{Max} \frac{f_{i0}}{f_{ij}} = \frac{f_{30}}{f_{31}} = \frac{0{,}7}{0{,}1} = 7 \quad (f_{ij} \neq 0);$$

ily módon írható, hogy

$$s_3 = -0{,}7 - 0{,}1(-v_1) - 0{,}7(-v_2).$$

Az első DSM-lépés soron e kényszerfeltétellel kiegészítjük az $\mathfrak{y} = \mathfrak{C}(-\mathfrak{v})$ primál egyenletet, így:

$$\eta \equiv \begin{bmatrix} u_0''' \\ \hline x_1''' \\ x_2''' \\ x_3''' \\ s_3 \end{bmatrix} = \left[\begin{array}{r|rrr} 19,4 & 0,2 & 0,4 & 1 \\ \hline 1,8 & 0,4 & -0,2 & 0 \\ 2,3 & 0,1 & 0,3 & 0 \\ 0,7 & -0,9 & -0,3 & 1 \\ -0,7 & -0,1 & -0,7 & 0 \end{array}\right] \begin{bmatrix} 1 \\ \hline -u_1''' \\ -u_2''' \\ -u_3''' \end{bmatrix} \equiv \Gamma(-)\mathfrak{v}.$$

Ezután a $'\mathfrak{v}^* = '\eta^*\Gamma$ duál-egyenlet részére elvégezzük a

$$\gamma_{40} = -0,7 < 0, \qquad \gamma_{42} = -0,7 < 0, \qquad \text{Min}\left(\frac{\gamma_{40}}{\gamma_{4j}^{(-)}}\right) = \frac{\gamma_{40}}{\gamma_{42}} = \frac{0,7}{0,7} = 1$$

módon választott $\gamma_{42} = -0,7$ generáló elemnek megfelelő alábbi szimplex lépést (SiMA$_1$):

$$\Gamma_1 = \Gamma - \frac{1}{\gamma_{42}}(\gamma_2 - \mathfrak{e}_4)(\gamma^4 + \mathfrak{e}^2) =$$

$$= \left[\begin{array}{r|rrr} 19,4 & 0,2 & 0,4 & 1 \\ \hline 1,8 & 0,4 & -0,2 & 0 \\ 2,3 & 0,1 & 0,3 & 0 \\ 0,7 & 0,1 & -0,3 & 1 \\ \hline -0,7 & -0,1 & -0,7 & 0 \end{array}\right] + \frac{1}{0,7} \begin{bmatrix} 0,4 \\ \hline -0,2 \\ 0,3 \\ -0,3 \\ \hline -1,7 \end{bmatrix} [-0,7 \mid -0,1 \quad 0,3 \quad 0] =$$

$$= \left[\begin{array}{r|rrr} 19 & \frac{1}{7} & \frac{4}{7} & 1 \\ \hline 2 & \frac{3}{7} & -\frac{2}{7} & 0 \\ 2 & -\frac{1}{7} & \frac{3}{7} & 0 \\ 1 & -\frac{6}{7} & -\frac{3}{7} & 1 \\ \hline 1 & \frac{1}{7} & -\frac{10}{7} & 0 \end{array}\right].$$

Látható, hogy az $\eta' = \gamma_0'$ optimum elemei már egész számok.

Az IDA-szakasz egy kettős lépésével esetünkben a Γ_1 matrix összes elemei egésszé tehetők. Minthogy $f_{i0} = 0$ (lévén $k_{i0} =$ int), ezért a Γ_1 bármelyik sora, pl. az $\iota = 0$ indexű sora alapján is írhatunk fel egy kényszerfeltételt, nevezetesen

$$s_0' = 0 - \frac{1}{7}(-x_1^{(4)}) - \frac{4}{7}(-s_3').$$

A generáló elemet $\gamma_{51}' \equiv -f_{01}' = -\frac{1}{7}$ módon választva, a megfelelő s egyben utolsó szimplex lépés (SiMA_2) így alakul:

$$\Gamma_2 = \Gamma_1 - \frac{1}{\gamma_{51}'}(\gamma_1' + e_5)(\gamma'^5 + e^1) =$$

$$= \begin{bmatrix} 19 & \frac{1}{7} & \frac{4}{7} & 1 \\ 2 & \frac{3}{7} & -\frac{2}{7} & 0 \\ 2 & -\frac{1}{7} & \frac{3}{7} & 0 \\ 1 & -\frac{6}{7} & -\frac{3}{7} & 1 \\ 1 & \frac{1}{7} & -\frac{10}{7} & 0 \\ 0 & -\frac{1}{7} & -\frac{4}{7} & 0 \end{bmatrix} + 7 \begin{bmatrix} \frac{1}{7} \\ \frac{3}{7} \\ -\frac{1}{7} \\ -\frac{6}{7} \\ \frac{1}{7} \\ -\frac{8}{7} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & \frac{6}{7} & -\frac{4}{7} & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 19 & 1 & 0 & 1 \\ 2 & 3 & 2 & 0 \\ 2 & -1 & -1 & 0 \\ 2 & -6 & -3 & 1 \\ 1 & 1 & -2 & 0 \\ 0 & -7 & 4 & 0 \end{bmatrix}.$$

Ezek után *az utolsó alapegyenlet* — az összes változócserék figyelembevételével — eképpen írható fel:

$$\eta'' \equiv \begin{bmatrix} u_0^{(5)} \\ x_1^{(5)} \\ x_2^{(5)} \\ x_3^{(5)} \\ u_2^{(5)} \\ u_1^{(5)} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 19 & 1 & 0 & 1 \\ 2 & 3 & 2 & 0 \\ 2 & -1 & -1 & 0 \\ 1 & -6 & 3 & 1 \\ 1 & 1 & -2 & 0 \\ 0 & -7 & 4 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ -s_0' \\ -s_3'' \\ -u_3^{(5)} \end{bmatrix} \equiv \Gamma_2(-\mathfrak{v}'').$$

Ebből közvetlenül kiolvasható *l. int. prs-i maximumfeladatunk optimális programja és értéke* (mégpedig $\mathbf{v}''^* = [s_0', s_3'', u_3^{(5)}] = \mathbf{0}^*$-nál) a következőképpen:

$$\mathbf{x}_{opt} = [x_1^{(5)}, x_2^{(5)}, x_3^{(5)}], = [\gamma_{10}'', \gamma_{20}'', \gamma_{30}''] = [2, \quad 2, \quad 1],$$

$$\mathbf{u}_{opt} = [u_1^{(5)}, u_2^{(5)}, u_3^{(5)}] = [\gamma_{50}'', \gamma_{40}'', 0] = [0, \quad 1, \quad 0],$$

$$u_{0\,opt} = u_0^{(5)} = \gamma_{00}'' = 19.$$

Ellenőrzés a kiindulási alapegyenletek alapján:

$$\left.\begin{aligned} 19 &= 0 - 4(-2) - 5(-2) - 1(-1) \\ 0 &= 10 + 3(-2) + 2(-2) + 0(-1) \\ 1 &= 11 + 1(-2) + 4(-2) + 0(-1) \\ 0 &= 13 + 3(-2) + 3(-2) + 1(-1) \end{aligned}\right\}.$$

Ezzel feladatunkat teljes egészében megoldottuk.

3. §. A NEMLINEÁRIS PROGRAMOZÁS ALAPJAI, EGYES PROBLÉMÁI ÉS VEKTOR-MATRIXALGORITMIKUS MÓDSZEREI (NP—VMAM)

a) A konvex programozás bevezetése

α) Segédeszközök a lineáris analízisből

I°. Függvény és deriváltja az E_n térben. *1'.* Tekintsük a rendezett valós szám-n-eseknek az előzőkből már ismert

$$E \equiv E_n = \{\mathbf{x}\} = \{(x_1, x_2, \ldots, x_n)\} \qquad (x_i \in K_v) \tag{1a}$$

n dimenziós (valós) *euklideszi terét.* Mint tudjuk, e térben az összeadás, a (valós) számmal való szorzás és skaláris szorzás *műveleteit*

$$\mathbf{x} + \mathbf{y} = (x_i + y_i), \qquad \alpha\mathbf{x} = (\alpha x_i), \qquad \mathbf{x}^*\mathbf{y} = \sum_{i=1}^{n} x_i y_i \tag{1b}$$

módon értelmezzük, ismert *axiómák* teljesülése mellett. Az x_i-k az $\mathbf{x}$ vektornak (pontnak) az $\mathbf{e}_k = (\delta_{ik})$ ($\mathbf{e}_k^*\mathbf{e}_l = \delta_{kl}$; $i, k, l = 1, 2, \ldots, n$) ortonormált bázisra vonatkozó *koordinátái.*

Az összes $\mathbf{x} \in E$ vektorokból és egy $\mathbf{a} \in E$ vektorból a $\boldsymbol{\xi} = \mathbf{x} - \mathbf{a}$ eltolási transzformációval képzett $\mathbf{y}$ vektorok halmaza — az említett műveletekkel és axiómákkal ellátva — *a paralel-eltolt,* $\mathbf{a} = (a_i)$ *origójú euklideszi teret* eredményezi, amely

$$E_a = \{\boldsymbol{\xi}\} = \{(\xi)\} = \{(x_i - a_i)\} \tag{2}$$

módon jelölhető. (Az eredeti E nyilván az $\mathbf{0} = (0)$ origójú teret jelenti.) Az E_a eltolt térben előnyös vizsgálni a $\mathbf{c}_\varrho = \mathbf{b}_\varrho - \mathbf{a}$ ($\varrho = 1, 2, \ldots, r$) vektorok lineáris kombinációjaként, vagyis $\sum_\varrho \alpha_\varrho \mathbf{c}_\varrho$ módon származtatott hiperegyeneseket, hipersíkokat, altereket; ezeket közös néven *lineáris sokaságoknak* nevezzük.

2'. Vegyük most az n-dimenziós $E \equiv E_n$ tér valamely X *tartományát,* valamint az m-dimenziós $F \equiv E_m$ tér egy Y tartományát. (Tartományon — tudvalevőleg — a tér egy összefüggő [zárt] ponthalmazát értjük.) Ezekkel kapcsolatban tekintsük az

$$\mathbf{y} = \mathbf{y}(\mathbf{x}) \quad (\mathbf{x} \in X \subset E, \quad \mathbf{y} \in Y \subset F) \tag{3}$$

függvényt, ill. geometriai értelemben *leképezést,* mint olyan utasítást, amely minden $\mathbf{x} \in X$ vektorhoz meghatározott $\mathbf{y} \in Y$ vektort rendel hozzá. A (3)-at az X-ben értelmezett és Y-beli értékekkel rendelkező függvénynek is szoktuk mon-

dani. Rendszerint megköveteljük, hogy a (3) *kölcsönösen egyértelmű*, másként egy-egy értékű legyen, amely esetben

$$\mathbf{y}(\mathbf{x}_1) \neq \mathbf{y}(\mathbf{x}_2), \quad \text{ha} \quad \mathbf{x}_1 \neq \mathbf{x}_2. \tag{4}$$

1. Pl. Nézzünk egy-két gyakran használatos függvénytípust! Ilyenek pl. az Y-beli vektorértékekkel rendelkező

$$\mathbf{y} = \mathbf{y}(x_1), \quad \mathbf{y} = \mathbf{y}(x_1, x_2), \ldots, \quad \mathbf{y} = \mathbf{y}(x_1, x_2, \ldots, x_n) \tag{5a}$$

$$(\mathbf{x} \in X_1 \subset E_1, \quad \mathbf{x} \in X_2 \subset E_2, \ldots; \quad \mathbf{x} \in X_n \subset E_n; \quad \mathbf{y} \in Y \subset E_m \equiv F, \quad m \geqq n)$$

függvények és $\mathbf{y}^*\mathbf{e}_j$ $(j = 1, 2, \ldots, m)$ módon nyerhető, skalárértékű

$$y_j = y_j(x_1), \quad y_j = y_j(x_1, x_2), \ldots, \quad y_j = y_j(x_1, x_2, \ldots, x_n) \tag{5b}$$

koordináta-függvényeik.

3'. Tekintsük ezután az eltolt $\mathring{E}_\mathbf{x}$ térben az $\mathbf{x}$ pontból kiinduló mindazon $d\mathbf{x}$ vektorokat, amelyekkel $\mathbf{x} + d\mathbf{x} \in X$! A (3) függvényt az $\mathbf{x}$ *helyen folytonosnak* mondjuk, ha

$$\lim_{d\mathbf{x}\to\mathbf{0}} y(\mathbf{x} + d\mathbf{x}) = \mathbf{y}(\mathbf{x}), \quad \text{azaz} \quad \lim_{d\mathbf{x}\to\mathbf{0}} y(\mathbf{x} + d\mathbf{x}) - \mathbf{y}(\mathbf{x}) = \lim_{d\mathbf{x}\to\mathbf{0}} \Delta\mathbf{y} = \mathbf{0}. \tag{6}$$

Ha ez minden $\mathbf{x} \in X$ pontban igaz, akkor *az X tartományban folytonos* függvényről beszélünk.

Később — az $y = y(\mathbf{x})$ skalár-vektor függvény vizsgálata során — mind az X tartománnyal, mind az $y(\mathbf{x})$ folytonos függvénnyel szemben *újabb követelményt* támasztunk majd (az ún. konvexitást).

2. Pl. Az (5*a*) alatti függvények — az X-beli folytonosság esetén — rendre az $Y \subset F \equiv E_m$ tartománybeli hipergörbét, hiperfelületet, ..., görbült térrészt határoznak meg. Pl. $Y \subset E_3$ esetén

$$\mathbf{y} = \mathbf{i}\cos x_1 + \mathbf{j}\sin x_1 + \mathbf{k}x_1; \quad \mathbf{y} = \mathbf{i}x_2 \cos x_1 + \mathbf{j}x_2 \sin x_1 + \mathbf{k}x_1;$$

(csavarvonal) (csavarfelület)

$$\mathbf{y} = \mathbf{i}x_2 \cos x_1 + \mathbf{j}x_2 \sin x_1 + \mathbf{k}x_1x_3. \tag{7}$$

(csavarfelület-sereges tér)

4'. A fenti előkészületek után rátérhetünk a differenciálhatóság kérdésére. Az $\mathbf{y} = \mathbf{y}(\mathbf{x})$ függvényt *az* $\mathbf{x} \in X$ *helyen differenciálhatónak* mondjuk, ha az $(\mathbf{x}, \mathbf{x} + d\mathbf{x}) \subset X$ szakasz menti $\Delta\mathbf{y}$ növekménye előállítható egy differenciál nevű, $d\mathbf{x}$-ben lineáris $d\mathbf{y}$ főrész és egy $d\mathbf{x}$-nél magasabb rendűen elenyésző rész összegeként, vagyis a

$$\Delta\mathbf{y}(\mathbf{x}, d\mathbf{x}) = d\mathbf{y}(\mathbf{x}, d\mathbf{x}) + \varepsilon(\mathbf{x}, d\mathbf{x}) \tag{8a}$$

$$\left[d\mathbf{y}\,(\mathbf{x}, \sum_k \alpha_k d\mathbf{x}_k) = \sum_k \alpha_k d\mathbf{y}\,(\mathbf{x}, d\mathbf{x}_k), \quad \lim_{d\mathbf{x}\to\mathbf{0}} \frac{\varepsilon(\mathbf{x}, d\mathbf{x})}{|d\mathbf{x}|} = \mathbf{0}\right]$$

alakban, a $\mathbf{Y}(\mathbf{x})$ deriváltmatrix és az $\mathbf{E}(\mathbf{x}, d\mathbf{x})$ elenyésző matrix igénybevételével pedig az

$$\mathbf{y}(\mathbf{x}, d\mathbf{x}) = \mathbf{Y}(\mathbf{x})d\mathbf{x} + \mathbf{E}(\mathbf{x}, d\mathbf{x})d\mathbf{x} \tag{8b}$$

$$\left[\mathbf{Y}(\mathbf{x}) \cdot \sum_k \alpha_k d\mathbf{x}_k = \sum_k \alpha_k \mathbf{Y}(\mathbf{x}) d\mathbf{x}_k, \quad \lim_{d\mathbf{x}\to 0} \mathbf{E}(\mathbf{x}, d\mathbf{x}) = \mathbf{0}\right]$$

alakban. Ilyen előállítás létezése esetén ugyancsak létezik a rövidebb jelölésekkel

$$\lim_{d\mathbf{x}\to 0} \frac{\Delta\mathbf{y}}{|d\mathbf{x}|} = \lim_{d\mathbf{x}\to 0}\left[\mathbf{Y}\frac{d\mathbf{x}}{|d\mathbf{x}|} + \mathbf{E}\frac{d\mathbf{x}}{d\mathbf{x}}\right] = \mathbf{Y}\frac{d\mathbf{x}}{|d\mathbf{x}|} = \mathbf{Y}\mathbf{e} \tag{8c}$$

alakot öltő **e**-*irány menti derivált*. Megjegyzendő, hogy itt $|d\mathbf{x}|$ a $d\mathbf{x}$ vektor normájának pozitív négyzetgyökét, **e** pedig a $d\mathbf{x}$ normált (egység-) vektorát jelenti, azaz

$$|d\mathbf{x}| = +\sqrt{N(d\mathbf{x})} = +\sqrt{d\mathbf{x}^2}, \qquad d\mathbf{x} = \mathbf{e}\cdot|d\mathbf{x}|.$$

Ugyancsak említésre méltó, hogy a $d\mathbf{x}$, ill. $d\mathbf{y}$ az E_x ill. F_y eltolt terekben vizsgálható, vagyis

$$d\mathbf{x} \in E_x \quad (\mathbf{x} + d\mathbf{x} \in X), \qquad d\mathbf{y} \in F_y \quad (\mathbf{y} + d\mathbf{y} \in Y).$$

Nyilvánvaló végül, hogy az **x** helyi differenciálhatóság magában foglalja az ottani folytonosságot, hiszen pl. (8b) értelmében

$$\lim_{d\mathbf{x}\to 0} \Delta\mathbf{y} \equiv \lim_{d\mathbf{x}\to 0}[\mathbf{y}(\mathbf{x}+d\mathbf{x}) - \mathbf{y}(\mathbf{x})] = \lim_{d\mathbf{x}\to 0}(\mathbf{Y}\,d\mathbf{x} + \mathbf{E}\,d\mathbf{x}) = \mathbf{0}. \tag{8d}$$

Ha a helyi differenciálhatóság minden $\mathbf{x} \in X$-re teljesül, tehát a $d\mathbf{y}(\mathbf{x}, d\mathbf{x}) = \mathbf{Y}(\mathbf{x})d\mathbf{x}$ differenciál minden $\mathbf{x} \in X$-nél létezik és folytonos, akkor *az X tartományban folytonosan differenciálható* függvényről beszélünk.

Rendszerint megköveteljük, hogy *α)* az $\mathbf{y} = \mathbf{y}(\mathbf{x})$ függvénnyel együtt *β)* az $\mathbf{Y}(\mathbf{x}) \equiv \mathbf{y}'(\mathbf{x})$ derivált is folytonos és kölcsönösen egyértelmű legyen, sőt olykor *γ)* az $\mathfrak{Y}(\mathbf{x}) \equiv \mathbf{y}''(\mathbf{x})$ második deriválttal szemben is hasonló igényt támasztunk; az *α—β)* teljesülése esetén az $\mathbf{y}(\mathbf{x})$-ről, mint *első fajú* (a H_1 osztályba tartozó), az *α—γ)* fennállása esetén pedig *másod fajú* (a H_2-be tartozó) *leképezésről* beszélünk.

3. Pl. Legyen pl. $n = 2$, $m = 3$, vagyis beszéljünk az $\mathbf{y} = \mathbf{y}(\mathbf{x})$, $\mathbf{x} = (x_1, x_2) \in E_2$, $\mathbf{y} = (y_1, y_2, y_3) = F_3$ folytonos függvényről, mely — tudvalevőleg — az F_3 térbe beágyazott felületet határoz meg. (Ugyanezt a függvényt közönségesen $\mathbf{r} = \mathbf{r}(u, v)$ betűkkel szoktuk jelölni.) E függvény differenciálható, ha növekménye előállítható

$$\Delta\mathbf{y} = \underbrace{[\mathbf{y}'_{x_1}(\mathbf{x}), \mathbf{y}'_{x_2}(\mathbf{x})]}_{\mathbf{Y}(\mathbf{x})} \cdot d\mathbf{x} + \underbrace{[\varepsilon_1(\mathbf{x}, d\mathbf{x}), \varepsilon_2(\mathbf{x}, d\mathbf{x})]}_{\mathbf{E}(\mathbf{x}, d\mathbf{x})} \cdot d\mathbf{x} \tag{9}$$

alakban, ahol

$$d\mathbf{y} = \mathbf{Y}\,d\mathbf{x} = \mathbf{y}'_{x_1}dx_1 + \mathbf{y}'_{x_2}dx_2 \quad \text{és} \quad \lim_{d\mathbf{x}\to 0}\mathbf{E}(\mathbf{x}, d\mathbf{x}) = \mathbf{0}. \tag{10}$$

Ilyenkor a $d\mathbf{x}_1 = (dx_1, 0)$, ill. a $d\mathbf{x}_2 = (0, dx_2)$ részleges változásnál a

$$\lim_{dx_1 \to 0} \frac{\Delta \mathbf{y}}{dx_1} = \lim_{dx_1 \to 0} (\mathbf{y}'_{x_1} + \boldsymbol{\varepsilon}_1) = \mathbf{y}'_{x_1} \equiv \frac{\partial \mathbf{y}}{\partial x_1},$$

$$\lim \frac{\Delta \mathbf{y}}{dx_2} = \lim (\mathbf{y}'_{x_2} + \boldsymbol{\varepsilon}_2) = \mathbf{y}'_{x_2} \equiv \frac{\partial \mathbf{y}}{\partial x_2} \tag{11}$$

parciális deriváltvektorok adódnak, melyek az eltolt $F_{3,\mathbf{y}}$ térben szemléltethetők, s egyébként geometriailag az $\mathbf{y}(x_1, c)$, ill. $\mathbf{y}(c, x_2)$ felületi paramétervonalak ottani érintővektorait szolgáltatják.

II°. Differenciálható skalárfüggvény E_n-ben. *1'.* A *skalár-vektor* függvények fizikai-műszaki és gazdasági vonatkozásaik miatt önmagukban is fontosak, de úgy is, mint a hasonló vonatkozásban érdekes, (5*a*) alakú *vektor-vektor* függvények koordináta-függvényei. Érdemes ezért a fentieket külön e függvénytípusra konkretizálni és specialitásokkal kiegészíteni.

Rátérve a függvény értelmezésére, az E_n térbeli skalár *függvény* olyan utasítás, amely a tér egy X tartományának minden $\mathbf{x}$ vektorához (pontjához) meghatározott y skalárt rendel hozzá; jelekkel:

$$y = y(\mathbf{x}) \quad (\mathbf{x} \in X \subset E_n, y \in Y \subset E_1). \tag{12}$$

Megköveteljük, hogy a függvény egyértékű legyen, vagyis minden $\mathbf{x} \in X$ ponthoz csak egy-egy y skalár tartozzék. Az $\mathbf{x} = (x_i)$ egyébként az $\mathbf{0}(0) \in E_n$ origóból kiinduló vektorokat jelent, az x_i, ill. 0 koordináták pedig az E_n tér $\mathbf{e}_k = (\delta_{ik})$ ($\mathbf{e}_k^*\mathbf{e}_l = \delta_{kl}$; $i, k, l = 1, 2, \ldots, n$) ortonormált bázisára vonatkoznak. A (12) függvény mint *leképzés*, az $X \subset E_n$ értelmezési tartományt az E_1 számegyenes Y szakaszába viszi át.

2'. A (12) függvényt úgy is felfoghatjuk, mint amely X értelmezési tartományában ún. *skalármezőt* létesít, értve ezen az $y(\mathbf{x})$ skalárokkal ellátott $\mathbf{x} \in X$ pontok halmazát. Az alkalmazásokban számos skalármező fordul elő, pl. — a szokásos elnevezésekkel élve — a nyomástér, a hőfoktér, a potenciáltér (3 helyzetkoordináta függvényében, az E_3-ban), a hozamtér, a költségtér (n gyártási mutató függvényében, az E_n térben) stb.

A skalármező igen szemléletessé tehető az egyenlő skalárú pontok geometriai helyeként jelentkező ún. *hiper-szintfelületek* (vagy hiper-nívófelületek) megállapításával; egyenletük nyilván

$$y(\mathbf{x}) = y(x_1, x_2, \ldots, x_n) = \text{const.} \quad (\mathbf{x} \in X). \tag{13}$$

Az előbb említett szintfelületeket rendre izobár, izoterma, ekvipotenciális felület, ill. hozam- és költség-szintfelületek néven szokták emlegetni.

Minőségi vizsgálatoknál az $y = y(\mathbf{x})$ függvény szemléltetésének egy másik módja is szokásos. Nevezetesen, az $E_n = \{\mathbf{x}\} = \left\{\sum_{i=1}^{n} x_i \mathbf{e}_i\right\}$ teret — egy újabb $\mathbf{e}_{n+1} \perp E_n$ bázisvektor bevezetésével — az

$$E_{n+1} = \{\mathfrak{x}\} = \left\{\sum_{i=1}^{n} x_i \mathbf{e}_i + y\mathbf{e}_{n+1}\right\}$$

térré bővítjük, s ezt az $E_2 = \{(x, y)\}$, vagy az $E_3 = \{(x, \xi, y)\}$ térhez hasonlóan próbáljuk tekinteni és jellegileg szemléltetni (az E_n teret ily módon az x tengelynek, ill. az $[x, \xi]$ síknak feleltetve meg)*. Pl. a konvexitás tanulmányozásánál hasznos lesz ez a felfogás.

1. Pl. Ismertessünk néhány skalár-vektor függvényt és állapítsuk meg a megfelelő skalármező szintfelületeit! — Legyenek a függvények

$$a)\ y = \mathbf{a}^*\mathbf{x}, \quad b)\ y = \mathbf{x}^*\mathbf{x} \equiv \mathbf{x}^2, \quad c)\ y = \mathbf{x}^*\mathbf{C}\mathbf{x} \quad (\mathbf{x} \in X \subset E_n). \quad (14a, b, c)$$

ad *a)* Ez az E_n térbeli, skalárértékű, lineáris függvény, más néven *lineáris forma*. A linearitás az összeg- és aránytartásban nyilvánul meg, nevezetesen

$$y(c_1\mathbf{x}_1 + c_2\mathbf{x}_2) \equiv \mathbf{a}^*(c_1\mathbf{x}_1 + c_2\mathbf{x}_2) = c_1\mathbf{a}^*\mathbf{x}_1 + c_2\mathbf{a}^*\mathbf{x}_2 \equiv c_1 y(\mathbf{x}_1) + c_2 y(\mathbf{x}_2).$$

Ha az említett $\mathbf{e}_1, \ldots, \mathbf{e}_n (\mathbf{e}_i^*\mathbf{e}_j = \delta_{ij})$ ortonormált bázisban

$$\mathbf{x} = \sum_i x_i \mathbf{e}_i \quad \text{és} \quad \mathbf{a} = \sum_i a_i \mathbf{e}_i \quad (i = 1, 2, \ldots, n),$$

akkor

$$y = y(\mathbf{x}) \equiv y\left(\sum_i x_i \mathbf{e}_i\right) \equiv \mathbf{a}^* \sum_i x_i \mathbf{e}_i = \sum_i x_i \mathbf{a}^*\mathbf{e}_i = \sum_i a_i x_i \equiv \sum x_i \cdot y(\mathbf{e}_i),$$

vagyis az $a_i = y(\mathbf{e}_i)$ együtthatók (és az x_i változók is) függenek a bázis megválasztásától. A függvényünk által létesített skalármező szintfelületei nyilván az

$$y(\mathbf{x}) \equiv \mathbf{a}^*\mathbf{x} = c, \quad \text{azaz} \quad \mathbf{a}^*\mathbf{x} - c = a_1x_1 + a_2x_2 + \ldots + a_nx_n - c = 0$$

egyenletű, vagyis közös **a** normálisú s így párhuzamos *hipersíkok*.

ad *b)* Függvényünk az E_n térben az $\mathbf{x}$ vektorok $N(\mathbf{x}) = \mathbf{x}^*\mathbf{x} \equiv \mathbf{x}^2$ *normáját*, ill. $|\mathbf{x}| = +\sqrt{N(\mathbf{x})}$ hosszuk négyzetét szolgáltatja. A megfelelő skalármező szintfelületei, az ún. ekvinormál felületek nyilván az

$$\mathbf{x}^2 = x_1^2 + x_2^2 + \ldots + x_n^2 = c^2 \quad (= C \geqq 0)$$

egyenletű, azaz $\mathbf{0}(0)$ középpontú és c sugarú *hiperszférák*.

* L. pl. *Dennis* [51].

ad *c)* Ez az E_n térbeli, skalárértékű kvadratikus függvény, más néven *kvadratikus forma.* A megfelelő skalármező szintfelületei az

$$\mathbf{x}^*\mathbf{C}\mathbf{x} = \sum c_{ij}x_ix_j = c$$

egyenletű ún. *másodrendű hiperfelületek.* A kvadratikus formákkal — fontosságuk miatt — külön foglalkozunk majd az *α)* V° helyen.

2. Pl. Vizsgáljuk még — a fentiek mintájára — az alábbi függvényeket:

$$a)\ y = |\mathbf{x}|^n, \quad b)\ y = \ln|\mathbf{x}|, \quad c)\ y = (\mathbf{a}^*\mathbf{x})|\mathbf{x}|^n, \quad d)\ = (\sin \mathbf{x}^2)/\mathbf{x}^2. \qquad (15a\text{-}d)$$

3'. Az I° 3'—4'-beli értelmezéseket konkretizáljuk most a skalár-vektor függvényre!

Definíció: Az $y = y(\mathbf{x})$ függvény az $\mathbf{x} \in X \subset E_n$ *helyen folytonos,* ha ($\mathbf{x} + d\mathbf{x} \in X$ vektorokra szorítkozva)

$$\lim_{d\mathbf{x}\to 0} \mathbf{y}(\mathbf{x} + d\mathbf{x}) = \mathbf{y}(\mathbf{x}), \quad \text{azaz} \quad \lim_{d\mathbf{x}\to 0} y(\mathbf{x} + d\mathbf{x}) - y(\mathbf{x}) = \lim_{d\mathbf{x}\to 0} \Delta y = 0. \qquad (16)$$

Ha e követelmény, vagyis az $\mathbf{x}$ helyi függvényérték és határérték egyezése minden $\mathbf{x} \in X$ helyen teljesül, akkor az X *tartományban folytonos* függvényről beszélünk.

3. Pl. A (15*d*) alatti $y = \dfrac{\sin \mathbf{x}^2}{\mathbf{x}^2} \left(\equiv \dfrac{\sin u}{u}\right)$ függvény az $\mathbf{0} \in X$ helyen is folytonossá válik, ha értelmezését

$$y(\mathbf{0}) = \lim_{\mathbf{x}\to 0} y(\mathbf{x}) = 1$$

módon kiegészítjük. —

Definíció: Az $y = y(\mathbf{x})$ függvényt az $\mathbf{x} \in X$ *helyen differenciálhatónak* mondjuk, ha az $(\mathbf{x}, \mathbf{x} + d\mathbf{x}) \subset X$ szakasz menti Δy növekménye előállítható

$$\Delta y(\mathbf{x}, d\mathbf{x}) = \mathbf{y}^*(\mathbf{x})\, d\mathbf{x} + \boldsymbol{\varepsilon}^*(\mathbf{x}, d\mathbf{x})\, d\mathbf{x}, \qquad \lim \boldsymbol{\varepsilon}^*(\mathbf{x}, d\mathbf{x}) = \mathbf{0} \qquad (17a)$$

módon, ahol $\mathbf{y}(\mathbf{x})$ a derivált vektor. Ez esetben

$$\Delta y(\mathbf{x}, d\mathbf{x}) \approx \mathbf{y}^*(\mathbf{x})\, d\mathbf{x} \equiv dy(\mathbf{x}, d\mathbf{x}), \qquad \text{ha} \qquad d\mathbf{x} \approx \mathbf{0}, \qquad (17b)$$

vagyis a növekmény kicsinyben közel lineáris $d\mathbf{x}$-ben, továbbá nyilván

$$\lim_{d\mathbf{x}\to 0} \Delta y(\mathbf{x}, d\mathbf{x}) = \lim_{d\mathbf{x}\to 0} [\mathbf{y}^*(\mathbf{x}) + \boldsymbol{\varepsilon}^*(\mathbf{x}, d\mathbf{x})]\, d\mathbf{x} = \mathbf{0}, \qquad (17c)$$

vagyis függvényünk folytonos is az $\mathbf{x}$ helyen.

A $d\mathbf{x} = \mathbf{e}|d\mathbf{x}| = \mathbf{e}\, ds$ *iránymenti derivált* most (a független változók kiírását mellőzve)

$$\frac{dy}{ds} \equiv \lim_{ds\to 0} \frac{dy}{ds} = \lim_{d\mathbf{x}\to 0} [\mathbf{y}^* + \boldsymbol{\varepsilon}^*]\mathbf{e} = \mathbf{y}^*\mathbf{e} = |\mathbf{y}| \cdot 1 \, \cos\gamma = \bar{y} \cos\gamma \qquad (17d)$$

vagyis az **y** deriváltvektor és az irányt jelző **e** egységvektor skalár szorzataként s eképpen az **y** vektor **e** menti (előjeles) vetületeként nyerhető. (Ugyanez az **y** ill. —**y** átmérővektorú *hiperszféra* **e** menti, pozitív, ill. negatív előjellel veendő húrjaként is felfogható.) Ha a (17*a*) és a belőle következő (17*b*-*d*) előállítás minden $\mathbf{x} \in X$ helyen lehetséges, akkor az *X tartományban differenciálható* függvényről van szó. Ez esetben az $\mathbf{x} \in X$ pontok, a belőlük kiinduló $\mathbf{y}(\mathbf{x})$ vektorokkal együtt már ún. *vektormezőt* képeznek.

Az előbbi formulában **e** helyébe az $\mathbf{e}_i$ bázisvektorokat dy és hs helyébe pedig — értelemszerűen — a ∂y és ∂x_i parciális differenciálokat írva, a

$$\frac{\partial y}{\partial x_i} = \mathbf{y}^*\mathbf{e}_i \equiv y_i, \quad \text{ill.} \quad \mathbf{y} \equiv \sum_{i=1}^{n} y_i\mathbf{e}_i = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial y}{\partial x_i}\mathbf{e}_i \equiv \left[\frac{\partial y}{\partial x_i}\right] \tag{18a}$$

alakban nyerjük az **y** vektor koordinátáit ill. előállítását az $\mathbf{e}_i, \ldots, \mathbf{e}_n(\mathbf{e}_i^*\mathbf{e}_j = \delta_{ij})$ ortonormált bázisra vonatkozó *komponensek összegeként.*

4'. A (17*b*) szerinti $dy = \mathbf{y}^*d\mathbf{x}(\approx \Delta y$, ha $d\mathbf{x} \approx \mathbf{0})$ differenciálból a gradiens több *fontos tulajdonsága* kiolvasható. Nevezetesen, ha $d\mathbf{x}$ az **x** pontra illeszkedő $y(\mathbf{x}') = c$ szintfelület érintősíkjába esik, azaz $d\mathbf{x} = d\mathbf{x}_t$, akkor $dy = dc = 0$ miatt

$$\mathbf{y}^*d\mathbf{x}_t = 0, \quad \text{tehát} \quad \mathbf{y} \perp d\mathbf{x}_t; \tag{18b}$$

eszerint — irányát tekintve — a $\mathbf{g}(\mathbf{x})$ *vektor ortogonális a szintfelületre* **x** pontjában. Továbbá, ha $d\mathbf{x}$ az $\mathbf{y}(\mathbf{x})$-szel megegyező irányú és értelmű, azaz $d\mathbf{x} = d\mathbf{x}_y = \mathbf{e}_y\, ds$, akkor $|\mathbf{y}| = \bar{y}$ jelöléssel

$$dy = \mathbf{y}^*d\mathbf{x} = \bar{y}\, ds > 0 \quad (\text{ha } \mathbf{y} \neq \mathbf{0}, d\mathbf{x}_y \neq \mathbf{0}); \tag{18c}$$

eszerint — értelmét tekintve — *az* $y(x)$ *vektor a magasabb skalárú szintfelület felé mutat*, az **x** hely környezetében. Végül az **x** helyi és különböző **e** irány menti deriváltakról megállapítható, hogy

$$\frac{du}{ds} = \mathbf{y}^*\mathbf{e} = \bar{y}\cos\gamma \leq \frac{du}{ds_y} = \mathbf{y}^*\mathbf{e}_y = \bar{y} = \left[\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{\partial y}{\partial x_i}\right)^2\right]^{1/2}; \tag{18d}$$

eszerint *a* $\mathbf{y}(x)$ *vektor — hosszával — megadja a legnagyobb és éppen saját iránya mentén (és értelme szerint) vett deriváltat*, az **x** helyen. E tulajdonságai alapján az $\mathbf{y}(\mathbf{x})$ derivált vektor-(mező)t az $y(\mathbf{x})$ skalármező *gradiens*-(mezej)ének nevezzük; szokásos jelölései: (18*e*)

$$\mathbf{g}(\mathbf{x}) = \mathbf{grad}\, y(\mathbf{x}) = y'(\mathbf{x}) = \frac{dy(\mathbf{x})}{d\mathbf{x}} = \mathbf{y}(\mathbf{x}) = \nabla y(\mathbf{x}) = \left(\sum_{i=1}^{n}\frac{\partial}{\partial x_i}\mathbf{e}_i\right) y(\mathbf{x}),$$

ahol ∇ a *nabla* nevű és vektor jellegű differenciáloperátor.

A (18*b*) alapján az $\mathbf{y}(\mathbf{x})$ vektor az $y(\mathbf{x}') = c$ szintfelület $\mathbf{x}$ helyi normálisának tekinthető. A szintfelület ottani *érintősík*jának egyenlete tehát (ξ futóponttal)

$$\mathbf{y}^*(\mathbf{x})(\xi - \mathbf{x}) = 0 \qquad (19a)$$

alakban írható fel. Értelmezhetők továbbá az $y(\mathbf{x}) = C$ szintfelületeket mindenütt merőlegesen metsző térgörbék, ún. *ortogonális trajektóriák*, mégpedig a

$$d\mathbf{x} = \mathbf{y}(\mathbf{x})\,dt, \quad \text{azaz} \quad \dot{\mathbf{x}} \equiv \frac{d\mathbf{x}}{dt} = \mathbf{grad}\, y \equiv \mathbf{y}(\mathbf{x}) \qquad (19b)$$

differenciálegyenlet általános megoldásaként, közülük egy trajektória pedig az $\mathbf{x}(t_0) = \mathbf{x}_0$ kezdeti feltételt kielégítő partikuláris megoldásként. (E trajektóriák egyébként megegyeznek az $\mathbf{y} = \mathbf{y}(\mathbf{x})$ vektormező ún. vektorvonalaival.)

Minthogy az $y = y(\mathbf{x})$ függvény differenciálhatóságának (17*a*) definíciója formailag megegyezik az $y = f(x)$ egyváltozós függvény hasonló fogalmáéval, így — értelemszerűen — a *differenciálási szabályok* is megmaradnak; nevezetesen:

$$[cy(\mathbf{x})]' = cy'(\mathbf{x}), \qquad [y(\mathbf{x}) + \eta(\mathbf{x})]' = y'(\mathbf{x}) + \eta'(\mathbf{x}),$$
$$[y(\mathbf{x})\eta(\mathbf{x})]' = y'(\mathbf{x})\eta(\mathbf{x}) + y(\mathbf{x})\eta'(\mathbf{x}), \qquad \{y[\mathbf{x}(t)]\}^{\cdot} = y'(\mathbf{x})^*\dot{\mathbf{x}}(t),$$
$$\{y[t(\mathbf{x})]\}' = \dot{y}(t)\cdot t'(\mathbf{x}). \qquad (20a\text{-}e)$$

Az $y = y(\mathbf{x} + t\Delta\mathbf{x}) \equiv y[\mathbf{x}(t)]$ egyváltozós függvényre — a szokásos feltételek mellett — érvényes a *középértéktétel*, mégpedig a $0 \leqq t \leqq 1$ szakaszra vonatkozólag — a (20*d*) szabály alkalmazásával

$$\Delta y = \dot{y}[\mathbf{x}(\tau)]\cdot 1 \equiv y'(\mathbf{x} + \tau\,\Delta\mathbf{x})^*\Delta\mathbf{x} \qquad (0 < \tau < 1) \qquad (21)$$

alakban.

5'. A szélsőérték-számításra való tekintettel ki kell térnünk még röviden a második deriváltra is*. Nevezetesen, az $y = y(\mathbf{x})$ függvényt akkor mondjuk az $\mathbf{x} \in X$ helyen *kétszer differenciálhatónak*, ha az $\mathbf{y} = \mathbf{y}(\mathbf{x})$ első deriváltvektor ott maga is differenciálható, vagyis ha az $(\mathbf{x}, \mathbf{x} + d\mathbf{x})$ szakaszra vonatkozó növekménye előállítható a

$$\Delta^2 y(\mathbf{x}, d\mathbf{x}) = \Delta\mathbf{g}(\mathbf{x}, d\mathbf{x}) = \mathbf{Y}(\mathbf{x})d\mathbf{x} + \mathbf{E}(\mathbf{x}, d\mathbf{x})d\mathbf{x}, \quad \lim_{d\mathbf{x}\to\mathbf{0}} \mathbf{E}(\mathbf{x}, d\mathbf{x}) = \mathbf{O}. \qquad (22a)$$

alakban, ahol $\mathbf{Y}(\mathbf{x})$ az ún. deriváltmatrix.

A $d\mathbf{x} = \mathbf{e}\,|d\mathbf{x}| = \mathbf{e}ds$ *iránymenti deriváltvektor* ebből

$$\frac{d\mathbf{g}}{ds} = \lim_{ds\to 0}\frac{\Delta\mathbf{g}}{ds} = \lim_{d\mathbf{x}\to\mathbf{0}}(\mathbf{Y} + \mathbf{E})\mathbf{e} = \mathbf{Y}\mathbf{e} \qquad (22b)$$

* E feladat átvezet a vektor-vektor függvény differenciálására, amelyet az α) I° helyen már érintettünk.

módon, az $\mathbf{e}_i$ bázisvektorok irányában pedig — értelemszerűen —

$$\frac{\partial \mathbf{g}}{\partial x_j} \equiv \frac{\partial}{\partial x_j} \sum_i \frac{\partial y}{\partial x_i} \mathbf{e}_i \equiv \sum_i \frac{\partial^2 y}{x_i x_j} \mathbf{e}_i = \mathbf{Y}\mathbf{e}_j \equiv \mathbf{y}_j \tag{22c}$$

módon nyerhető. Az utóbbiakról, mint vektorkomponenseiből az **Y** *deriváltmatrix* így épül fel:

$$\mathbf{Y}(\mathbf{x}) = [\mathbf{y}_1, \ldots, \mathbf{y}_j, \ldots, \mathbf{y}_n] = \begin{bmatrix} \frac{\partial^2 y}{\partial x_1^2} & \cdots & \frac{\partial^2 y}{\partial x_1 \partial x_j} & \cdots & \frac{\partial^2 y}{\partial x_1 \partial x_n} \\ \frac{\partial^2 y}{\partial x_2 \partial x_1} & \cdots & \frac{\partial^2 y}{\partial x_2 \partial x_j} & \cdots & \frac{\partial^2 y}{\partial x_2 \partial x_n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \frac{\partial^2 y}{\partial x_n \partial x_1} & \cdots & \frac{\partial^2 y}{\partial x_n \partial x_j} & \cdots & \frac{\partial^2 y}{\partial x_n^2} \end{bmatrix} = y''(\mathbf{x}) =$$

$$= \frac{d^2 y}{d\mathbf{x}^2} = \frac{d\mathbf{y}}{d\mathbf{x}} = \mathbf{y}\nabla^* = (\nabla \mathbf{y}^*)^*, \tag{22d}$$

ahol felírjuk szokásos jelöléseit is.

A (22*a*-*d*)-vel értelmezett $\mathbf{Y}(\mathbf{x})$ *deriváltmatrix szimmetrikus,*

$$\mathbf{Y} = \mathbf{Y}^*, \quad \text{azaz} \quad \frac{\partial^2 y}{\partial x_i \partial x_j} = \frac{\partial^2 y}{\partial x_j \partial x_i}, \tag{22e}$$

más szóval az $y = y(\mathbf{x})$ függvény vegyes második parciális deriváltja megegyeznek, tehát az x_i és az x_j szerinti parciális deriválás sorrendje felcserélhető (*Young-tétel*).

Ui. a $\Delta^2 y$ második differencia (növekmény) általános értelmezése, a (21) középértéktétel és a (22*a*) definíció alapján írható, hogy

$$\Delta^2 y = [\overset{\text{I}}{y(\mathbf{x} + \mathbf{e}_i t + \mathbf{e}_j t)} - \overset{\text{II}}{y(\mathbf{x} + \mathbf{e}_i t)}] - [\overset{\text{III}}{y(\mathbf{x} + \mathbf{e}_j t)} - \overset{\text{IV}}{\mathbf{y}(\mathbf{x})}] =$$
$$= t\mathbf{e}_j^* [\mathbf{g}(\mathbf{x} + \mathbf{e}_i t + \mathbf{e}_j \tau_1) - \mathbf{g}(\mathbf{x} + \mathbf{e}_j \tau_2)] =$$
$$= t\mathbf{e}_j^* \{[\mathbf{Y}(x) + \mathbf{E}_1] \mathbf{e}_i t + (\mathbf{E}_1 \tau_1 - \mathbf{E}_2 \tau_2) \mathbf{e}_j\},$$

ahonnan ($0 \leqq \tau_1, \tau_2 \leqq t$ folytán)

$$\lim_{t \to 0} \frac{\Delta^2 y}{t^2} = \lim_{t \to 0} \mathbf{e}_j \left\{ [\mathbf{Y}(\mathbf{x}) + \mathbf{E}_1] \mathbf{e}_i + \frac{\tau_1}{t} \mathbf{E}_1 - \frac{\tau_2}{t} \mathbf{E}_2 \right\} \mathbf{e}_j = \mathbf{e}_j^* \mathbf{Y}(x) \mathbf{e}_i = \frac{\partial^2 y}{\partial x_j \partial x_i};$$

hasonlóan nyerhető a $\Delta^2 y$ tagjainak [I—III] — [II—IV] elrendezéséből, hogy

$$\lim_{t \to 0} \frac{\Delta^2 y}{t^2} = \mathbf{e}_i^* \mathbf{Y}(\mathbf{x}) \mathbf{e}_j = \frac{\partial^2 y}{\partial x_i \partial x_j}, \text{ q. e. d.}$$

Ha a (22*a*) követelmény minden $\mathbf{x} \in X$ helyen teljesül, akkor *az X tartományban kétszer differenciálható függvényről* beszélünk, a (23) szimmetria érvényesülésével. Az ilyen függvény minden $\mathbf{x} + d\mathbf{x} \in X$ helyen előállítható az

$$y(\mathbf{x} + d\mathbf{x}) = y(\mathbf{x}) + \mathbf{y}^*(\mathbf{x})d\mathbf{x} + \frac{1}{2}d\mathbf{x}^*\mathbf{Y}(\mathbf{x})d\mathbf{x} + R_2(\mathbf{x}), \lim_{d\mathbf{x}\to\mathbf{0}} \frac{R_2(\mathbf{x})}{d\mathbf{x}^2} = 0 \quad (23a)$$

Taylor-féle alakban, növekménye tehát $\mathbf{0} \approx d\mathbf{x}$-ekre jó közelítéssel

$$\Delta y \equiv y(\mathbf{x} + d\mathbf{x}) - y(\mathbf{x}) \approx \mathbf{y}^*(\mathbf{x})d\mathbf{x} + \frac{1}{2}d\mathbf{x}^*\mathbf{Y}(\mathbf{x})\,d\mathbf{x} \quad (23b)$$

módon.

III°. Skalárfüggvény szabad és kötött szélsőértékei. *1'*. Térjünk rá most a matematikai programozás szempontjából kiemelkedő fontosságú szélsőérték-vizsgálatra, mégpedig szabad és kötött változatára egyaránt. Az $y = y(\mathbf{x})$ függvényről akkor mondjuk, hogy az $\mathbf{x}_l \in X$ belső pontban* *lokális extrémuma* (maximuma vagy minimuma) van, ha e hely elég kis $|d\mathbf{x}| < r$ környezetében

$$y(\mathbf{x}_l + d\mathbf{x}) \gtrless y(\mathbf{x}_l), \quad \text{azaz} \quad \Delta y \gtrless 0, \quad (24)$$

vagyis ha ott a Δy növekmény (szigorúan) előjeltartó (mégpedig maximumnál $\Delta y < 0$, minimumnál $\Delta y > 0$.)

Kritérium: Az $X = \{\mathbf{x}\} < E_n$ tartományban kétszer differenciálható függvénynek olyan $\mathbf{x}_l$ belső pontban van *lokális extrémuma,* ahol

a) $\mathbf{y}(\mathbf{x}_l) = \mathbf{0}$ (szükséges feltétel; stacionárius pont) és (25*a*)

b) $Q \equiv d\mathbf{x}^*\mathbf{Y}(\mathbf{x}_l)d\mathbf{x} \gtrless 0 \quad [\mathbf{Y}(\mathbf{x}) \neq \mathbf{O},\ d\mathbf{x} \neq \mathbf{0}]$ (25*b*)
(elégséges feltétel; definit kvadratikus alak);** nevezetesen, ott

c) lokális $\left\{\begin{matrix}\text{maximuma}\\ \text{minimuma}\end{matrix}\right\}$ van, ha $Q \left\{\begin{matrix} < 0 & \text{(negatív definit),} \\ > 0 & \text{(pozitív definit).}\end{matrix}\right.$ (25*c*)

Ha $Q \gtreqless 0$ (indefinit), akkor nincs lokális extrémum; ha pedig $Q \geqq 0$ vagy $Q \leqq 0$ (pozitív, vagy negatív szemidefinit), vagy $Q \equiv 0$ [$\mathbf{Y}(\mathbf{x}_l) = \mathbf{O}$ miatt], akkor egyéb vizsgálattal kell tisztázni a lokális extrémum tényét és jellegét.

Ui. az *a)* feltétel valóban szükséges, mert $\mathbf{y}(\mathbf{x}_l) \neq \mathbf{0}$ esetén $|d\mathbf{x}| < r$ kis környezetben a $d\mathbf{x}$ értelemváltása a (23*b*) formulában a Δy előjelváltását vonná maga után, a (24) szerinti előjeltartás helyett. Az $\mathbf{y}(\mathbf{x}_l) = \mathbf{0}$ esetben viszont, az említett kis környezetben a Q quadratikus alak határozza meg a (23*b*)-beli Δy előjelét,

---

* Tudvalevőleg, az $\mathbf{x}$ akkor belső pontja az X tartománynak, ha valamely $|d\mathbf{x}| < \varrho$ kis környezete is az X-hez tartozik.

** A kvadratikus alakokról l. bővebben az *α)* V° helyen.

hacsak $\mathbf{Y}(\mathbf{x}_l) \neq \mathbf{O}$ s így a (24) teljesüléséhez a *b)* feltétel tehát a Q definitása (vagyis $d\mathbf{x} \neq \mathbf{0}$ esetén szigorú előjeltartása) valóban elégséges, q. e. d.

2'. Számos vizsgálatnál nem (csak) az X egyes $\mathbf{x}_l$ belső pontjaiban mutatkozó $y(\mathbf{x}_l)$ lokális extrémumok érdekesek, hanem az (összes $\mathbf{x}$ belső- és $\bar{\mathbf{x}}$ határpontjaival együtt értendő) egész X tartomány $\hat{x}$ helyein jelentkező $\hat{y} = y(\hat{\mathbf{x}})$ *globális (abszolút) extrémumok* is. Megállapításához — a már megvizsgált $y(\mathbf{x}_l)$ belső lokális extrémumok mellett — meg kell ismerni még az $\bar{\mathbf{x}}$ határpontokban vett $y(\bar{\mathbf{x}})$ függvény $\bar{\mathbf{x}}_h$ helyi $y(\bar{\mathbf{x}}_h)$ külső lokális extrémumait is.* Mindezek birtokában nyilván

$$|\hat{y}| = |\hat{y}(\hat{\mathbf{x}})| = \max(|y(\mathbf{x}_l)|, |y(\bar{\mathbf{x}}_h)|) \equiv M, \quad \operatorname{sign}\hat{y} \cdot M = \hat{y}, \quad \operatorname{loc}\hat{y} = \hat{\mathbf{x}} \qquad (26)$$

módon nyerhetők az $y(\mathbf{x})$ függvény az X-beli $\hat{y} = \hat{y}(\hat{\mathbf{x}})$ abszolút extrémumai mégpedig nagyságuk, előjeleik, és helyeik tekintetében egyaránt.**

Bizonyos sajátságú (mégpedig — mint látni fogjuk — az egész X-ben szigorúan konvex, vagy konkáv) függvényről eleve tudjuk, hogy legfeljebb csak *egyetlen* $\hat{\mathbf{x}}$ globális extrémumhelyük van (pl. nincs az $y = e^{|\mathbf{x}|}$-nél, egy van az $y = \mathbf{x}^2$-nél). Ha e hely történetesen $\mathbf{x}_l$ *belső pont,* akkor ott egyúttal lokális extrémum is van, azaz

$$\hat{y}(\hat{\mathbf{x}}) = y(\mathbf{x}_l) \qquad \text{és nyilván} \qquad y'(\mathbf{x}_l) \equiv \mathbf{y}(\mathbf{x}_l) = \mathbf{0}. \qquad (27a)$$

Ha azonban e hely $\mathbf{x}_h$ *határpont,* azaz

$$\hat{y} = y(\mathbf{x}_h), \qquad \text{akkor} \qquad y'(\mathbf{x}_h) \equiv \mathbf{y}(\mathbf{x}_h) = \mathbf{c}. \qquad (27b)$$

E megfontolások igen lényegesek a továbbiak szempontjából. Látható továbbá a 3'—4'. pontbeli előzetes hivatkozásokból, hogy feltételenül szükség van a későbbiekben a konvex függvények és a kvadratikus alakok behatóbb tárgyalására; ezt az *α)* IV° és V° pontban fogják elvégezni.

3'. Az $y = y(\mathbf{x})$ függvény lokális szélsőérték-vizsgálatnál egy $\mathbf{x} \in X \subset E_n$ belső pont bizonyos $|d\mathbf{x}| < r$ *teljes* környezetét vettük alapul, s ebben az $\mathbf{x}$ vektort *szabadon* változtattuk. Az ilyen közönséges, vagy ún. *szabad szélsőérték-feladat* mellett a műszaki-gazdasági tudományokban, köztük a bennünket közelebbről érintő matematikai programozásban, gyakran lép fel ún. *feltételes, vagy kötött szélsőérték-feladat,* amelynél — alkalmas *feltételi egyenletek* megadásával — az $\mathbf{x}$ vektor változását az említett környezet valamely térrészére, hiperfelületére, hipergörbéjére *korlátozzuk.*

* Feltesszük, hogy az X tartomány zárt és az $y[\mathbf{x}]$ függvény minden hatarpontban értelmezve van.

** Nyilván ugyanazon $|\hat{y}|$ nagyságú abszolút extrémum különböző előjellel és több $\hat{\mathbf{x}}$ helyen is jelentkezhet; pl. az $y = \sin|\mathbf{x}|$-nél $|\hat{y}| = 1$, $\hat{y}_{max} = \sin[4k+1]\frac{\pi}{2} = +1$, $\hat{y}_{min} = \sin(4k-1)\frac{\pi}{2} = -1$, ahol $k = 0, 1, , \ldots$.

Legyen a szóban forgó *feltétel*

$$\mathbf{a}(\mathbf{x}) = \mathbf{0}, \quad \text{azaz} \quad a_j(x_1, \ldots, x_i, \ldots, x_n) = 0 \quad (j = 1, 2, \ldots, m < n) \qquad (28a)$$

módon, vagyis egy az E_m térben értendő vektoregyenlet ill. a megfelelő skalár egyenletrendszer (m-es) formájában előírva, akkor elvileg mód van arra, hogy a (28a) *implicit egyenlet*-(rendszer)t pl. az $\mathbf{x}' = [\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \ldots, \mathbf{x}_m]$ $(m < n)$ változóra egyértelműen, explicite megoldjuk, a többi $\xi^* = [x_{m+1}, \ldots, x_n]$ változó függvényeként, egy $\mathbf{x}_0^* = [\mathbf{x}_0^*, \xi_0^*]$ hely alkalmas környezetére vonatkozó érvénynyel, ha ott

$$\alpha)\ \mathbf{a}(\mathbf{x}_0) = \mathbf{0}, \quad \beta)\ \frac{d\mathbf{a}}{d\mathbf{x}} = \mathbf{A}(\mathbf{x}) = [\mathbf{a}_j] = \left[\frac{\partial a_j}{\partial x_i}\right] \text{ folytonos,} \qquad (28b, c)$$

a *Jacobi-féle ún. függvénydeterminánς* pedig

$$\gamma)\ J \equiv \det\left(\frac{\partial \mathbf{a}}{\partial \mathbf{x}'}\right) = \det\,[\mathbf{a}_j'] = \det\left|\frac{\partial a_j}{\partial x_k}\right| \neq 0 \quad (k = 1, 2, \ldots, m); \qquad (28d)$$

nevezetesen, az ún. *inverz (megfordított) függvény (rendszer)*

$$\mathbf{x}' = \mathbf{x}'(\xi), \quad \text{azaz} \quad x_k = x_k(x_{m+1}, \ldots, x_n) \text{ egyértékű,} \qquad (28e)$$

$$\frac{d\mathbf{x}'}{d\xi} = \left|\frac{\partial x_k}{\partial x_l}\right| \text{ folytonos,} \quad \mathbf{a}[\mathbf{x}'(\xi), \xi] \equiv \mathbf{0}, \quad \mathbf{x}_0' = \mathbf{x}'(\xi_0)$$

$$(k = 1, 2, \ldots, m; \quad l = m + 1, \ldots, n) \qquad (28f\text{-}h)$$

tulajdonságú lesz.* Ezen inverz feltételi függvény segítségével az adott $\mathbf{x} = [x_1, x_2, \ldots, x_m, \ldots, x_n]^*$ változós

$$y = y(\mathbf{x}) = \text{Extr!}, \quad \mathbf{a}(\mathbf{x}) = \mathbf{0} \qquad (28i)$$

feltételes szélsőérték-feladatot a $\xi = [x_{m+1}, \ldots, x_n]^*$ változós

$$y = y(\mathbf{x}', \xi)\Big|_{\mathbf{x}'=\mathbf{x}'(\xi)} = y[\mathbf{x}'(\xi), \xi] \equiv \tilde{y}(\xi) = \text{Extr!} \qquad (28j)$$

szabad szélsőérték-feladatra lehet *redukálni*.

4'. Az előbb ismertetett redukciós eljárás gyakorlati végrehajtása — a legegyszerűbb feladatoktól eltekintve — súlyos nehézséggel jár, s ezért — elvi jelentősége ellenére — ritkán kerül felhasználásra. Helyette a *Lagrange-féle multiplikátorok módszere* terjedt el a feltételes szélsőérték-feladatok megoldására. E módszer az említett redukciós elvet gyakorlatilag mellőzi és a feladatnak az összes x_i változóra nézve szimmertikus tárgyalását teszi lehetővé. Maga *Lagrange* a kényszer alá vetett pont statikai-dinamikai vizsgálatára használta fel mód-

* L. bővebben pl. *Szentmártony:* Felsőbb mennyiségtan.

szerét, amely azóta a legkülönbözőbb tudományterületekre, így legújabban a matematikai programozásba is behatolt. Ismertessük most a módszert hosszabb tétel keretében.*

Tétel: Legyen adva az

$$y = y(\mathbf{x}) \equiv y([x_1, \ldots, x_i, \ldots, x_n]^*) = \text{Extr}!,$$
$$\mathbf{a}(\mathbf{x}) = [a_1(\mathbf{x}), \ldots, a_j(\mathbf{x}), \ldots, a_m(\mathbf{x})] = \mathbf{0} \qquad (29a,\ b)$$

feltételes szélsőérték-feladat ($m < n$), és a benne szereplő függvények

$$\frac{d^2\mathbf{y}}{d\mathbf{x}^2} = \mathbf{Y}(\mathbf{x}) = [\mathbf{y}_i] = \left|\frac{\partial^2 u}{\partial x_k \partial x_i}\right|, \quad \frac{d^2\mathbf{a}}{d\mathbf{x}^2} = \mathfrak{A}(\mathbf{x}) = [\mathbf{A}_j(\mathbf{x})] = \left|\frac{\partial^2 a_j}{\partial x_k \partial x_i}\right| \qquad (29c,\ d)$$

második derivált (sík-, ill. tér-) matrixa legyen folytonos. E feladatnak csak olyan $\mathbf{x}_0$ helyen lehet megoldása a (29*b*)-vel megszabott környezetben, ahol a $\mathbf{v}^* = [v_1, \ldots, v_j, \ldots, v_m]$ multiplikátor bevezetésével nyert *Lagrange-függvényre vonatkozó*

$$\eta(\tilde{\mathbf{x}}) \equiv \eta(\mathbf{x}, \mathbf{v}) = y(\mathbf{x}) + \mathbf{v}^*\mathbf{a}(\mathbf{x}) = y(\mathbf{x}) + \sum_j v_j a_j(\mathbf{x}) = \text{Extr}! \qquad (30a)$$

szabad szélsőérték-feladatnak is van, bizonyos $\mathbf{v}_0$ mellett. E feladatnál viszont (lokális) extrémum csak olyan $\tilde{\mathbf{x}}_0^* = [\mathbf{x}_0^*, \mathbf{v}_0^*]$ helyen *lehet,* ahol (30*b*)

$$\left(\frac{d\eta}{d\tilde{\mathbf{x}}}\right)_{\tilde{\mathbf{x}}_0} = \tilde{\mathbf{0}}, \quad \text{azaz} \quad \begin{cases} \left(\dfrac{\partial\eta}{\partial\mathbf{x}}\right)_{\mathbf{x}_0,\mathbf{v}_0} = \dfrac{dy}{d\mathbf{x}} + \dfrac{d\mathbf{a}^*}{d\mathbf{x}}\mathbf{v}\Big|_{\mathbf{x}_0,\mathbf{v}_0} = \left|\dfrac{\partial y}{\partial x_i} + \mathbf{v}^*\dfrac{\partial\mathbf{a}}{\partial x_i}\right|_{x_{i0},\mathbf{v}_0} = \mathbf{0}, \\ \left(\dfrac{\partial\eta}{\partial\mathbf{v}}\right)_{\mathbf{x}_0} = \mathbf{a}(\mathbf{x})\Big|_{\mathbf{x}_0} = [a_j(\mathbf{x})]_{\mathbf{x}_0} = \mathbf{0}. \end{cases} \qquad (30c)$$

Ugyanott — a $\mathbf{v}$-ben lineáris (30*b*) egyenlet egyértelmű megoldhatósága, s egyben a (30*c*) implicit egyenletnek az x_i változók valamely m-esére, pl. az $\mathbf{x}' = [x_1, x_2, \ldots, x_m]^*$ vektorra való egyértelmű (lokális) *invertálhatósága*** érdekében — kell, hogy a *Jacobi-féle függvénydeterminans,*

$$J = \det\left(\frac{\partial\mathbf{a}}{\partial\mathbf{x}'}\right)_{\mathbf{x}_0'} = \det\left|\frac{\partial a_j}{\partial x_k}\right|_{x_{k0}} \neq 0 \quad (k = 1, 2, \ldots, m) \qquad (30d)$$

legyen [ami a (29*a*)-nak $y = y[\mathbf{x}'(\xi), \xi] = \bar{y}(\xi)$, s így a (30*b*)-nek $\left(\dfrac{\delta\eta}{\delta\xi}\right)_{\xi_0} = \dfrac{\partial\eta}{\partial\mathbf{x}'}\dfrac{d\mathbf{x}'}{d\xi} + \dfrac{\partial\eta}{\partial\xi}\Big|_{\xi_0}$ redukálhatóságát** biztosítja]. Az ilyen $\tilde{\mathbf{x}}_0^* = [\mathbf{x}_0^*, \mathbf{v}_0^*] = [\mathbf{x}_0'^*, \xi_0^*; \mathbf{v}_0^*]$ *stacionárius pont*ban csak akkor van valóban $\mathbf{x}$ szerinti (lokális)

* Igazolását l. pl. mint előbb.
** V. ö. a 3′ hellyel!

extrémuma a (29*a*) függvénynek, ha ott a diszkrimináns kvadratikus alak

$$d\mathbf{x}^* \frac{\partial^2 \eta}{\partial \mathbf{x}^2} d\mathbf{x} \Big|_{\mathbf{x}_0, \mathbf{v}_0} = d\mathbf{x}^* \left(\frac{d^2 y}{d\mathbf{x}^2} + \frac{d^2 \mathbf{a}^*}{d\mathbf{x}^2} \mathbf{v} \right) d\mathbf{x} \Big|_{\mathbf{x}_0, \mathbf{v}_0} \quad \text{definit}$$

[ami a $d\xi^* \frac{d^2 \tilde{y}}{d\xi^2} d\xi \Big|_{\xi_0}$ kvadratikus alak definitását is maga után vonja]; mégpedig *pozitív* (negatív) definitás esetén *minimum* (maximum).

Mint később látni fogjuk, a *Lagrange-féle* multiplikátoros módszerre vonatkozó fenti tétel több irányban általánosítható.*

Gyakorlásul oldjunk meg most egy-két szabad és kötött szélsőérték-feladatot!

1. Pl. Adva van az E_n térben az

$$m_j(> 0), \quad \mathbf{x}_j^* = [x_{1j}, x_{2j}, \ldots, x_{nj}] \quad (j = 1, 2, \ldots, \mu)$$

tömegpont-rendszer. Keresendő az az $\mathbf{x}^* = (x_1, x_2, \ldots, x_n]$ pont, amelyre vonatkozólag a *tömegpontrendszer poláris másodrendű nyomatéka,*

$$y(\mathbf{x}) \equiv \sum_{j=1}^{\mu} m_j(\mathbf{x} - \mathbf{x}_j)^2 = \text{Min!}$$

A III° 1'-ben tanultak szerint lokális extrémum csak olyan $\hat{\mathbf{x}} \equiv \mathbf{x}_l$ helyen lehet, ahol ($\sum_j m_j = M > 0$ jelöléssel)

$$\mathbf{y}(\hat{\mathbf{x}}) \equiv y'(\hat{\mathbf{x}}) \equiv \text{grad}\, y(\hat{\mathbf{x}}) = 2\sum_{j=1}^{\mu} m_j(\hat{\mathbf{x}} - \mathbf{x}_j) = 2M\hat{\mathbf{x}} - 2\sum_{j=1}^{\mu} m_j \mathbf{x}_j = \mathbf{0}.$$

Ilyen, ún. *stacionárius pont* most csak egy van, s ez nyilván az

$$\hat{\mathbf{x}} \equiv \mathbf{x}_s = \frac{1}{M} \sum_{j=1}^{\mu} m_j \mathbf{x}_j$$

súlyponttal (pontosabban: tömegközépponttal) azonos. E pont egyszersmind *lokális extrémumhely* is, mert ott (és esetünkben mindenütt)

$$\mathbf{Y}(\mathbf{x}) \equiv y''(\mathbf{x}) \equiv \mathbf{Grad}\, y(\mathbf{x}) = 2M\mathbf{E} - \mathbf{O} = 2M\mathbf{E},$$

s a vele kapcsolatos kvadratikus alak

$$Q(\mathbf{x}) \equiv d^*\mathbf{x}\mathbf{Y}(\mathbf{x})\, d\mathbf{x} = 2M\, d\mathbf{x}^*\mathbf{E}\, d\mathbf{x} = 2M\, d\mathbf{x}^2 > 0, \quad \text{ha} \quad d\mathbf{x} \neq \mathbf{0},$$

módon definit. Sőt, pozitív definit a $Q(\mathbf{x})$, s így $\mathbf{x}_s$ *lokális minimumhely*. Maga a lokális minimum (behelyettesítés és a kijelölt négyzetreemelés elvégzése útján)

* L. a β) III°—IV° helyet!

így alakul:

$$y(\mathbf{x}_s) \equiv \sum_j m_j(\mathbf{x}_s - \mathbf{x}_j)^2 = \mathbf{x}_s^2 M - 2\mathbf{x}_s^* \cdot M\mathbf{x}_s + \sum m_j \mathbf{x}_i^2 =$$

$$= \sum_i m_j \mathbf{x}_i^2 - M\mathbf{x}_s^2 = \text{Min } y(\mathbf{x}).$$

Ugyanez *globális, v. abszolút minimum is* egyben, mert mindenütt pozitív definit $Q(\mathbf{x})$-ünk az $y(\mathbf{x})$ függvény E_n-beli szigorú konvexitását jelzi. Az előbbi formula egyébként a jól ismert *Steiner-tételt* fejezi ki, ill. általánosítja n dimenzióra.

2. *Pl.* Az $a = 225$ számot bontsuk fel úgy 5 pozitív összeadandóra, hogy szorzatuk maximális legyen.

Maximálandó tehát az

$$y(\mathbf{x}) \equiv \prod_{i=1}^{5} x_i \equiv x_1 x_2 x_3 x_4 x_5$$

függvény, az

$$a(\mathbf{x}) \equiv \sum_{i=1}^{5} x_i - 225 = x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 - 225 = 0, \quad x_i > 0$$

feltételek mellett. Az $a(\mathbf{x}) = 0$ feltétel most triviálisan megoldható pl. az x_5-re mégpedig

$$x' \equiv x_5 = 225 - x_1 - x_2 - x_3 - x_4 \equiv x'(\xi)$$

módon, és behelyettesíthető a célfüggvénybe, így azt az

$$y[\xi, x'(\xi)] \equiv x_1 x_2 x_3 x_4 (225 - x_1 - x_2 - x_3 - x_4) \equiv \tilde{y}(\xi)$$

alakra hozva. Az $x_i > 0$ előjel-korlátozásokat számítás közben, egyszerű megfontolásokkal fogjuk figyelembe venni. Ily módon a feltételes szélsőérték-feladatot szabad szélsőértékfeladatra redukáljuk.

Stacionárius pont ott van, ahol ($l = 1, 2, 3, 4$-gyel)

$$\mathbf{e}^l \mathbf{grad}\, \tilde{y}(\xi) \equiv \frac{\partial \tilde{y}}{\partial x_l} = \prod_{k \neq l} x_k \cdot (225 - \sum_k x_k) + \prod_k x_k \cdot (-1) =$$

$$= \prod_k x_k \cdot (225 - \sum_k x_k - x_l) = 0 \qquad k, l = 1, 2, 3, 4).$$

A $\prod_{k \neq} x_k$ tényező $x_k = 0$ ($k \neq l$) zérushelyei ($x_i > 0$ miatt) érdektelenek. Elegendő tehát a második tényező zérushelyeit szolgáltató

$$225 - \sum_{k=1}^{4} x_k - x_k \equiv (225 - \sum_{i=1}^{5} x_i) + x_5 - x_k = x_5 - x_k = 0 \qquad (k = 1, 2, 3, 4)$$

lineáris egyenletrendszert megoldani, amely — triviálisan — így alakul:

$$\hat{\mathbf{x}}:\ \hat{x}_1 = \hat{x}_2 = \hat{x}_3 = \hat{x}_4 = \hat{x}_5 = \frac{225}{5} = 45 \quad (> 0).$$

Extrémumhelye-e ugyanez? Eldöntésére vizsgáljuk az $\mathbf{Y}(\mathbf{x})$, majd az $\mathbf{Y}(\hat{\mathbf{x}})$ derivált matrixot! Főátlóbeli elemei:

$$\left(\frac{\partial^2 \tilde{y}}{\partial x_l^2}\right)_{\mathbf{x}} = -2 \prod_{k \neq l} x_k \quad (k, l = 1, 2, 3, 4), \quad \left(\frac{\partial^2 \tilde{y}}{\partial x_l^2}\right)_{\hat{\mathbf{x}}} = -2 \cdot 45^3;$$

főátlón kívüli elemei :

$$\left(\frac{\partial^2 \tilde{y}}{\partial x_l \partial x_j}\right)_{\mathbf{x}} = \prod_{k \neq l, j} x_k \cdot (225 - \sum_k x_k - x_l) + \prod_{k \neq l} x_k \cdot (-1), \quad \left(\frac{\partial^2 \tilde{y}}{\partial x_l \partial x_j}\right)_{\mathbf{x}} = -45^3.$$

Írható tehát, hogy az $\hat{\mathbf{x}}$ helyen a derivált matrix

$$\mathbf{Y}(\hat{\mathbf{x}}) = 45^3 \cdot \begin{bmatrix} -2 & -1 & -1 & -1 \\ -1 & -2 & -1 & -1 \\ -1 & -1 & -2 & -1 \\ -1 & -1 & -1 & -2 \end{bmatrix},$$

bal felső sarokdeterminánsainak sorozata pedig (a faktor mellőzésével)

$$-2, \quad \begin{vmatrix} -2 & -1 \\ -1 & -2 \end{vmatrix} = 3, \quad \begin{vmatrix} -2 & -2 & -2 \\ -1 & -2 & -1 \\ -1 & -1 & -2 \end{vmatrix} = -4, \quad \begin{vmatrix} -2 & -2 & -2 & -2 \\ -1 & -2 & -1 & -1 \\ -1 & -1 & -2 & -1 \\ -1 & -1 & -1 & -2 \end{vmatrix} = 5.$$

Ez az $\mathbf{Y}(\hat{\mathbf{x}})$ matrix ill. a $Q(\hat{\mathbf{x}}) \equiv d^*\mathbf{x}\mathbf{Y}(\hat{\mathbf{x}})d\mathbf{x}$ kvadratikus alak negatív definit jellegét mutatja*; az $\hat{\mathbf{x}}^* = [45, 45, 45, 45, 45]$ helyen van tehát *extrémum*, mégpedig *maximum* és értéke

$$\text{Max } y(\mathbf{x}) = y(\hat{\mathbf{x}}) = 45^5.$$

3. Pl. Megállapítandó az $\mathbf{0}^* = [0, 0, \ldots, 0]$ középpontú és $|\mathbf{x}| = r$ sugarú hiperszféra-felületnek egy $\mathbf{a}^* = [a_1, a_2, \ldots, a_n] \neq \mathbf{0}$ ponttól maximális és minimális távolságra fekvő pontja.

Esetünkben az extrémálandó *célfüggvény*

$$y(\mathbf{x}) \equiv (\mathbf{x} - \mathbf{a})^2 \equiv \mathbf{x}^2 - 2\mathbf{a}^*\mathbf{x} + \mathbf{a}^2,$$

a *feltételi egyenlet* pedig

$$a(\mathbf{x}) = \mathbf{x}^2 - r^2 = 0.$$

---

* L. bővebben az x) V° helyen!

Képezzük a megfelelő *Lagrange-függvényt*; ez most

$$\eta(\mathbf{x}, \nu) \equiv y(\mathbf{x}) + \nu a(\mathbf{x}) = (\mathbf{x} - \mathbf{a})^2 + \nu(\mathbf{x}^2 - r^2).$$

Hajtsunk végre rajta szabad szélsőérték-vizsgálatot!

Stacionárius pontjai ($+\sqrt{\mathbf{a}^2} = |\mathbf{a}| = a$ jelöléssel):

$$\eta'_{\mathbf{x}}(\hat{\mathbf{x}}, \hat{\nu}) = 2(\hat{\mathbf{x}} - \mathbf{a}) + 2\hat{\nu}\hat{\mathbf{x}} = 2[(1 + \hat{\nu}/\mathbf{x} - \mathbf{a}] = \mathbf{0}, \quad \text{azaz} \quad \hat{\mathbf{x}} = \frac{\mathbf{a}}{1 + \hat{\nu}}$$

$$\eta'_{\nu}(\hat{\mathbf{x}}, \hat{\nu}) = \hat{\mathbf{x}}^2 - r^2 = \frac{\mathbf{a}^2}{(1 + \hat{\nu}^2)} - r^2 = 0, \quad \text{azaz} \quad 1 + \hat{\nu} = \pm\frac{a}{r};$$

tehát kettő van, mégpedig

$$\hat{\mathbf{x}}_1 = \frac{\mathbf{a}}{(1 + \nu_1)} = + r\frac{\mathbf{a}}{a} = r\mathbf{a}^0 \quad \text{és} \quad \mathbf{x}_2 = -r\mathbf{a}^0;$$

ezek a gömbfelületnek az **a** vektorral párhuzamos helyzetvektorú pontjai (másként az $\overline{OA}$ egyenes meghosszabbítása és a gömbfelület döféspontjai). Megjegyzendő, hogy e pontokban

$$\textbf{grad}\, a(\hat{\mathbf{x}}) = 2\hat{\mathbf{x}} = \pm 2r\mathbf{a}^0 \neq \mathbf{0}, \quad \text{azaz} \quad J = \frac{\partial a}{\partial x_i} = \pm\, 2r\frac{a_i}{a} \neq 0,$$

legalább egy i-nél.

Extrémumhelyek-e ezek, az **x** szerint? Eldöntésére vizsgáljuk a $\frac{\partial^2 \eta}{\partial \mathbf{x}^2}$ derivált matrix viselkedését e két pontban,

$$\eta''_{\mathbf{xx}}(\hat{\mathbf{x}}, \hat{\nu}) = 2\mathbf{E} + 2\hat{\nu}\mathbf{E} = 2(1 + \hat{\nu})\mathbf{E} = \pm\frac{2a}{r}\mathbf{E}.$$

A két megfelelő kvadratikus alak:

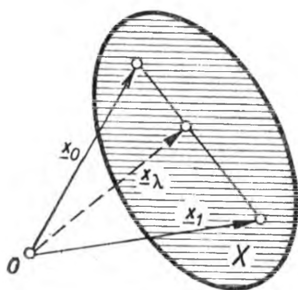
$$Q(\hat{\mathbf{x}}, \hat{\nu}) \equiv d^*\mathbf{x}\left(\pm\frac{2a}{r}\mathbf{E}\right)d\mathbf{x} = \pm\frac{2a}{r}d\mathbf{x}^2 \gtrless 0, \quad \text{ha} \quad d\mathbf{x} \neq 0,$$

vagyis pozitív, ill. negatív definit. Valóban extrémum van tehát e helyeken, mégpedig

az $\hat{\mathbf{x}}_1 = r\mathbf{a}_0$ helyen $y(\hat{\mathbf{x}}_1) = (r - a)^2$ minimum,

az $\hat{\mathbf{x}}_2 = -r\mathbf{a}_0$ helyen $y(\hat{\mathbf{x}}_2) = (r + a)^2$ maximum.

IV°. Konvex skalár függvények az E_n térben. *1'.* A matematikai programozás szempontjából különös figyelmet érdemelnek az E_n tér egy konvex tartományában értelmezett konvex függvények. Beszéljünk most ezekről!



4. ábra

Definíció: Az $X \subset E_n$ *ponthalmazt* akkor mondjuk *konvexnek*, ha bármely $\mathbf{x}_0$, $\mathbf{x}_1$ pontpárjának $(\mathbf{x}_0, \mathbf{x}_1)$ jelű összekötő szakasza — minden $\mathbf{x}_\lambda$ pontjával együtt — szintén az X-hez tartozik, azaz (4. ábra)

$$\mathbf{x}_\lambda \equiv \mathbf{x}_0 + \lambda(\mathbf{x}_1 - \mathbf{x}_0) = \lambda\mathbf{x}_1 + (1 - \lambda)\mathbf{x}_0 \in X,$$

vagy másként (31)

$$(\mathbf{x}_0, \mathbf{x}_1) \equiv \{\mathbf{x}_\lambda\} \subset X, \quad \text{ha} \quad \mathbf{x}_0, \mathbf{x}_1 \in X \quad \text{és} \quad 0 \leqq \lambda \leqq 1.$$

Ha az ilyen X ponthalmaz *zárt*, akkor *konvex tartományról* beszélünk; a továbbiakban az X-et rendszerint ilyennek tekintjük, ha ezt nem is hangsúlyozzuk mindig. Az X nem feltétlenül *korlátos* tartomány és az E_n valamely $E_n^{(\nu)}$ *alterében* is feküdhet. Az egész E_n *tér* konvex [mert nyilván bármely $\mathbf{x}_0 = (x_{i0})$, $\mathbf{x}_1 = (x_{i1})$ pontpárjával együtt az $\mathbf{x}_\lambda = (x_i + \lambda \Delta x_i)$ pontokat is tartalmazva], és a Θ *üres halmaz* is tekinthető annak.

Említsük meg a konvex halmaz, ill. tartomány néhány sajátságát!

Ha m adott halmaz, pl.

$$X_1, X_2, \ldots, X_m, \tag{32a}$$

konvex, akkor
$$X \equiv \bigcap_{\mu=1}^{m} X_\mu$$

közös részük (metszetük) is konvex. Ui. ha $\mathbf{x}_0, \mathbf{x}_1 \in X$, akkor $\mathbf{x}_0, \mathbf{x}_1 \in X_\mu$ szintén, sőt konvexitásuk miatt $(\mathbf{x}_0, \mathbf{x}_1) \subset X_\mu$ is, s így $(\mathbf{x}_0, \mathbf{x}_1) \subset X$ is igaz, q. e. d.

Ha az X konvex halmaz *nem korlátos*, akkor minden $\mathbf{x}_0 \in X$ pontból indítható egy

$$(\mathbf{x}_0, \mathbf{x}_\infty) \equiv \{\mathbf{x}_0 + \lambda\mathbf{s}; \quad \lambda \geqq 0\} \subset X \tag{32b}$$

félegyenes. Ui. X korlátlansága folytán található egy $|\mathbf{x}_\infty| \to \infty$ sajátságú $\mathbf{x}_\infty$ pontja, és X konvexitása miatt $(\mathbf{x}_0, \mathbf{x}_\infty) \subset X$, q. e. d.

Ha X konvex tartomány és

$$\{\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \ldots, \mathbf{x}_m\} \subset X, \text{ akkor } \{\lambda_1\mathbf{x}_1 + \lambda_2\mathbf{x}_2 + \ldots + \lambda_m\mathbf{x}_m; \ \sum_\mu \lambda_\mu = 1, \ \lambda_\mu \geqq 0\} \subset X,$$

vagyis az X adott pontjainak ún. *konvex lineáris kombinációi* X-be tartoznak, s ott együttesen egy ún. *konvex poliédert* képeznek.

Ha két konvex tartomány X_1 és X_2 csupán *közös* $\mathbf{x}_0$ *határponttal* reldelkezik, akkor *osztó hipersík* iktatható közéjük, azaz

$$\mathbf{x}_0 = X_1 \cap X_2 \text{ esetén } \mathbf{a}^*(\mathbf{x} - \mathbf{x}_0) = \mathbf{a}^*\mathbf{x} - c = 0 \text{ és ha } \mathbf{a}^*\mathbf{x} \begin{cases} \geqq c, \text{ akkor } \mathbf{x} \in X_1, \\ \leqq c, \text{ akkor } \mathbf{x} \in X_2. \end{cases}$$

2'. Térjünk át most az ún. konvex függvények és sajátságaik tanulmányozására.

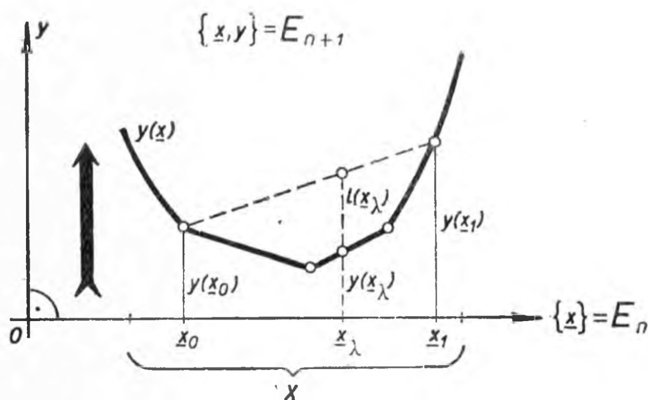
Definíció: *Az* $X \subset E_n$ *konvex tartományban értelmezett* $y = y(\mathbf{x})$ *függvényt akkor mondjuk ott „alulról" k o n v e xnek, ha a függvényérték semmilyen* $(\mathbf{x}_0, \mathbf{x}_1) \subset X$ *szakaszon nem emelkedik lineárisan interpolált értéke fölé, azaz*

$$y(\mathbf{x}_\lambda) \equiv y[\mathbf{x}_0 + \lambda(\mathbf{x}_1 - \mathbf{x}_0)] \leqq y(\mathbf{x}_0) + \lambda[y(\mathbf{x}_1) - y(\mathbf{x}_0)] \equiv l(\mathbf{x}_\lambda), \quad (33a)$$

vagy másként

$$y(\mathbf{x}_\lambda) \equiv y[\lambda\mathbf{x}_1 + (1-\lambda)\mathbf{x}_0] \leqq \lambda y(\mathbf{x}_1) + (1-\lambda)y(\mathbf{x}_0) \equiv l(\mathbf{x}_\lambda). \quad (33b)$$

Geometriailag — az E_n térre ortogonálisan „felfelé" irányított $y(> 0)$ féltengelyű E_{n+1} térben* — a (33) azt jelenti, hogy az $y(\mathbf{x})$ konvex hiperfelület semmilyen hiperhúrja „fölé" nem emelkedik (5. ábra).



5. ábra

Függvényünk *szigorúan konvex,* ha a (33) formulában $\leqq$ helyett $<$ írható, az $\mathbf{x}_0 \neq \mathbf{x}_1$ megszorítás mellett.

Függvényünk *(szigorúan) konkáv,* ha a $-y(\mathbf{x})$ függvény (szigorúan) konvex. A *lineáris* $y(\mathbf{x}) = \mathbf{a}^*\mathbf{x}$ függvény akár konvexnek, akár konkávnak is tekinthető (mindkettő nem szigorúan).

Egy konvex függvény *folytonos* az X belsejében. Ui. a (33) bármely $\mathbf{x}_0 \in X$ belső pont $|d\mathbf{x}| < \varepsilon$ környezetének minden $(\mathbf{x}_0, \mathbf{x}_0 + d\mathbf{x} \equiv \mathbf{x}_1)$ szakaszára igaz és határátmenettel

$$(0 =) \lim_{\mathbf{x}_1 \to \mathbf{x}_0} \mathbf{y}^*(\mathbf{x}_0)\lambda(\mathbf{x}_1 - \mathbf{x}_0) \leqq \lim_{\mathbf{x}_\lambda \to \mathbf{x}_0} [y(\mathbf{x}_\lambda) - y(\mathbf{x}_0)] \leqq$$

$$\leqq \lim_{\lambda \to 0} \lambda[y(\mathbf{x}_1) - y(\mathbf{x}_0)] = 0, \text{ q. e. d.} \quad (34)$$

* $E_{n+1} = \{\hat{\mathbf{x}}\} = \{\mathbf{x} + y\mathbf{e}_{n+1};\ \mathbf{x} \in E_n,\ \mathbf{x}^*\mathbf{e}_{n+1} = 0,\ \mathbf{e}_{n+1}$ „↑"$\}$.

1. Pl. Igazoljuk, hogy ha a $Q(\mathbf{x}) \equiv \mathbf{x}^*\mathbf{C}\mathbf{x}$ $(\mathbf{C} = \mathbf{C}^*)$ kvadratikus alak *pozitív szemidefinit* (azaz $\mathbf{x} \neq 0$-nál $Q \geqq 0$) akkor egyszersmind konvex is!

Mivel $0 < \lambda < 1$ esetén

$\lambda^2 \Delta\mathbf{x}^*\mathbf{C}\,\Delta\mathbf{x} \leqq \lambda\Delta\mathbf{x}^*\mathbf{C}\,\Delta\mathbf{x}$, továbbá $\mathbf{x}_0^*\mathbf{C}\,\Delta\mathbf{x} = x_0^*\mathbf{C}\,\Delta x = (\mathbf{C}\mathbf{x}_0)^*\Delta\mathbf{x} = \Delta\mathbf{x}^*\mathbf{C}\mathbf{x}_0$,

így $\mathbf{x}_1 - \mathbf{x}_0 = \Delta\mathbf{x}$, $Q(\mathbf{x}_1) - Q(\mathbf{x}_0) = \Delta Q$ jelöléssel írható, hogy

$$Q(\mathbf{x}_0 + \lambda\,\Delta\mathbf{x}) = (\mathbf{x}_0 + \lambda\,\Delta\mathbf{x})^*\mathbf{C}(\mathbf{x}_0 + \lambda\,\Delta\mathbf{x}) = \mathbf{x}_0^*\mathbf{C}\mathbf{x}_0 + 2\lambda\mathbf{x}_0^*\mathbf{C}\,\Delta\mathbf{x} + \lambda^2\Delta\mathbf{x}^*\mathbf{C}\,\Delta\mathbf{x} \leqq$$
$$\leqq \mathbf{x}_0^*\mathbf{C}\mathbf{x}_0 + \lambda[2\mathbf{x}_0^*\mathbf{C}\,\Delta\mathbf{x} + \Delta\mathbf{x}^*\mathbf{C}\,\Delta\mathbf{x}] = Q(\mathbf{x}_0) + \lambda\,\Delta Q, \quad \text{q. e. d.} \qquad (35)$$

Megjegyzendő, hogy *pozitív definit* Q (azaz $\mathbf{x} \neq 0$-nál $Q > 0$) esetén a $\lambda^2\Delta\mathbf{x}^*\mathbf{C}\Delta\mathbf{x} < \Delta\mathbf{x}^*\mathbf{C}\,\Delta\mathbf{x}$ $(0 < \lambda < 1)$ egyenlőtlenség alkalmazásával igazoljuk a Q *szigorúan konvex* jellegét.

3'. Most megadjuk az X konvex tartományban értelmezett $y = y(\mathbf{x})$ függvény ottani *konvexitásának* néhány, a továbbiakban gyakran felhasználandó *kritériumát*, azaz szükséges és elégséges feltételét, számolva a fellépő deriváltak létezésével. E kritériumokhoz lényegében a

$$\varphi(\lambda) = y(\mathbf{x}_0 + \lambda\,\Delta\mathbf{x}) \quad (0 \leqq \lambda \leqq 1) \qquad (36)$$

skalár-skalár függvény közismert konvexitási feltételei alapján jutunk. Itt $\mathbf{x}_0$, $\mathbf{x}_0 + \Delta\mathbf{x}$ az X tetszőleges pontpárja! Ha az X konvex tartományról egyebet nem mondunk, akkor $X = E_n$ értendő (mely — mint említettük — szintén konvex).

1. kritérium: *Az $y(\mathbf{x})$ függvény konvex ($\mathbf{x}$ szerint), ha a $\varphi(\lambda)$ is az (λ szerint) és megfordítva.* Ui. a (36) szerint és $\Delta\varphi = \varphi(1) - \varphi(0)$, $y(\mathbf{x}_0 + \Delta x) - y(\mathbf{x}_0) \equiv \equiv \Delta y$ jelöléssel élve írható, hogy

$$\varphi(\lambda) \leqq \varphi(0) + \lambda\,\Delta\varphi \quad \text{megfelelője} \quad y(\mathbf{x}_\lambda) \equiv y(\mathbf{x}_0) + \lambda\,\Delta y, \qquad (37a)$$

és megfordítva, q. e. d.

2. kritérium: *Az $y(\mathbf{x})$ függvény konvex, ha*

$$d\varphi \equiv \varphi'(0)\cdot 1 \leqq \Delta\varphi \quad \text{illetve} \quad dy \equiv \mathbf{y}^*(\mathbf{x}_0)\,\Delta\mathbf{x} \leqq \Delta y, \qquad (37b)$$

(vagyis ha az $y(\mathbf{x})$ „felület" sehol sem kerül érintősíkja „alá") *és megfordítva.* Ui. a (37*b*) láthatóan a (37*a*)-ból nyerhető $\lambda \to 0$ határátmenettel.

3. kritérium: *Az $y(\mathbf{x})$ függvény konvex, ha*

$$d\varphi \equiv \varphi'(\lambda)\cdot 1, \quad \text{illetve} \quad dy \equiv \mathbf{y}^*(\mathbf{x}_0 + \lambda\,\Delta\mathbf{x})\,\Delta\mathbf{x} \qquad (37c)$$

monoton nő és megfordítva. Ui. a (37*b*)-ből nyerhető — benne a 0 és 1, ill. az $\mathbf{x}_0$ és $\mathbf{x} + d\mathbf{x}_0$ szerepét felcserélve — hogy

$$\varphi'(0)\cdot 1 \leqq \Delta\varphi \leqq \varphi'(1)\cdot 1 \text{ és megfelelően } \mathbf{y}^*(\mathbf{x}_0)\,\Delta\mathbf{x} \leqq \Delta y \leqq \mathbf{y}^*(\mathbf{x}_0 + \Delta\mathbf{x})\,\Delta\mathbf{x}.$$

4. kritérium: Az $y(\mathbf{x})$ *függvény konvex, ha*

$$\varphi''(0) \geqq 0, \quad \text{illetve} \quad \Delta\mathbf{x}^*\mathbf{Y}(\mathbf{x}_0)\,\Delta\mathbf{x} \geqq 0, \tag{37d}$$

(vagyis ha $\Delta\mathbf{x}^*\mathbf{Y}(\mathbf{x}_0)\,\Delta\mathbf{x}$ szemidefinit pozitív) és megfordítva. Ui. a (37*c*)-ből

$$0 \leqq \Delta\varphi = \varphi''(0) \cdot 1 + \tilde{\varepsilon} \quad \text{és megfelelően} \quad 0 \leqq \Delta\mathbf{x}^*\Delta\mathbf{y} = \Delta\mathbf{x}^*\mathbf{Y}(\mathbf{x}_0)\,\Delta\mathbf{x} + \tilde{\varepsilon}$$

módon következik a (37*d*).

4'. Térjünk ki még a konvex függvények **n é h á n y t u l a j d o n s á g á r a.** — Ha $y = y(\mathbf{x})$ konvex, akkor a lineáris transzformált

$$\eta(\tilde{\mathbf{x}}) \equiv y(\mathbf{x})\Big|_{\mathbf{x}=\mathbf{A}\tilde{\mathbf{x}}+\mathbf{b}} = y(\mathbf{A}\tilde{\mathbf{x}} + \mathbf{b}) \tag{38a}$$

függvény is az, tehát

$$\eta[\tilde{\mathbf{x}}_0 + \lambda(\tilde{\mathbf{x}}_1 - \tilde{\mathbf{x}}_0)] \leqq \eta(\tilde{\mathbf{x}}_0) + \lambda[\eta(\tilde{\mathbf{x}}_1) - \eta(\tilde{\mathbf{x}}_0)]. \tag{38b}$$

Ui. a (33*a*) szerint

$$y[\mathbf{x}_0 + \lambda(\mathbf{x}_1 - \mathbf{x}_0)] \leqq y(\mathbf{x}_0) + \lambda[y(\mathbf{x}_1) - y(\mathbf{x}_0)],$$

amiből, $\mathbf{x} = \mathbf{A}\tilde{\mathbf{x}} + \mathbf{b}$ transzformációval már a (38*b*) következik, q. e. d.

Ha $y = y(\mathbf{x})$ *konvex, akkor a konvex lineáris transzformációval* nyert

$$y(\mathbf{x})\Big|_{\mathbf{x}=\sum_i \lambda_i \mathbf{x}_i} = y\left(\sum_{i=0} \lambda_i \mathbf{x}_i\right)\left(\lambda_i \geqq 0,\ \sum_{i=0}^{n} \lambda_i = 1\right) \tag{39a}$$

függvény is konvex, mégpedig

$$y(\sum \lambda_i \mathbf{x}_i) \leqq \sum_i \lambda_i y(\mathbf{x}_i). \tag{39b}$$

Ui. a (33*b*) szerint az $(\mathbf{x}_0, \mathbf{x}_1)$ szakaszon

$$y(\mathbf{x}_{\mathrm{I}}) \equiv y[\lambda_1 \mathbf{x}_1 + (1 - \lambda_1')\mathbf{x}_0] \leqq \lambda_1' y(\mathbf{x}_1) + (1 - \lambda_1')y(\mathbf{x}_0) \quad (0 \leqq \lambda_1' \leqq 1)$$

és hasonlóan az $(\mathbf{x}_{\mathrm{I}}, \mathbf{x}_0)$ szakaszon

$$y(\mathbf{x}_{\mathrm{II}}) \equiv y[\lambda_2' \mathbf{x}_2 + (1 - \lambda_2')\mathbf{x}_{\mathrm{I}}] \leqq \lambda_2 y(\mathbf{x}_2) + (1 - \lambda_2)y(\mathbf{x}_{\mathrm{I}}) \quad (0 \leqq \lambda_2 \leqq 1),$$

vagy az x_{I} behelyettesítésével és a $\lambda_1 = (1 - \lambda_2)\lambda_1'$, $\lambda_0 = (1 - \lambda_2)(1 - \lambda_1)$ jelöléssel, végül az $y(\mathbf{x}_{\mathrm{I}})$ majorálásával

$$y(\lambda_2 \mathbf{x}_2 + \lambda_1 \mathbf{x}_1 + \lambda_0 \mathbf{x}_0) \leqq \lambda_2 y(\mathbf{x}_2) + \lambda_1 y(\mathbf{x}_1) + \lambda_0 y(\mathbf{x}_0),$$

$$\lambda_2 + \lambda_1 + \lambda_0 = \lambda_2 + (1 - \lambda_2)(\lambda' + 1 - \lambda') = \lambda_2 + 1 - \lambda_2 = 1;$$

hasonló lépések útján, teljes indukcióval nyerhető a (39*b*).

Az $E_{n+1} = \{\mathbf{x} + y\mathbf{e}_{n+1};\ \mathbf{x} \perp \mathbf{e}_{n+1}\ \text{„}\uparrow\text{"}\}$ *térben az* $y = y(\mathbf{x})$ *konvex felületen és „fölötte" elhelyezkedő*

$$K = \{\mathbf{x} + y\mathbf{e}_{n+1};\ y \geqq y(\mathbf{x})\} \tag{40a}$$

ponthalmaz maga is konvex. Ui. a felület konvexitása folytán bármely $(\mathbf{x}_0, \mathbf{x}_1)$ szakaszon

$$y[\mathbf{x}_0 + \lambda(\mathbf{x}_1 - \mathbf{x}_0)] \leqq y(\mathbf{x}_0) + \lambda[y(\mathbf{x}_1) - y(\mathbf{x}_0)],$$

vagyis a felület egyetlen húrja, egyetlen pontjával sem ereszkedik a felület alá, s így mind a K-hoz tartozik, ami — a (31) értelmében — már a K konvexitását jelenti, q. e. d.

Megjegyzendő, hogy *az előbbi K konvex ponthalmaznak az féltérrel képzett*

$$S = \{x + \alpha\mathbf{e}_{n+1}\}\ \textit{síkkal, ill. az}\ F = \{\mathbf{x} + y\mathbf{e}_{n+};\ y \leqq \alpha\}$$

(40b)

$$(K \cap S) = \{\mathbf{x} + y\mathbf{e}_{n+1};\quad \alpha = y(\mathbf{x}),\quad \text{ill.}\quad (K \cap F) = \{\mathbf{x} + y\mathbf{e}_{n+1};\quad \alpha \geqq y(x)\}$$

közös rész (metszete) szintén konvex (esetleg üres). Ui. ha nem így lenne, vagyis akadna külső pontokkal is rendelkező húrjuk, akkor a K sem lehetne konvex, ami ellenkezik a feltevéssel, q. e. d. (Egyébként ugyanezt konvex halmazok szintén konvex metszeteként is felfoghatjuk.) Üres halmazt mint metszetet nyilván akkor kapunk, ha $\alpha < \hat{y} = \min y(\mathbf{x})$.

Ha $y_1(\mathbf{x}), y_2(\mathbf{x}), \ldots, y_n(\mathbf{x})$ konvex függvények, akkor

a) az $\sum_{i=1}^{n} u_i y_i(\mathbf{x})$ $(u_i \geqq 0)$ kombinációs függvény és (41a)

b) az $\eta(\mathbf{x}) \equiv \max[y_1(\mathbf{x}), y_2(\mathbf{x}), \ldots, y_n(\mathbf{x})]$ „csúcs"-függvény (41b)

szintén konvex. Ui. az $y_i(\mathbf{x})$ konvexitása és $u_i \geqq 0$ folytán

$$u_i y_i(\mathbf{x}_\lambda) \leqq [y_i(\mathbf{x}) + \lambda\, \Delta y_i] u_i$$

és így

$$\sum_{i=1}^{n} u_i y(\mathbf{x}_\lambda) \leqq \sum y_i(\mathbf{x}_0) + \lambda\, \Delta y_i] u_i, \quad \text{q. e. d. ad } a).$$

Az $\eta(\mathbf{x})$ „csúcs"-felület nyilván az $y_i(\mathbf{x})$ konvex felületek feletti K_i konvex ponthalmazok $K = \bigcap_i K_i$ konvex közös részének (metszetének) F határfelülete, mely maga is konvex, különben K sem lehetne az, q. e. d. ad *b)*.

Végül hangsúlyozzuk, hogy az $y(\mathbf{x})$ *konvex függvények az X konvex tartomány belsejébe eső globális minimumai nyilván lokális minimumok* is,

$$y(\mathbf{x}) \geqq y(\mathbf{x}_l) = \hat{y} \quad \text{és} \quad y'(\mathbf{x}_l) \equiv \mathbf{y}(\mathbf{x}_l) = \mathbf{0} \tag{42a, b}$$

tulajdonsággal, és a minimumpontok összessége, vagyis a

$$K \cap \hat{S} = \{\mathbf{x}_l + \hat{y}\mathbf{e}_{n+1};\ \hat{y} = y(\mathbf{x}_l)\} \tag{42c}$$

közös rész (metszet), esetleg üres *konvex ponthalmazt képez* (mert egyébként a K és így az $y(\mathbf{x})$ sem lehetne konvex). Az X tartomány határára eső *globális minimumok* esetén pedig

$$y(\tilde{\mathbf{x}}) \geqq y(\tilde{\mathbf{x}}_h) = \hat{y}, \quad y'(\tilde{\mathbf{x}}_h) = \mathbf{y}(\tilde{\mathbf{x}}_h) = \mathbf{c}. \tag{43}$$

Utoljára, ha az $y(\mathbf{x})$ függvény az X-ben *szigorúan konvex, akkor csak egyetlen globális extrémuma lehet,* mégpedig az X belsejében ($\hat{\mathbf{x}} \equiv \mathbf{x}_l$), vagy a határán ($\hat{\mathbf{x}} \equiv \tilde{\mathbf{x}}_h$), és ott°

$$\left.\begin{matrix} y(\mathbf{x}_l) \\ y(\tilde{\mathbf{x}}_h) \end{matrix}\right\} = \hat{y} < y(\mathbf{x}), \quad \left.\begin{matrix} \mathbf{y}(\mathbf{x}_l) = \mathbf{0} \\ \mathbf{y}(\tilde{\mathbf{x}}_h) = \mathbf{c} \end{matrix}\right\}. \tag{44}$$

6'. Befejezésül térjünk ki röviden a *szigorúan konvex* $y(\mathbf{x})$ függvény egy nevezetes transzformációjára. E végből állapítsuk meg, hogy a már többször említett E_{n+1} térben az $y = y(\mathbf{x})$ felület $P(\mathbf{x}, y)$ pontjához tartozó *érintősík* egyenlete

$$(\boldsymbol{\xi} - \mathbf{x})^*\mathbf{y}(\mathbf{x}) - [\eta - y(\mathbf{x})] = 0, \quad [\mathbf{y}(\mathbf{x}) \equiv \mathbf{grad}\, y(\mathbf{x})], \tag{45a}$$

az érintősík *η-tengelymetszete* pedig ($\boldsymbol{\xi} = \mathbf{0}$ helyettesítéssel)

$$\eta = y(\mathbf{x}) - \mathbf{x}^*\mathbf{y}(\mathbf{x}) \equiv \eta(\mathbf{x}). \tag{45b}$$

Minthogy $y(\mathbf{x})$ függvény szigorú konvexitása folytán az $\mathbf{y}(\mathbf{x}) \equiv \mathbf{grad}\, y(\mathbf{x})$ derivált szigorúan monoton (növekvő), így ez egyértelműen *invertálható,* $\mathbf{x} = \mathbf{x}(\mathbf{y})$ alakra. Felhasználásával η-tengelymetszet előbbi kifejezése az

$$\eta = y[\mathbf{x}(\mathbf{y})] - \mathbf{x}^*(\mathbf{y})\mathbf{y} \equiv \eta(\mathbf{y}) \tag{45c}$$

alakot ölti. Ezt az $\eta(\mathbf{y})$ függvényt nevezik az $\mathbf{y}(\mathbf{x})$ függvény *Legendre-transzformáltjának.* Vele kapcsolatban meg lehet mutatni, hogy

A) az $\eta(\mathbf{y})$ transzformált függvény *szigorúan konkáv,* (45*d*) [míg az $y(\mathbf{x})$ eredeti függvény szigorúan konvex volt];

B) $$\mathbf{grad}^*\eta(\mathbf{y}) = \mathbf{y}^*\mathbf{x}'(\mathbf{y}) - \mathbf{x}^*(\mathbf{y}) - \mathbf{y}^*\mathbf{x}'(\mathbf{y}) = -\mathbf{x}^*(\mathbf{y}). \tag{45e}$$

V°. Kvadratikus alakok az E_n térben. *1'*. A kvadratikus alakok korábbi tanulmányaink során — és ott az E_2 és az E_3 térre szorítkozva — nagy fontosságú geometriai és műszaki vonatkozásokkal (pl. másodrendű görbék és felületek*, rugalmasságtani alkalmazások**) hívták fel magukra a figyelmet. Ugyanezek most — és itt már az E_n térre általánosítva — *a szabad és kötött szélsőérték-számítás, a kvadratikus és a konvex programozás* nélkülözhetetlen segédeszközeiként jelennek meg. Szükséges tehát, hogy — az eddig rövid uta-

° Pl. az $y = e^x$ függvény ugyan szigorúan konvex, de $\hat{y} = 0$ minimumát *nem* veszi fel; ez csak végtelenbeli határértéke.

* és ** L. pl. *Fazekas:* Vektoranalízis.

lásokon túlmenőleg — külön is foglalkozzunk a kvadratikus alakok főbb sajátságaival, vizsgálati módszereivel stb.

Induljunk ki e végből az ún. bilineáris alakból!

1. ***Definíció:*** *A $Q(\mathbf{x}, \mathbf{y})$ függvényt az $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in E_n$ vektorpár b i l i n e á r i s a l a k jának (formájának) mondjuk, ha $Q(\mathbf{x}, \mathbf{y}_0)$ ill. $Q(\mathbf{x}_0, \mathbf{y})$ lineáris függvénye* **x***-nek, ill.* **y***-nak,* s így

$$Q(c_1\mathbf{x}_1 + c_2\mathbf{x}_2, \mathbf{y}_0) = c_1Q(\mathbf{x}_1, \mathbf{y}_0) + c_2Q(\mathbf{x}_2, \mathbf{y}_0),$$

ill. (46*a*, *b*)

$$Q(\mathbf{x}_0, c_1\mathbf{y}_1 + c_2\mathbf{y}_2) = c_1Q(\mathbf{x}_0, \mathbf{y}_1) + c_2Q(\mathbf{x}_0, \mathbf{y}_2).$$

E definíciót az **x** és az **y** vektornak valamely $E \equiv [\mathbf{e}_1, \ldots, \mathbf{e}_i, \ldots, \mathbf{e}_n]$ bázisbeli $\mathbf{x} = \sum_i x_i\mathbf{e}_i$, ill. $\mathbf{y} = \sum_j y_j\mathbf{e}_j$ előállítására alkalmazva, továbbá a $Q(\mathbf{e}_i, \mathbf{e}_j) = a_{ij}$ és az $\mathbf{A} = [a_{ij}]$ jelöléseket bevezetve, azt kapjuk, hogy $(i, j = 1, 2, \ldots, n$ mellett)

$$Q(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = Q(\sum_i x_i\mathbf{e}_i, \sum_j y_j\mathbf{e}_j) = \sum_{i,j} x_ia_{ij}y_j = \mathbf{x}^*\mathbf{A}\mathbf{y} \quad (\neq \mathbf{y}^*\mathbf{A}\mathbf{x}), \tag{47}$$

ahol **A** *a* $Q(\mathbf{x}, \mathbf{y})$ *alaknak* **E** *bázisra vonatkozó matrixa* (amely általában nem szimmetrikus). Ha ugyanezen $Q(\mathbf{x}, \mathbf{y})$ alakot egy másik bázisra, pl. az

$$\mathbf{E}' \equiv [\mathbf{e}_1', \ldots, \mathbf{e}_i', \ldots, \mathbf{e}_n'] = [\mathbf{e}_1, \ldots, \mathbf{e}_i, \ldots, \mathbf{e}_n]\begin{bmatrix} c_{11}\, c_{12} \ldots c_{1n} \\ \cdots\cdots\cdots \\ c_{i1}\, c_{i2} \ldots c_{in} \\ \cdots\cdots\cdots \\ c_{n1}\, c_{n2} \ldots c_{nn} \end{bmatrix} \equiv \mathbf{EC} \tag{48a}$$

bázisra vonatkoztatjuk, akkor matrixa is módosul, mégpedig eképpen:

$$\mathbf{B} = [b_{kl}] = [Q(\mathbf{e}_k', \mathbf{e}_l')] = [Q(\sum_i c_{ik}\mathbf{e}_i, \sum_j c_{jl}\mathbf{e}_j)] =$$

$$= [\sum_{i,j} a_{ij}c_{ik}c_{jl}] = [\sum_{i,j} c_{ki}^*a_{ij}c_{jl}] = \mathbf{C}^*\mathbf{AC}. \tag{48b}$$

A $Q(\mathbf{x}, \mathbf{y})$ bilineáris alaknak az **E'**, ill. **E** bázisra vonatkozó **B**, ill. **A** matrixát *hasonlónak* szokás nevezni; *hasonlósági tényezőként* a bázistranszformáló **C** matrix és **C*** transzportja szolgál.

2'. A bilineáris alak egy speciális esete és értéke vezet a kvadratikus alakra.

2. ***Definíció:*** *A $Q(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = Q(\mathbf{y}, \mathbf{x})$ sajátságú szimmetrikus bilineáris alak* $\mathbf{y} = \mathbf{x}$*-nél nyert $Q(\mathbf{x}, \mathbf{x})$ értékét az $\mathbf{x} \in E_n$ vektor k v a d r a t i k u s a l a k jának*

nevezzük, a $Q(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = Q(\mathbf{y}, \mathbf{x})$*-et pedig a* $Q(\mathbf{x}, \mathbf{x})$ *poláris formájának mondjuk.* Írható tehát, hogy

$$Q(\mathbf{x}, \mathbf{x}) = Q(\mathbf{x}, \mathbf{y})\Big|_{\mathbf{y}=\mathbf{x}} = \sum_{i,j} x_i a_{ij} y_j\Big|_{y_j=x_j} = \mathbf{x}^*\mathbf{A}\mathbf{y}\Big|_{\mathbf{y}=\mathbf{x}} =$$
$$= Q(\mathbf{y}, \mathbf{x})\Big|_{\mathbf{y}=\mathbf{x}} = \sum_{i,j} y_j a_{ji} x_i\Big|_{y_j=x_j} = \mathbf{y}^*\mathbf{A}^*\mathbf{x}\Big|_{\mathbf{y}=\mathbf{x}} =$$
$$= \sum_{i,j} x_i a_{ij} x_j = \mathbf{x}^*\mathbf{A}\mathbf{x} = \sum_{i,j} x_j a_{ji} x_i = \mathbf{x}^*\mathbf{A}^*\mathbf{x}, \tag{49}$$

ahol $\mathbf{A} = \mathbf{A}^*$ *a* $Q(\mathbf{x}, \mathbf{x})$ *alaknak az* $\mathbf{E}$ *bázisra vonatkozó szimmetrikus (tükrös) matrixa.* Ugyanez a (48*a*) alatti $\mathbf{E}'$ *bázisra vonatkozólag* a (48*b*)-nek megfelelő, de most szintén szimmetrikus

$$\mathbf{B} = \mathbf{C}^*\mathbf{A}\mathbf{C} = \mathbf{C}^*\mathbf{A}^*\mathbf{C} = (\mathbf{C}^*\mathbf{A}\mathbf{C})^* = \mathbf{B}^* \tag{50}$$

alakot ölti.

Megjegyzendő, hogy *a kvadratikus alak egyértelműen meghatározza poláris formáját;* ui. a (46*a, b*) és a (49) szerint

$$Q(\mathbf{x} + \mathbf{y}, \mathbf{x} + \mathbf{y}) = Q(\mathbf{x}, \mathbf{x}) + Q(\mathbf{x}, \mathbf{y}) + Q(\mathbf{y}, \mathbf{x}) + Q(\mathbf{y}, \mathbf{y}) =$$
$$= Q(\mathbf{x}, \mathbf{x}) + 2Q(\mathbf{x}, \mathbf{y}) + Q(\mathbf{y}, \mathbf{y}),$$

ahonnan valóban

$$Q(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \frac{1}{2}[Q(\mathbf{x} + \mathbf{y}, \mathbf{x} + \mathbf{y}) - Q(\mathbf{x}, \mathbf{x}) - Q(\mathbf{y}, \mathbf{y})]. \tag{51}$$

3'. Most — a kvadratikus alakkal kapcsolatban — néhány újabb fogalmat és tételt ismertetünk.

3. Definíció: *A Q kvadratikus alakot és* (egy $\mathbf{E}$ bázisra vonatkozó) $\mathbf{A}$ *matrixát is* (a Q előjel- és zérusviszonyai szempontjából)

a) pozitív definitnek mondjuk, ha

$$Q \equiv \mathbf{x}^*\mathbf{A}\mathbf{x} > 0 \quad \text{minden } \mathbf{0} \neq \mathbf{x}\text{-re;} \tag{52a}$$

b) pozitív szemidefinitnek, ha

$$Q \equiv \mathbf{x}^*\mathbf{A}\mathbf{x} \geqq 0 \quad \text{minden } \mathbf{x}\text{-re;} \tag{52b}$$

c) negatív (szemi)definitnek, ha

$$-Q \text{ és } -\mathbf{A} \text{ pozitív (szemi)definit;} \tag{52c}$$

d) indefinitnek, ha

$$Q \equiv \mathbf{x}^*\mathbf{A}\mathbf{x} \gtreqless 0. \tag{52d}$$

A fentiek szerint pozitív szemidefinit Q nem vehet fel negatív értéket, sőt pozitív definit Q még zérus értéket sem, csupán $\mathbf{x} = \mathbf{0}$-nál. Ha az $\mathbf{x}$ bizonyos koordinátáit *zérussá* tesszük, a Q a többi változóra nézve megőrzi (szemi)-definit jellegét. Ebből következik, hogy (szemi)definit $\mathbf{A}$ matrix bármely *fő-minora*, amely szimmetrikus sorok és oszlopok törlésével jön létre, szintén (szemi)-definit marad. Ily módon pozitív (szemi)definit $\mathbf{A}$ *főátlóbeli* elemei is csak pozitívak (nemnegatívak) lehetnek. Végül szemidefinit $\mathbf{A}$ egy főátlóbeli eleme csakis zérus lehet, ha a hozzátartozó sor és oszlop minden más eleme is az.

Legyen $Q(\mathbf{x}, \mathbf{y})$ egy pozitív definit $Q(\mathbf{x}, \mathbf{x})$ poláris alakja; a (46), (49) és (51) alapján könnyen ellenőrizhető, hogy

$$\alpha)\ Q(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = Q(\mathbf{y}, \mathbf{x}), \quad \beta)\ Q(\mathbf{x}_1 + \mathbf{x}_2, \mathbf{y}) = Q(\mathbf{x}_1, \mathbf{y}) + Q(\mathbf{x}_2, \mathbf{y}), \quad (53a)$$

$$\gamma)\ Q(c\mathbf{x}, \mathbf{y}) = cQ(\mathbf{x}, \mathbf{y}), \quad \delta)\ Q(\mathbf{x}, \mathbf{x}) > 0, \quad \text{ha} \quad \mathbf{x} \neq \mathbf{0} \quad \text{és} \quad Q(\mathbf{0}, \mathbf{0}) = 0.$$

Látható, hogy a pozitív definit $Q(\mathbf{x}, \mathbf{x})$ kvadratikus alaknak megfelelő $Q(\mathbf{x}, \mathbf{y})$ bilineáris alak eleget tesz a valós E_n euklideszi térben értelmezett $\mathbf{x}^*\mathbf{y}$ *skaláris szorzat* axiómáinak, s így maga is tekinthető annak. Más szóval a $Q(\mathbf{x}, \mathbf{x})$ lerögzítése után megállapodhatunk abban, hogy — az (51)-re is tekintettel —

$$\mathbf{x}^*\mathbf{y} \equiv Q(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \frac{1}{2}[Q(\mathbf{x} + \mathbf{y}, \mathbf{x} + \mathbf{y}) - Q(\mathbf{x}, \mathbf{x}) - Q(\mathbf{y}, \mathbf{y})]. \quad (53b)$$

Ez lényegében a valós E_n térnek (a skaláris szorzás tekintetében) a szokásostól eltérő értelmezhetőségét jelenti. (Megjegyzendő, hogy itt nem kívánunk élni e lehetőséggel!)

4'. Ismertessük és igazoljuk ezek után a kvadratikus alak *néhány, a továbbiak szempontjából érdekes sajátságát.*

1. Tétel: *Ha* $\mathbf{A}$ *(pozitív) szemidefinit, akkor minden* $\mathbf{x}^*\mathbf{A}\mathbf{x} = 0$ *tulajdonságú* $\mathbf{x}$ *vektorra igaz az, hogy* $\mathbf{A}\mathbf{x} = \mathbf{0}$.

Ui. $\mathbf{A}$ (pozitív) szemidefinitása folytán, minden $\mathbf{y}$-ra és λ-ra fennáll, hogy

$$\mathbf{0} \leqq (\mathbf{y} + \lambda\mathbf{x})^*\mathbf{A}(\mathbf{y} + \lambda\mathbf{x}) = \mathbf{y}^*\mathbf{A}\mathbf{y} + 2\lambda\mathbf{y}^*\mathbf{A}\mathbf{x} + \lambda^2(\mathbf{x}^*\mathbf{A}\mathbf{x}) = \mathbf{y}^*\mathbf{A}\mathbf{y} + 2\lambda\mathbf{y}^*\mathbf{A}\mathbf{x}. \quad (54a)$$

Ez bármely λ-ra és $\mathbf{y}$-ra csak akkor lehetséges, ha együtthatóik eltűnnek, azaz

$$\mathbf{y}^*\mathbf{A}\mathbf{x} = 0, \quad \text{sőt} \quad \mathbf{A}\mathbf{x} = \mathbf{0}, \quad \text{q. e. d.} \quad (54b)$$

Ezzel kapcsolatos a

2. Tétel: *Ha* $\mathbf{A}$ *definit, akkor reguláris is, és fordítva, ha* $\mathbf{A}$ *szemidefinit és reguláris, akkor definit is.*

Ui. $\mathbf{A}$ definitása folytán $\mathbf{x}^*\mathbf{A}\mathbf{x} = 0$, s így $\mathbf{A}\mathbf{x} = \mathbf{0}$ sajátságú $\mathbf{x}$ vektor csak egy van, mégpedig $\mathbf{x} = \mathbf{0}$, tehát

$$\mathbf{A}\mathbf{x} = \sum_i \mathbf{a}_i x_i \neq \mathbf{0}, \quad \text{ha} \quad \mathbf{x} = \sum_i x_i \mathbf{e}_i \neq \mathbf{0}. \quad (55a)$$

Ez viszont az $\mathbf{a}_i$ vektor l. ftls-ét, s így determinánsuk $|\mathbf{A}| \neq 0$ magatartását, ez pedig **A** regularitását (invertálhatóságát) jelenti. — Fordítva, reguláris **A**-nál $\mathbf{Ax} \neq \mathbf{0}$, ha $\mathbf{x} \neq \mathbf{0}$, tehát az **A** szemidefinitásából következő $\mathbf{Ax} = \mathbf{0}$, s így $\mathbf{x}^*\mathbf{Ax} = 0$ sajátságú **x** vektor csak egy van, az $\mathbf{x} = \mathbf{0}$, ami már **A** definitását jelenti, q. e. d.

3. ***Tétel:*** *Ha* **C** *tetszőleges* $(n \times m)$ *típusú matrix,* **A** *pedig pozitív szemidefinit, akkor ugyanilyen minden*

$$\underset{(m\times m)}{\mathbf{B}} = \underset{(m\times n)}{\mathbf{C}^*} \; \underset{(n\times n)}{\mathbf{A}} \; \underset{(n\times m)}{\mathbf{C}} \tag{56a}$$

alakú matrix is. Ha pedig **A** *definit és a* **C** *rangja,* $\varrho(\mathbf{C}) = m$ *(teljes oszloprang), akkor* **B** *is definit.*

Ui. **A** pozitív szemidefinitása folytán, $\mathbf{Cy} = \mathbf{x}$ helyettesítéssel írható, hogy

$$\mathbf{y}^*\mathbf{By} = \mathbf{y}^*(\mathbf{C}^*\mathbf{AC})\mathbf{y} = (\mathbf{Cy})^*\mathbf{A}(\mathbf{Cy}) = \mathbf{x}^*\mathbf{Ax} \geqq 0, \tag{56b}$$

minden **y**-ra és így minden **x**-re érvényesen. Ha továbbá **C** oszlopvektor-m-ese l. ftl, akkor $\mathbf{y} \neq \mathbf{0}$ esetén $\mathbf{Cy} = \mathbf{x} \neq \mathbf{0}$ szintén, következésképpen pozitív definit **A** esetén

$$\mathbf{y}^*\mathbf{By} = \mathbf{x}^*\mathbf{Ax} > 0, \tag{56c}$$

mégpedig minden $\mathbf{0} \neq \mathbf{x}$-ra és így minden $\mathbf{0} \neq \mathbf{y}$-ra is, q. e. d. Figyelemre méltók a tételből folyó alábbi

Következmények: *a)* A Q kvadratikus alak **E** bázisú $\mathbf{y}^*\mathbf{Ay}$ változata és az $\mathbf{E}' = \mathbf{EC}$ bázistranszformációnál jelentkező (s előzővel egyenlő értékű) $\mathbf{x}^*\mathbf{Bx}$ változata megegyező (in-, szemi-) definitású (definitás esetén csak teljes oszloprangú **C** esetén!), vagyis *a kvadratikus alak (in-, szemi-) definitása* a bázis változásával szemben *invariáns tulajdonság.* (57*a*)

b) Tetszőleges **C** esetén a $\mathbf{G} \equiv \mathbf{C}^*\mathbf{C} = \mathbf{C}^*\mathbf{E}\,\mathbf{C}$ *matrix pozitív szemidefinit, sőt ha* **C** *teljes oszloprangú, akkor* **G** *definit.* (A tételből $\mathbf{A} = \mathbf{E}$-nél következik.) (57*b*)

c) Ha **A** *definit, akkor* $\mathbf{A}^{-1}$ *is az.* (A tételből $\mathbf{C} = \mathbf{C}^* = \mathbf{A}^{-1}$-nél következik).

5'. A $Q = \mathbf{x}^*\mathbf{A}\,\mathbf{x}$ kvadratikus alak főbb fogalmainak, sajátságainak ismeretében, térjünk át az *Egerváry-féle matrixalgoritmus* alkalmazására, mellyel az **A** és így a Q *sokoldalú vizsgálata* válik lehetővé; ilyen pl. az **A** definitásának, ill. szemidefinitásának és rangjának, ill. indefinitásának megállapítása; a Q tiszta négyzetes, ún. kanonikus alakra való transzformálása stb.

Célszerű tárgyalási előkészületként — a szokásnak megfelelően — a *szimmetrikus* **A** *matrixot* szükség esetén alkalmas oszlopcserékkel és (a szimmetria megóvása érdekében) hasonló sorcserékkel úgy *rendezzük át,* hogy l. ftl oszlop-

és sorvektorai az első $r(\leqq n)$ helyre kerüljenek s így *az első r bal felső főminora reguláris legyen,* azaz

$$(d_0 = 1),\ d_1 = a_{11} \neq 0,\ d_2 = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} \neq 0,\ \ldots,\ d_r = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1r} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2r} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{r1} & a_{r2} & \ldots & a_{rr} \end{vmatrix} \neq 0. \quad (r \leqq n) \tag{58}$$

(*Tényleges számítás során* ez, az elméleti tárgyalás egyszerűsítésére hivatott előzetes átrendezés *mellőzhető,* vagyis — mint az 1. §. *c) β)* III° helyén láttuk — a l. ftl vektorok más sorrendű elhelyezkedése mellett is lebonyolítható és értelemszerűen felhasználható az említett algoritmus!)

Ezek után matrixalgoritmusunk lépései, ill. a nyomukban adódó matrixok eképpen alakulnak.

Induló helyzet: $\mathbf{A}_0 = \mathbf{A} = \mathbf{A}^* = \mathbf{A}_0^*$. (59*a*)

Első lépés:

$$\mathbf{A}_1 = \mathbf{A}_0 - \frac{\mathbf{a}_1\mathbf{a}_1^*}{a_{11}} \equiv \mathbf{A}_0 - \mathbf{c}_1 a_{11} \mathbf{c}_1^* = \mathbf{A}_0 - \mathbf{D}_1 \tag{59b}$$

$$[a_{11} = d_1 \neq 0, \quad \mathbf{A}_1 = \mathbf{A}_1^*; \quad \mathbf{a}_1' = \mathbf{a}_{\prime}^{1*} = \mathbf{0}, \quad c_{11} = 1].$$

Második lépés:

$$\mathbf{A}_2 = \mathbf{A}_1 - \frac{\mathbf{a}_2'\mathbf{a}_2'^*}{a_{22}'} \equiv \mathbf{A}_1 - \mathbf{c}_2 a_{22}' \mathbf{c}_2^* \equiv \mathbf{A}_1 - \mathbf{D}_2 \tag{59c}$$

$$[a_{11}a_{22}' = a_{11}a_{22} - a_{12}^2 = d_2 \neq 0, \quad \mathbf{A}_2 = \mathbf{A}_2^*; \quad \mathbf{a}_\varrho'' = \mathbf{a}_{\prime\prime}^{\varrho*} = \mathbf{0},$$

$$c_{\varrho 2} = \delta_{\varrho 2}, \quad \varrho = 1,2] \tag{59c}$$

A k-adik lépés:

$$\mathbf{A}_k = \mathbf{A}_{k-1} - \frac{\mathbf{a}_k^{(k-1)}\mathbf{a}_k^{(k-1)*}}{a_{kk}^{(k-1)}} \equiv \mathbf{A}_{k-1} - \mathbf{c}_k a_{kk}^{(k-1)} \mathbf{c}_k^* \equiv \mathbf{A}_{k-1} - \mathbf{D}_k \tag{59d}$$

$$[a_{11}a_{22}' \ldots a_{kk}^{(k-1)} = d_k \neq 0, \quad \mathbf{A}_k = \mathbf{A}_k^*; \quad \mathbf{a}_\varrho^{(k)} = \mathbf{a}_{(k)}^{\varrho*} = \mathbf{0}, \quad c_{\varrho k} = \delta_{\varrho k},$$

$$\varrho = 1, 2, \ldots, k]. \tag{59d}$$

Az r-edik (utolsó) lépés:

$$\mathbf{A}_r = \mathbf{A}_{r-1} - \frac{\mathbf{a}_r^{(r-1)}\mathbf{a}_r^{(r-1)*}}{a_{rr}^{(r-1)}} \equiv \mathbf{A}_{r-1} - \mathbf{c}_r a_{rr}^{(r-1)} \mathbf{c}_r^* \equiv \mathbf{A}_{r-1} - \mathbf{D}_r \tag{59e}$$

$$[a_{11}a_{22}' \ldots a_{rr}^{(r-1)} = d_r \neq 0, \quad \mathbf{A}_r = \mathbf{A}_r^* = \mathbf{0}, \quad c_{r\varrho} = \delta_{\varrho r}, \quad \varrho = 1, 2, \ldots, r].$$

(További lépés nem lehetséges, mert $a_{r+1,\,r+1} = c \cdot d_{r+1} = 0$). A fentiek alapján felírható az $\mathbf{A} = \mathbf{A}_0$ matrix

$$\mathbf{0} \equiv \mathbf{A}_r = \underbrace{\underbrace{\mathbf{A}_0 - \mathbf{c}_1 a_{11} \mathbf{c}_1^*}_{\mathbf{A}_1} - \mathbf{c}_2 a_{22}' \mathbf{c}_2^*}_{\mathbf{A}_2} - \ldots - \mathbf{c}_r a_{rr}^{(r-1)} \mathbf{c}_r^* =$$

$$= \mathbf{A}_0 - \sum_{\varrho=1}^{r} \mathbf{c}_\varrho a_{\varrho\varrho}^{(\varrho-1)} \mathbf{c}^* = \mathbf{A}_0 \sum_{\varrho=1}^{r} \mathbf{c}_\varrho \frac{d_\varrho}{d_{\varrho-1}} \mathbf{c}_\varrho^* \tag{60a}$$

diadikus előállítása, továbbá az

$$\mathbf{A}_0 = [\mathbf{c}_1, \mathbf{c}_2, \ldots, \mathbf{c}_r] \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \ldots & 0 \\ \vdots & & & \vdots \\ 0 & 0 & \ldots & \lambda_r \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{c}_1^* \\ \mathbf{c}_2^* \\ \vdots \\ \mathbf{c}_r^* \end{bmatrix} = \mathbf{C}\Lambda\mathbf{C}^* =$$

$$= \begin{bmatrix} 1 & 0 & \ldots & 0 \\ c_{21} & 1 & \ldots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ c_{r1} & c_{r2} & \ldots & 1 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ c_{n1} & c_{n2} & \ldots & c_{nr} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \ldots & 0 \\ \vdots & & & \vdots \\ 0 & 0 & \ldots & \lambda_r \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & c_{21} & \ldots & c_{r1} & \ldots & c_{n1} \\ 0 & 1 & \ldots & c_{r2} & \ldots & c_{n2} \\ \vdots & \vdots & \ldots & \vdots & \ldots & \vdots \\ 0 & 0 & \ldots & 1 & \ldots & c_{nr} \end{bmatrix} \tag{60b}$$

bázisfaktoros alakja. A hozzá vezető iteratív lépések r száma megegyezik az $\mathbf{A}$ matrix $\varrho(\mathbf{A})$ *rang*jával, mert — mint a 1. §. *b)* β*)* III°. helyen láttuk — minden lépés éppen eggyel csökkenti a rangszámot. Ellenőrizhető továbbá*, hogy ha az induló $\mathbf{A}_0$ matrix (szemi)definit, akkor az algoritmus során nyert $\mathbf{A}_1, \ldots$ $\ldots, \mathbf{A}_{r-1}$ matrixok is azok maradnak. Ha $\mathbf{A}_0$ *definit* s így reguláris ($r = n$), akkor (1-től n-ig) minden ι-re $a_{11} a_{22}' \ldots a_{\iota\iota}^{(\iota-1)} = d_\iota \neq 0$ s így az $\mathbf{A}_0$ említett előzetes átrendezés teljesen *felesleges.*

6'. Mit mondhatunk az így nyert Λ *diagonális matrixról?* Minthogy a $\underset{(n\times r)}{\mathbf{C}}$ oszlopvektor-r-ese — szerkezeténél fogva — l. ftl, így *teljes oszloprangú* (vagyis r-ed rangú, s méltán nevezhető [oszlop-] bázisfaktornak). Emiatt a

$$\underset{(r\times r)}{\mathbf{G}} \equiv \underset{(r\times n)}{\mathbf{C}^*} \underset{(n\times r)}{\mathbf{C}} \quad \textit{reguláris,} \text{ azaz } \quad |\mathbf{G}| \neq 0, \tag{61a}$$

így invertálható is és képezhető vele a

$$\underset{(r\times n)}{\Gamma^*} \equiv \underset{(r\times r)}{\mathbf{G}^{-1}} \underset{(r\times n)}{\mathbf{C}^*} \tag{61b}$$

* L. pl. *Künzi—Krelle* [55].

alakú s nyilván teljes sorrangú $\mathbf{\Gamma}^*$ *matrix,* amely

$$\underset{(r\times n)}{\mathbf{\Gamma}^*}\underset{(n\times r)}{\mathbf{C}} = \underset{(r\times r)}{\mathbf{G}^{-1}}(\underset{(r\times n)}{\mathbf{C}^*}\underset{(n\times r)}{\mathbf{C}}) = \underset{(r\times r)}{\mathbf{G}^{-1}}\underset{(r\times r)}{\mathbf{G}} = \underset{(r\times r)}{\mathbf{E}} \qquad (61c)$$

sajátsága folytán *a* **C** *matrix bal inverzének* mondható. Figyelemre méltó egyébként, hogy a

$$\underset{(n\times n)}{\mathbf{H}} = \underset{(n\times r)}{\mathbf{\Gamma}^*}\underset{(r\times n)}{\mathbf{C}} \quad \textit{matrix} \quad \mathbf{H}^2 = \mathbf{\Gamma}(\mathbf{C}^*\mathbf{\Gamma})\mathbf{C}^* = \mathbf{\Gamma}\mathbf{E}\mathbf{C}^* = \mathbf{\Gamma}\mathbf{C}^* = \mathbf{H} \qquad (61d)$$

módon *idempotens,* vagy más néven *projektor.*

A szóban forgó $\mathbf{\Gamma}^*$ balinverz segítségével a vizsgált $\mathbf{\Lambda}$ matrix nyilván

$$\mathbf{\Gamma}^*\mathbf{A}\mathbf{\Gamma} = \mathbf{\Gamma}^*\mathbf{C}\mathbf{\Lambda}\mathbf{C}^*\mathbf{\Gamma} = \mathbf{E}\mathbf{\Lambda}\mathbf{E}^* = \mathbf{\Lambda} \qquad (62a)$$

úton fejezhető ki explicite; következésképpen *a* $\mathbf{\Lambda}$ *az* $\mathbf{E}' = \mathbf{E}\mathbf{\Gamma}$ *bázisra vonatkozó matrixa az* **E** *bázison* **A** *matrixú kvadratikus alaknak.* Bevezetve ezek után az

$$\underset{(n)}{\mathbf{x}} = \underset{(n\times r)}{\mathbf{\Gamma}}\underset{(r)}{\mathbf{y}} \qquad (\mathbf{y} \neq \mathbf{0} \quad \text{esetén} \quad \mathbf{x} \neq \mathbf{0}) \qquad (62b)$$

oszlopreguláris *transzformációt,* a Q kvadratikus alak eképpen transzformálódik:

$$Q = \mathbf{x}^*\mathbf{A}\mathbf{x} = (\mathbf{y}^*\mathbf{\Gamma}^*)\mathbf{A}(\mathbf{\Gamma}\mathbf{y}) = \mathbf{y}^*(\mathbf{\Gamma}^*\mathbf{A}\mathbf{\Gamma})\mathbf{y} =$$

$$= \mathbf{y}^*\mathbf{\Lambda}\mathbf{y} = \lambda_1 y_1^2 + \ldots + \lambda_\varrho y_\varrho^2 + \ldots + \lambda_r y_r^2 \quad \left(\lambda_\varrho = \frac{d_\varrho}{d_{\varrho-1}}\right). \qquad (63a)$$

Ezzel eljutottunk *a Q kvadratikus alak négyzetösszegre redukált, ún.* k a n o n i k u s a l a k *jára.* Ugyanezt — az r-ed rendű $\mathbf{\Lambda}$ diagonális matrixot $\lambda_{r+1} = \ldots = \lambda_n = 0$ főátlóbeli elemekkel az n-ed rendű $\hat{\mathbf{\Lambda}}$-ra, az r-dimenziós $\mathbf{y}$ vektort pedig tetszőleges $y_{r+1}, \ldots, y_n$ elemekkel az n-dimenziós $\hat{\mathbf{y}}$-ra kiegészítve — nyilván a (vele egyenlő értékű)

$$Q = \hat{\mathbf{y}}^*\hat{\mathbf{\Lambda}}\hat{\mathbf{y}} = \lambda_1 y_1^2 + \ldots + \lambda_r y_r^2 + \lambda_{r+1} y_{r+1}^2 + \ldots + \lambda_n y^2 n \qquad (63b)$$

$$(r \leqq n; \quad \lambda_{r+1} = \ldots = \lambda_n = 0; \quad y_{r+1}, \ldots, y_n \quad \text{szabad})$$

bővített alakban is felírhatjuk. Ebből kitűnik, hogy az E_n térbeli Q kvadratikus alakunk az $\hat{\mathbf{y}}^* = \hat{\mathbf{0}}^* = [\underset{1}{0}, \ldots, \underset{r}{0}; \underset{r+1}{0}, \ldots, \underset{n}{0}]$ mellett még legalább az $\hat{\mathbf{y}}^* = [0, \ldots, 0; y_{r+1}, \ldots, y_n]$ vektorokra is zérus értéket vesz fel, ha $r < n$.

E bővített alakról rögtön felismerhető, hogy Q akkor és csakis akkor *pozitív definit,* ha minden $\lambda_i > 0$ ($i = 1, 2, \ldots, r = n$, mikoris $\mathbf{y} \equiv \hat{\mathbf{y}}$ és $\mathbf{\Lambda} \equiv \hat{\mathbf{\Lambda}}$), pozitív

szemidefinit pedig, ha $\lambda_i \geqq 0$ (itt $\lambda_1, \ldots, \lambda_r > 0$, $\lambda_{r+1} = \ldots = \lambda_n = 0$). Kimondható az alábbi

1. Kritérium: Egy E_n térbeli (valós) $Q = \mathbf{x}^*\mathbf{A}\mathbf{x}$ kvadratikus alak és $\mathbf{A} = \mathbf{A}^*$ n-ed rendű (valós) szimmetrikus matrixa akkor és csak akkor pozitív definit, ha az $\mathbf{A} = \mathbf{C}\mathbf{\Lambda}\mathbf{C}^*$ bázisfaktoros előállításban a $\mathbf{\Lambda}$ diagonális matrix $r = n$-ed rendű ($\mathbf{\Lambda} = \hat{\mathbf{\Lambda}}$) főátlójában csupa

$$\lambda_\varrho = \frac{d_\varrho}{d_{\varrho-1}} = a_{11}a'_{22} \ldots a_{\varrho\varrho}^{(\varrho-1)} > 0 \quad (\varrho = 1, 2, \ldots, r;\ d_0 = 1) \tag{64a}$$

elemekkel; *negatív definit* pedig, ha minden $\lambda_\varrho < 0$. Q és $\mathbf{A}$ továbbá akkor és csakis akkor *pozitív szemidefinit,* ha a $\mathbf{\Lambda}$ csupán r ($< n$)-ed rendű, főátlójában ismét $\lambda_\varrho > 0$ elemekkel, de $\hat{\mathbf{\Lambda}}$ főátlójában további

$$\lambda_{r+1} = \ldots = \lambda_n = 0 \tag{64b}$$

elemekkel. — Ebből következik az alábbi

2. Kritérium: Q és $\mathbf{A}$ akkor és csakis akkor *pozitív (szemi)definit, ha az (58) alatti*

$$d_1, \ldots, d_r, d_{r+1}, \ldots, d_n = |\mathbf{A}| \tag{65}$$

főminorok (első r-je pozitív, a többi zérus, ill.) mindegyike pozitív ; negatív (szemi)-definit, ha — a $d_0 = 1$-et és (az első r-et, ill.) valamennyit számításba véve — *a szomszédos főminorok ellenkező előjelűek* (s így valóban $\lambda_\varrho = d_\varrho/d_{\varrho-1} < 0$).

β) Konvex programozási és Lagrange-feladat

I°. A matematikai programozás feladata. *1'.* Az *α)* pontban a lineáris analízisből felsorakoztattuk mindazon segédeszközöket, amelyek birtokában most hozzáláthatunk a konvex programozás feladatának, sajátságainak, megoldási kritériumának és alapelveinek tanulmányozásához.

Legyen értelmezve az $E_m = \{\mathbf{x}\}$ euklideszi tér valamely (akár vele megegyező), rendszerint *konvex* X tartományában egy

$$u = u(\mathbf{x}), \qquad \mathbf{x} \equiv [x_1, \ldots, x_j, \ldots, x_m]^* \in X \subseteq E_m \tag{1a}$$

skalár függvény (skalármező) és ugyanott egy

$$\mathbf{a} = \mathbf{a}(\mathbf{x}), \qquad \mathbf{a} \equiv [a_1, \ldots, a_i, \ldots, a_n]^* \in Y \subset E_n \tag{1b}$$

vektorfüggvény (vektormező), az E_n altérrel kompatibilis $\mathbf{a}$ függvényvektorokkal, amelyeket egyébként — szemléletesen — a paralel eltolt $E_{n,\mathbf{x}}$ tér $\mathbf{x}$ origójából felrakva képezünk.

Az E_m tér első 2^m-edében, az E_m^{I} térrészben az $\mathbf{x}$ vektor minden koordinátája nemnegatív (a $\mathbf{B} = [\mathbf{e}_1, \ldots, \mathbf{e}_j, \ldots, \mathbf{e}_m]$, $\mathbf{e}_i^*\mathbf{e}_j = \delta_{ij}$ bázisra vonatkozólag), azaz (6. ábra)

$$E_m^{\text{I}} = \{\mathbf{x}; \mathbf{x} \geqq \mathbf{0}\} \subset E_m. \quad (2a)$$

Lehet továbbá az X tartománynak olyan X_a része, amelynek $\mathbf{x}$ vektoraihoz (a $\mathbf{B}$-re nézve) csupa nempozitív koordinátával rendelkező $\mathbf{a}$ függvényvektor tartozik, azaz

$$X_a = \{\mathbf{x}; \mathbf{a}(\mathbf{x}) \leqq \mathbf{0}\} \subset X \subseteq E_m. \quad (2b)$$

6. ábra

E két E_m-beli ponthalmaznak rendszerint van *közös része*, vagyis általában

$$L \equiv (E_m^{\text{I}} \cap X_a) \equiv \{\mathbf{x}; \mathbf{x} \geqq \mathbf{0},\ \mathbf{a}(\mathbf{x}) \leqq \mathbf{0}\} \neq \Theta \quad (2c)$$

Az (1*a*, *b*) függvényeket a továbbiakban legtöbbször az $X \subseteq E_m$ tartományban *konvexnek*, vagyis — az *α)* IV.° 2′ szerint —

$$u(\mathbf{x} + \lambda \Delta\mathbf{x}) \leqq u(\mathbf{x}) + \lambda \Delta u, \quad \text{ill.} \quad \mathbf{a}(\mathbf{x} + \lambda \Delta\mathbf{x}) \leqq \mathbf{a}(x) + \lambda \Delta\mathbf{a}$$

$$[\mathbf{x}, \mathbf{x} + \Delta\mathbf{x} \in E_m; \quad \Delta u = u(\mathbf{x} + \Delta\mathbf{x}) - u(\mathbf{x})]$$

sajátságúnak tételezzük fel. Geometriailag ez — tudvalevőleg — az E_{m+1} térbeli $u(\mathbf{x})$ és $a_i(\mathbf{x})$ felületek konvexitását jelenti. Utalunk a konvexitás *α)* IV° 3′-beli kritériumaira is!

Az (1*a*, *b*) függvényeket rendszerint az $X \subseteq E_m$ tartományban folytonosan *differenciálhatónak*, mégpedig* — a szokásos jelöléseket használva —

$$\mathbf{u}(\mathbf{x}) = g_u(\mathbf{x}) = \mathbf{grad}\ u(\mathbf{x}) = \nabla u(\mathbf{x}) = u'(\mathbf{x}) = \frac{du}{d\mathbf{x}} = \left|\frac{\partial u}{\partial x_j}\right| \in E_m \quad (3a)$$

derivált vektorral, ún. (skalár-) gradienssel, ill.

$$\mathbf{A}(\mathbf{x}) = \mathbf{G_a}(\mathbf{x}) = \mathbf{Grad}\ \mathbf{a}(\mathbf{x}) = [\nabla \mathbf{a}^*(\mathbf{x})]^* = \mathbf{a}'(\mathbf{x}) = \frac{d\mathbf{a}}{d\mathbf{x}} = [\mathbf{a}_i] = \left|\frac{\partial a_i}{\partial x_j}\right| \quad (3b)$$

* L. bővebben az *α)* I° 4′ és II° 2—3′-ben.

deriváltmatrixszal, ún. vektorgradienssel rendelkezőnek tekintjük. E függvényekről olykor a folytonos *második* differenciálhatóságot is feltesszük, mégpedig

$$\mathbf{U}(\mathbf{x}) = \mathbf{G}_u(\mathbf{x}) = \mathbf{Grad}\ \mathbf{u}(\mathbf{x}) = [\nabla u^*(\mathbf{x})]^* = u''(\mathbf{x}) = [\mathbf{u}_k] = \left[\frac{\partial^2 u}{\partial x_j\, \partial x_k}\right], \quad (3c)$$

$$\mathfrak{A}(\mathbf{x}) = \mathfrak{G}_a(\mathbf{x}) = \mathfrak{Grad}\ \mathbf{G}_a(\mathbf{x}) = \mathbf{a}''(\mathbf{x}) = \frac{d^2\mathbf{a}}{d\mathbf{x}^2} = [\mathbf{A}_l] = \left[\frac{\partial^3 u}{\partial x_j\, \partial x_k\, \partial x_l}\right] \quad (3d)$$

derivált (sík-, ill. tér-) matrixszal ($k = 1, 2, \ldots, m$).

Végül legyen az $u = u(\mathbf{x})$ függvény *globális minimum-helyeinek* (esetleg üres) halmaza*

$$\hat{X} = \{\hat{\mathbf{x}}\,;\, u(\mathbf{x})\} = \hat{u} < u(x),\quad \mathbf{u}(\mathbf{x}) = \begin{cases}\mathbf{0}, & \text{ha}\quad \hat{\mathbf{x}} \equiv \mathbf{x}_l \\ \mathbf{c}, & \text{ha}\quad \hat{\mathbf{x}} \equiv \tilde{\mathbf{x}}_h\end{cases} \subset X. \quad (4a)$$

Rendszerint van közös része a (2c) alatti L halmazzal, vagyis általában

$$\hat{L} \equiv \hat{X} \cap L \neq \Theta \quad (4b)$$

2'. Ilyen adatok, feltételek és jelölések mellett ***a matematikai programozás minimumfeladata*** eképpen fogalmazható és formulázható meg:

Megoldandó az

$$u(\mathbf{x}) = \text{Min!},\quad \text{azaz}\quad u(x_1, \ldots, x_j, \ldots, x_m) = \text{Min!} \quad (5a)$$

szélsőérték-feladat, az

$$\mathbf{x} \geqq \mathbf{0},\quad \text{azaz}\quad x_j \geqq 0 \quad (j = 1, 2, \ldots, m) \quad (5b)$$

és az

$$\mathbf{a}(\mathbf{x}) \leqq \mathbf{0},\quad \text{azaz}\quad a_i(x_1, \ldots, x_j, \ldots, x_m) \leqq 0 \quad (i = 1, 2, \ldots, n) \quad (5c)$$

korlátozó feltételek mellett.

Ugyanez más formulázásban:

$$\{u(\mathbf{x})\,;\, \mathbf{x} \geqq \mathbf{0},\ \mathbf{a}(\mathbf{x}) \leqq \mathbf{0}\} = \text{Min!} \quad (6)$$

vagy pedig

$$\{u(\mathbf{x})\,;\, \mathbf{x} \in L\} = \text{Min!},\quad \text{ahol}\quad L = \{\mathbf{x}\,;\, \mathbf{x} \geqq \mathbf{0},\ \mathbf{a}(\mathbf{x}) \leqq \mathbf{0}\}. \quad (6')$$

1. Pl. Korábbi tanulmányaink során már megismerkedtünk a (6) matematikai programozás legegyszerűbb speciális esetével, a *lineáris programozással,* melyet — maximumfeladat esetén —

$$\{a_{00} + \mathbf{a}^0(-\mathbf{x})\,;\ \mathbf{x} \geqq \mathbf{0},\ \mathbf{a}_0 + \mathbf{A}(-\mathbf{x}) \geqq \mathbf{0}\} = \text{Max!} \quad (7)$$

* Itt még globális maximumokról is beszélhetnénk; később, konvex $u(\mathbf{x})$ esetén már csak a minimum-feladattal észszerű foglalkozni.

módon formuláztunk. Minden más (6) alakú matematikai programozást *nemlineáris programozás* néven szoktunk emlegetni.

2. Pl. A nemlineáris programozás példájaként említsük meg a később, bizonyos megszorítás mellett tanulmányozandó

$$\{\mathbf{a}^0\mathbf{x} + \mathbf{x}^*\mathbf{C}\mathbf{x};\ \mathbf{x} \geqq \mathbf{0};\ -\mathbf{a}_0 + \mathbf{A}\mathbf{x} \leqq \mathbf{0}\} = \text{Min!} \tag{8}$$

kvadratikus programozást és — maximumfeladatként — a

$$\left\{\frac{a_{00} + \mathbf{a}^0(-\mathbf{x})}{\alpha_{00} + \boldsymbol{\alpha}^0(-\mathbf{x})};\ \mathbf{x} \geqq \mathbf{0},\ \mathbf{a}_0 + \mathbf{A}(-\mathbf{x}) \geqq \mathbf{0}\right\} = \text{Max!} \tag{9}$$

hiperbolikus programozást.

3'. Fűzzünk a (6) feladathoz néhány megjegyzést és egyidejűleg említsünk meg néhány ide vágó szakkifejezést! A minimálandó (5*a*) függvényt *célfüggvénynek* nevezzük. Értelmezési tartománya, az X akárhányszor az egész E_m térrel azonos. Az (5*c*) *nemnegativitási feltétel* a vizsgálatot a (2*a*) szerinti $E_m^!$ térrészre korlátozza. Olykor el is marad e feltétel, vagy az (5*c*)-ből következik. Az (5*c*) *kényszerfeltétel az X* tartományt a (2*b*) szerinti X_a részére, az (5*b*)-vel együtt pedig — a (2*c*) szerint az $E_m^!$-gyel közös $L = E_m^! \cap X_a$ részére, az ún. *lehetséges megoldások (programok) halmazára* szűkíti, amely esetleg üres is lehet. Az L szokásos formulázását az (5')-ben láthatjuk. Említésre méltó, hogy az L halmazt az $x_j = 0$ és az $a_i(\mathbf{x}) = 0$ *hiperfelületek* határolják. Megjegyzendő, hogy maximumfeladat esetén az (5*c*) helyett az $\mathbf{a}(\mathbf{x}) \dotplus \mathbf{0}$ veendő. (L. ismét a 6. ábrát!)

Valamely $\mathbf{x} \in E_m$ pont ún. *lehetséges megoldás (program)*, ha $\mathbf{x} \in L$. *Határpontnak* mondjuk, ha az imént említett határfelületek legalább egyikére esik, *belső pontnak*, ha minden i és j mellett $x_j > 0$ és $a_i(\mathbf{x}) < 0$. Valamely $\mathbf{x} \in L$ lehetséges megoldást akkor nevezünk egyszersmind *optimális megoldásnak* is, és jelöljük $\mathbf{x}_{\text{opt}} \equiv \hat{\mathbf{x}}$ módon, ha ez az $u(\mathbf{x})$ célfüggvény globális minimumhelyeinek (4*a*) szerinti $\hat{X}$ *halmazába* is beleesik. Minimumfeladatunk *megoldhatósága* érdekében ésszerűen feltételezzük, hogy $\hat{X}$ *nem üres*, vagyis a célfüggvény az L halmazban korlátos marad és minimumát ott valóban felveszi.

Az L és az $\hat{X}$ közös része, vagyis a (4*b*) szerinti $\hat{L} = L \cap \hat{X}$ az *optimális megoldások (programok) halmaza* néven ismeretes. Ez esetleg üres is lehet, ha L üres, vagy diszjunkt $\hat{X}$-hez képest. Meg lehet mutatni, hogy *ha L nem üres és egyben korlátos is, akkor legalább egy* $\hat{\mathbf{x}}$ *optimum létezik.* Ha azonban L nem korlátos, akkor maga az $u(\mathbf{x})$ korlátossága L-ben rendszerint nem elegendő a megoldhatósághoz. Pl. az $u(x) = e^{-x}$ függvény az $x \geqq 0$ tartományban ugyan korlátos ($u \leqq 1$), de $\hat{u} = 0$ minimumát nem veszi fel. Ha viszont $u(\mathbf{x})$ *kvadratikus,* amely eset később külön vizsgálatra kerül, akkor az $u(\mathbf{x})$ korlátossága már elegendő legalább egy megoldás biztosítására.

Mint már céloztunk rá, a *kényszerfeltételek* — az (5*b, c*) helyett — olykor az

$$\mathbf{a}(\mathbf{x}) = \mathbf{0}; \quad \mathbf{a}(\mathbf{x}) \leqq \mathbf{0}; \quad \mathbf{x} \geqq \mathbf{0} \quad \text{és} \quad \mathbf{a}(\mathbf{x}) = \mathbf{0} \qquad (10a, b, c\text{-}d)$$

alakban is jelentkeznek. Megjegyzendő, hogy ezek *kölcsönösen kifejezhetők egymással.* Pl. az (5*a, b, c*) feladat az (5*a*, 10*b-c*) alakjában

$$u(\mathbf{x}) = \text{Min!} \quad \mathfrak{x} \equiv \begin{vmatrix} \mathbf{x} \\ \mathbf{u} \end{vmatrix} \geqq \mathbf{0}, \quad \mathbf{a}(\mathbf{x}) - \mathbf{u} = \mathbf{0} \qquad (11a\text{-}c)$$

módon írható fel. Figyelemre méltó, hogy az (5*a*, 10*a*) feladat megegyezik az *α)* III° 4′-ben tárgyalt klasszikus (közönséges) *Lagrange-feladattal.* E körülményekből az, a későbbiek szempontjából nagy jelentőségű tény következik, hogy a matematikai programozási problémának — az említett kényszerfeltételek bármelyike mellett — megfeleltethető egy ún. *adjungált Lagrange-feladat.* E kérdésekkel behatóan fogunk majd foglalkozni a III°-ban.

Végül hangsúlyozni kívánjuk, hogy a matematikai, pontosabban a *nemlineáris programozás* (5*a, b, c*) általános problémája — akár a (3*a, b*), sőt a (3*c, d*) folytonos differenciálhatósági követelmény mellett is — *ma még nyitott kérdésnek* tekinthető. Matematikai szempontból még jelentékeny nehézségeket kell leküzdeni ahhoz, hogy a nemlineáris programozás lezárt elméletéről beszélhessünk. Az ilyen irányú fejlődés még jócskán folyamatban van és a közeljövőben nagy eredményeket hozhat.

II°. A konvex programozás feladata. *1′.* Ilyen körülmények között a nemlineáris programozás ma még amúgy is szórványos *szakkönyvei* lényegében csak a most már jórészt kialakult elmélettel rendelkező, ún. *konvex programozás tárgyalására szorítkoznak,* s e helyen mi sem tehetünk egyebet. A továbbiakban ezért a konvex programozás ismertetésére kerül sor, mégpedig általánosságban és a (3*a, b*), esetleg a (3*c, d*) folytonos differenciálhatósági követelmény speciális esetében egyaránt.

A fentiek — különösen a (6) feladat és a (2*d, e*) konvexitás figyelembevételével — ***a konvex programozás minimumfeladata*** így fogalmazható meg:

Megoldandó a

$$\{u(\mathbf{x}); \quad \mathbf{x} \geqq \mathbf{0}, \quad \mathbf{a}(\mathbf{x}) \leqq \mathbf{0}\} = \text{Min!} \qquad (12a\text{-}c)$$

matematikai programozási feladat, az

$$u(\mathbf{x} + \lambda\Delta\mathbf{x}) \leqq u(\mathbf{x}) + \lambda\Delta u, \quad \text{ill.} \quad \mathbf{a}(\mathbf{x} + \lambda\Delta\mathbf{x}) \leqq \mathbf{a}(\mathbf{x}) + \lambda\Delta\mathbf{a} \qquad (12d, e)$$

konvexitási követelmény mellett.

Ez utóbbi értelmében az $u(\mathbf{x})$ és az $a_i(\mathbf{x}) \leqq 0$ felület, ill. felületdarabok mind konvexek a többször említett E_{n+1} térben, következésképpen — az *α)* IV°-ben

tanultak figyelembevételével — ugyancsak konvexek az

$$X_{ai} = \{\mathbf{x}''; \; a_i(\mathbf{x}) \leqq 0\}, \qquad X_a = \bigcap_{i=1}^{n} X_{ai} = \{\mathbf{x}'; \; \mathbf{a}(\mathbf{x}') \leqq \mathbf{0}\},$$

$$L = X_a \cap E_m^1 = \{\mathbf{x}; \mathbf{x} \geqq \mathbf{0}, \; \mathbf{a}(\mathbf{x}) \leqq \mathbf{0}\}, \qquad \hat{X} = \{\hat{\mathbf{x}}'; \; u(\hat{\mathbf{x}}') = \hat{u} < u(\mathbf{x}')\},$$

$$\hat{L} = \hat{X} \cap L = \{\hat{\mathbf{x}}; \quad u(\hat{\mathbf{x}}) < \hat{u}, \quad \hat{\mathbf{x}} \geqq \mathbf{0}, \quad \mathbf{a}(\mathbf{x}) \leqq \mathbf{0}\}$$

ponthalmazok, köztük a lehetséges megoldások L és az optimális megoldások $\hat{L}$ halmaza is. Egyébként a (12*d, e*) konvexitás mellett gyakran (3*a, b*), sőt olykor a (3*c, d*) folytonos *differenciálhatóságot* is megköveteljük.

2'. A (12*a-e*) feladattal kapcsolatban egy másik, ún. *egyszerűsített feladatra* is célszerű rámutatni. E végből tegyük fel, hogy egy $\hat{\mathbf{x}} \in \hat{L}$ optimális megoldás $\hat{x}_j$ koordinátái a (12*b*) nemnegativitási feltételt pl.

$$x_j \begin{cases} = 0, & \text{ha} \quad j = 1, 2, \ldots, \mu, \ldots, m_1 \\ > 0, & \text{ha} \quad j = m_1 + 1, \ldots, m \end{cases} \tag{14a}$$

módon, a megfelelő $\mathbf{a}(\mathbf{x})$ vektor $a_i(\mathbf{x})$ koordinátái pedig a (12*c*) nempozitivitási feltételt

$$a_i(\hat{\mathbf{x}}) \begin{cases} = 0, & \text{ha} \quad i = 1, \ldots, \nu, \ldots, n_1 \\ < 0, & \text{ha} \quad i = n_1 + 1, \ldots, n \end{cases} \tag{14b}$$

módon teljesítik. Ekkor igaz az alábbi

Tétel: *Az* $\hat{\mathbf{x}} \in \hat{L}$ *és az* $\mathbf{a}(\hat{\mathbf{x}})$ *vektor koordinátáinak* (14*a, b*) *magatartása esetén, az* $\hat{\mathbf{x}}$ *vektor egyszersmind az*

$$\{u(\mathbf{x}) = \text{Min!}; \quad x_\mu \geqq 0, \quad a_\nu(\mathbf{x}) \leqq 0\} \tag{14c}$$

és a (12*d-e*) *meghatározta egyszerűsített feladatnak is megoldása.*

Más szóval, az $\hat{\mathbf{x}}$ optimalitása megmarad, ha a (14*a, b*) kényszerfeltételek közül a szigorúan (tehát $>$, vagy $<$ módon) teljesülőket elhagyjuk.

Ui. tegyük fel, hogy $\hat{\mathbf{x}}$ nem megoldása a (14*c*) feladatnak, de valamely $\mathbf{x}$ vektor az,

$$u(\mathbf{x}) < u(\hat{\mathbf{x}}), \quad x_\mu \geqq 0, \quad a_\nu(\mathbf{x}) \leqq 0$$

módon. Ekkor elég kis λ-nál minden j-re és i-re

$$\hat{x}_j + \lambda(x_j - \hat{x}_j) \geqq 0, \qquad a_i[\hat{\mathbf{x}} + \lambda(\mathbf{x} - \hat{\mathbf{x}})] \leqq 0$$

és $u(x)$ konvexitása folytán

$$u[\hat{\mathbf{x}} + \lambda(\mathbf{x} - \hat{\mathbf{x}})] \leqq u(\mathbf{x})$$

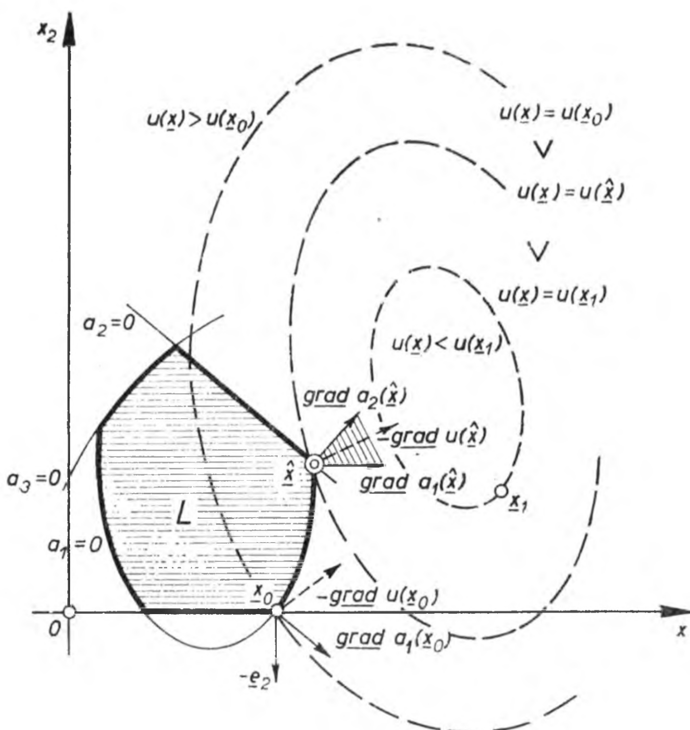
lenne, ellentétben az $\hat{\mathbf{x}} \in \hat{L}$ feltevéssel. Kell tehát, hogy $\hat{\mathbf{x}}$ a (14*c*)-nek is megoldása legyen, q. e. d. Megjegyzendő, hogy tételünk nem fordítható meg; a (14*c*) egy megoldása ellenkezhet az elhagyott kényszerfeltételek némelyikével.

3'. Térjünk ki most a (12a-e) konvex programozás *geometriai interpretálására,* mégpedig a (3a, b) folytonos első differenciálhatóság pótlólagos feltételével. Mint az α) II° 2'-ból ismeretes, a **grad** $u(\mathbf{x}_0) \equiv \mathbf{u}(\mathbf{x}_0) \neq \mathbf{0}$ vektor az $\mathbf{x}_0$ pontban merőleges $u(\mathbf{x}) = u(\mathbf{x}_0)$ hiper-szintfelületre, a magasabb skalárú $u(\mathbf{x}) = u(\mathbf{x}_1) < u(\mathbf{x}_0)$ szintfelületek felé mutat és nagyságával az ottani legnagyobb s egyben saját irányában jelentkező $\frac{du}{ds_\mathbf{u}}$ deriváltat, fajlagos változási sebességet szolgáltatja. Hasonlókat mondhatunk a **grad** $a_i(\mathbf{x}_0) \equiv \mathbf{a}_i(\mathbf{x}_0) \neq \mathbf{0}$ vektorról is, mégpedig a lehetséges megoldások L tartományának egyik, ti. az $a_i(\mathbf{x}) = a_i(\mathbf{x}_0) = 0$ hiper-határfelületével kapcsolatban; következésképpen az $a_i(\mathbf{x}_0)$ vektor az L tartomány egyik *külső* (kifelé mutató) *normálisának* tekinthető, az említett hiper-határfelületen. Az L tartomány $x_j = 0$ hiper-határfelületén ($x_j \geqq 0$ miatt) nyilván a $-\mathbf{e}_j$ vektor játssza a külső normális szerepét.

A fentieket a 7. ábrán szemléltettük, mégpedig egy

$$m = 2, \quad n = 3; \quad \mu = 1, \quad \nu = 2; \quad \hat{\mathbf{x}} = L \tag{15}$$

sajátságú egyszerű konvex programozási feladat kapcsán.



7. ábra

Ugyanitt említünk meg — a folytonosan differenciálható, konvex $u(\mathbf{x})$ függvénnyel kapcsolatban — *néhány gyakran használatos összefüggést*, amelyek egyébként közvetlen következményei a IV° 3′-belieknek.

Ha $\mathbf{u}^*(\mathbf{x}_0)\mathbf{e} \equiv \frac{du}{ds} > 0$, akkor $u(\mathbf{x}_0 + \mathbf{e}\Delta s)$ $u(\mathbf{x}_0)$, ha $\Delta s > 0$, (16a, b)

vagyis $u(\mathbf{x}_0 + \mathbf{e}\Delta s)$ minden pozitív Δs-re monoton növekszik.

Ha $\mathbf{u}^*(\mathbf{x}_0)\mathbf{e} \equiv \frac{du}{ds} < 0$, akkor $u(\mathbf{x}_0 + \mathbf{e}\Delta s) < u(\mathbf{x}_0)$, ha

$0 < \Delta s < \Delta s_0$, vagyis $u(\mathbf{x}_0 + \mathbf{e}\Delta s)$ pozitív Δs-ekre monoton csökken mindaddig, amíg $\mathbf{e}^*\mathbf{u}(\mathbf{x}_0 + \mathbf{e}\Delta s) < 0$.

4′. Az előbbi feltételek mellett, a (12a-e) konvex programozási feladat $\hat{L} = \{\hat{\mathbf{x}}\}$ optimális megoldáshalmaza közelebbről is jellemezhető. Ezt nyújtja az alábbi

Tétel: *Ha ismeretes egy* $\hat{\mathbf{x}} \in \hat{L}$ *optimális megoldás, akkor az összes ilyenek* $\hat{L}$ *halmazát az olyan* $\mathbf{x} \in L$ *lehetséges megoldások képezik, amelyekre*

$$u(\mathbf{x}) = u(\hat{\mathbf{x}}), \quad \mathbf{u}(\mathbf{x}) = \mathbf{u}(\hat{\mathbf{x}}) \quad \text{és} \quad \mathbf{u}^*(\hat{\mathbf{x}})\,(\mathbf{x} - \hat{\mathbf{x}}) = 0. \qquad (17a, b, c)$$

Ui. ha valamely $\mathbf{x} \in L$ lehetséges megoldásra teljesül a (17c), akkor $u(\mathbf{x})$ konvexitása folytán írható, hogy

$$\mathbf{u}^*(\hat{\mathbf{x}})(\mathbf{x} - \hat{\mathbf{x}}) = 0 \leqq u(\mathbf{x}) - u(\hat{\mathbf{x}}), \quad \text{azaz} \quad u(\mathbf{x}) \leqq u(\hat{\mathbf{x}}),$$

és hasonlóan

$$\mathbf{u}^*(\mathbf{x})\,(\hat{\mathbf{x}} - \mathbf{x}) = 0 \leqq u(\hat{\mathbf{x}}) - u(\mathbf{x}), \quad \text{azaz} \quad u(\hat{\mathbf{x}}) \leqq u(\mathbf{x}).$$

Ily módon kell, hogy a (17a)-nak megfelelően $u(\mathbf{x}) = u(\hat{\mathbf{x}})$ s így $\mathbf{x}$ is optimális megoldás legyen. — Másrészt, ha $u(\mathbf{x}) = u(\hat{\mathbf{x}})$, akkor $u(\mathbf{x})$ konvexitása és $u(\hat{\mathbf{x}})$ minimum volta miatt

$$u[\hat{\mathbf{x}} + \lambda(\mathbf{x} - \hat{\mathbf{x}})] = u(\mathbf{x}) - \lambda \cdot 0 = u(\hat{\mathbf{x}}) = u(\mathbf{x}).$$

Ebből — a (16a, b) szerint — éppen a (17c) következik. — Az $u(\mathbf{x})$-szel együtt a lineáris taggal bővült

$$v(\mathbf{x}) \equiv u(\mathbf{x}) - \mathbf{u}^*(\hat{\mathbf{x}})(\mathbf{x} - \hat{\mathbf{x}}) \quad [v(\hat{\mathbf{x}}) = u(\mathbf{x}), \quad \mathbf{v}(\hat{\mathbf{x}}) = \mathbf{0}, \quad \mathbf{v}(\mathbf{x}) = \mathbf{u}(\mathbf{x}) - \mathbf{u}(\hat{\mathbf{x}})]$$

függvény is konvex. Ezért, ha

$$\mathbf{u}(\mathbf{x}) \neq \mathbf{u}(\hat{\mathbf{x}}) \text{ s így } \mathbf{v}(\mathbf{x}) \neq \mathbf{0}$$

lenne, akkor alkalmas $\mathbf{e}$ irányban

$$\mathbf{v}^*(\mathbf{x})\mathbf{e} < 0 \text{ s vele } v(\mathbf{x} + \lambda\mathbf{e}) < v(\mathbf{x}) = v(\mathbf{x}) \qquad (\lambda_0 > \lambda > 0)$$

volna. Ugyanakkor a $\nu(\mathbf{x} + \lambda\mathbf{e}) \geqq \nu(\hat{\mathbf{x}})$ egyenlőtlenségnek is teljesülnie kellene, mert $\mathbf{v}(\hat{\mathbf{x}}) = \mathbf{0}$ és a konvexitás miatt $\nu(\hat{\mathbf{x}})$ minimum. Az így nyert ellentmondásból a (17*b*) következik, s ezzel a tétel igazolása is teljessé vált.

III°. Kuhn—Tucker nyeregponttétele. *1'.* A fenti, alapos előkészületek után most rátérhetünk a konvex programozás eme, kiemelkedő jelentőségű tételének tanulmányozására. E tétel lehetővé teszi a kötött, v. feltételes szélsőérték-számítás klasszikus *Lagrange-féle multiplikátoros módszerének általánosítását* azon esetre, midőn *a kényszerfeltételek* nemcsak egyenletek, hanem *egyenlőtlenségek alakjában is jelentkeznek.*

A *Kuhn—Tucker*-tétel kritériumokat, azaz szükséges és elégséges feltételeket ad meg arra, hogy egy meghatározott $\hat{\mathbf{x}}$ a (12*a-e*) konvex programozási feladat optimális megoldása legyen. E kritériumok az ún. általánosított *Lagrange-függvényre* vonatkoznak; ez — az *α)* III° 4'-ben tanultak mintájára — az $u(\mathbf{x})$ célfüggvényből, az $\mathbf{a}(\mathbf{x}) = [a_i(x)]$ feltételi függvényből és a $\mathbf{v} = [v_i]$ *Lagrange*-multiplikátorból épül fel,

$$\eta(\mathfrak{x}) \equiv \eta(\mathbf{x}, \mathbf{v}) = u(\mathbf{x}) + \mathbf{v}^*\mathbf{a}(\mathbf{x}) \equiv u(\mathbf{x}) + \sum_i v_i a_i(\mathbf{x}) \qquad (18a)$$

módon. Az $\eta(\mathfrak{x})$ függvény tehát az $x_1, \ldots, x_m, v_1, \ldots, v_n$ változókkal ($m+n$ drb) rendelkezik; ezekre itt még *nemnegativitási követelményt* fogunk kiróni (ami hiányzott az *α)* III°-beli közönséges *Lagrange*-feladatnál). Végül előzetes említést érdemel még a tétel bizonyításánál igénybe veendő alábbi

Regularitási feltétel: *Létezzék legalább egy olyan $\bar{\mathbf{x}} \in L$ lehetséges megoldás, amelynél*

$$\mathbf{a}(\bar{\mathbf{x}}) < \mathbf{0}, \quad \text{azaz} \quad a_i(\bar{\mathbf{x}}) < 0, \qquad (18b)$$

vagyis a (12*c*) feltételi egyenlőtlenség legalább ezen $\bar{\mathbf{x}}$ helyen szigorúan teljesüljön.

Megjegyzendő, hogy e regularitási feltétel *felesleges, ha az* $\mathbf{a}(\mathbf{x})$ *függvény lineáris,* más szóval a *Kuhn—Tucker*-tétel ilyenkor korlátozás nélkül érvényes. Minthogy pedig a nemlineáris programozási gyakorlatban túlnyomórészt éppen ilyen lineáris kényszerfeltételekkel dolgozunk, ezért szükségtelen a (18) feltétel mélyebb vizsgálatával foglalkoznunk.

Most pedig fogalmazzuk meg e nagy fontosságú tételt, majd ismertessük bizonyítását!

Kuhn—Tucker-féle nyeregponttétel: *Egy $\mathbf{x} \in L$ lehetséges megoldás csak akkor $\hat{\mathbf{x}} \in \hat{L}$ optimális megoldása is egyben a* (12*a-e*) *konvex programozási feladatnak, ha reá, valamint a $\mathbf{v}$ Lagrange-multiplikátor egy $\hat{\mathbf{v}}$ értékére teljesülnek az*

$$\hat{\mathbf{x}} \geqq \mathbf{0}, \quad \hat{\mathbf{v}} \geqq \mathbf{0} \qquad (19a)$$

feltételek, továbbá rájuk és minden $\mathbf{x} \geqq \mathbf{0}$, $\mathbf{u} \geqq \mathbf{0}$ *vektorra az*

$$\eta(\hat{\mathbf{x}}, \mathbf{v}) \leqq \eta(\hat{\mathbf{x}}, \hat{\mathbf{v}}) \leqq \eta(\mathbf{x}, \hat{\mathbf{v}}) \tag{19b}$$

eltétel, végül legalább egy $\bar{\mathbf{x}} \in L$ *vektorra a (18) regularitási feltétel.*

E tétel értelmében az $\eta(\mathbf{x}, \mathbf{v})$ *Lagrange*-függvénynek az $\mathbf{x} \geqq \mathbf{0}$, $\mathbf{v} \geqq \mathbf{0}$ tartomány $(\hat{\mathbf{x}}, \hat{\mathbf{v}})$ helyen $\mathbf{x}$ szerinti globális minimummal és $\mathbf{v}$ szerinti globális maximummal, röviden ún. *nemnegatív nyeregponttal* kell rendelkeznie. Innen származik a nyeregponttétel elnevezés. A tétel az $u(\mathbf{x})$ célfüggvény (12*a*-*c*) feltételes *minimumfeladatához* a (19*a*, *b*) nyeregpont-, vagy más néven *minimaxproblémát* rendeli, amelynek kényszerfeltételei csupán előjelkorlátozást tartalmaznak. A minimaxprobléma egy $(\hat{\mathbf{x}}, \hat{\mathbf{v}})$ megoldásának $\hat{\mathbf{x}}$ része egyszersmind a minimumproblémának is megoldása, és megfordítva.

2'. Áttérve a tétel igazolására, bizonyítsuk be először a (19*a*, *b*) feltételek *elégségességét*. Legyen tehát $\hat{\mathbf{x}} \geqq \mathbf{0}$ és $\hat{\mathbf{v}} \geqq \mathbf{0}$ együtt az $\eta(\mathbf{x}, \mathbf{v})$ függvény egy nyeregpontja, a (19*b*) szerinti értelemben. Behelyettesítve oda az $\eta(\mathbf{x}, \mathbf{v})$ (18) szerinti alakját, írható, hogy minden $\mathbf{x} \geqq \mathbf{0}$, $\mathbf{v} \geqq \mathbf{0}$ esetén

$$u(\hat{\mathbf{x}}) + \mathbf{v}^*\mathbf{a}(\hat{\mathbf{x}}) \leqq u(\hat{\mathbf{x}}) + \hat{\mathbf{v}}^*\mathbf{a}(\hat{\mathbf{x}}) \leqq u(\mathbf{x}) + \hat{\mathbf{v}}^*\mathbf{a}(\mathbf{x}).$$

Mivel a bal oldali egyenlőtlenségnek minden $\mathbf{v} \geqq \mathbf{0}$-nál fenn kell állnia, szükséges, hogy

$$\mathbf{a}(\hat{\mathbf{x}}) \leqq \mathbf{0}, \quad \text{s így} \quad \hat{\mathbf{x}} \in L, \quad \text{továbbá} \quad \hat{\mathbf{v}}^*\mathbf{a}(\hat{\mathbf{x}}) = \mathbf{0}$$

legyen. A jobb oldali egyenlőtlenség ezért minden $\mathbf{x} \geqq \mathbf{0}$-ra

$$u(\hat{\mathbf{x}}) \leqq u(\mathbf{x}) + \hat{\mathbf{v}}^*\mathbf{a}(\mathbf{x}), \quad \text{sőt} \quad \hat{\mathbf{v}} \geqq \mathbf{0} \quad \text{és a} \quad \mathbf{a}(\mathbf{x}) \leqq \mathbf{0} \quad \text{miatt} \quad u(\hat{\mathbf{x}}) \leqq u(\mathbf{x})$$

alakot ölt, s így $\hat{\mathbf{x}} \in \hat{L}$, q. e. d.

A (19*a*, *b*) feltételek *szükségességének* bizonyítására mutassuk meg, hogy egy $\mathbf{0} \leqq \hat{\mathbf{x}} \in \hat{L}$ birtokában található egy olyan $\hat{\mathbf{v}} \geqq \mathbf{0}$, amellyel együtt kielégíti a (19*b*)-t. E végből szerkesszünk egy

$$\tilde{\mathbf{y}}^* \equiv [y_0, \mathbf{y}^*] = [y_0, y_1, \ldots, y_n] \in E_n$$

vektor segítségével két ponthalmazt, nevezetesen legalább egy $\mathbf{x} \geqq \mathbf{0}$-ra érvényesen a

$$K_1 = \{\tilde{\mathbf{y}}'; \; y_0' \geqq u(\mathbf{x}), \; \mathbf{y}' \geqq \mathbf{a}(\mathbf{x})\} \quad (\text{legalább egy } \mathbf{x} \geqq \mathbf{0}\text{-re})$$

ponthalmazt, továbbá a

$$K_2 = \{\tilde{\mathbf{y}}''; \; y_0'' < u(\hat{\mathbf{x}}), \; \mathbf{y}'' < \mathbf{0}\}$$

ponthalmazt. Az $u(\mathbf{x})$ és $\mathbf{a}(\mathbf{x})$ függvény (12*d*-*e*) konvexitása miatt mindkét ponthalmazunk konvex, és $u(\hat{\mathbf{x}}) \leqq u(\mathbf{x})$ miatt nincs közös pontjuk. Az

α) IV° 1′ értelmében tehát egy osztó hipersík iktatható közéjük, mégpedig úgy, hogy

$$\tilde{\mathbf{w}}^*\tilde{\mathbf{y}} = \alpha \quad (\tilde{\mathbf{w}} \neq \mathbf{0}) \quad \text{és} \quad \tilde{\mathbf{w}}^*\tilde{\mathbf{y}}' \geqq \tilde{\mathbf{w}}^*\tilde{\mathbf{y}}'' \left\{ \begin{array}{l} \tilde{\mathbf{y}}' \in K_1 \\ \tilde{\mathbf{y}}'' \in K_2 \end{array} \right. \tag{20a}$$

legyen. Mivel a K_2 értelmezése szerint az $\tilde{\mathbf{y}}''$ vektor koordinátái bármilyen nagy (abszolút értékű) negatív számok lehetnek, ezért az előbbi egyenlőtlenségből a $\tilde{\mathbf{w}} \geqq \mathbf{0}$ körülmény következik. Egyenlőtlenségünk továbbá még az

$$\tilde{\mathbf{y}}_0'^* = [u(\mathbf{x}), \mathbf{a}^*(\mathbf{x})] \in K_1 \quad \text{és} \quad \tilde{\mathbf{y}}_0''^* = [u(\hat{\mathbf{x}}), \mathbf{0}^*] \leftarrow K_2$$

kerületi pontokra is érvényben marad, s így írható, hogy minden $\mathbf{x} \geqq \mathbf{0}$-ra

$$\tilde{\mathbf{w}}^*\tilde{\mathbf{y}}_0' \equiv w_0 u(\mathbf{x}) + \mathbf{w}^*\mathbf{a}(\mathbf{x}) \geqq w_0 u(\hat{\mathbf{x}}) \equiv \tilde{\mathbf{w}}\mathbf{y}_0^{*''}. \tag{20b}$$

Itt kell, hogy $w_0 > 0$ legyen, mert egyébként minden $\mathbf{x} \geqq \mathbf{0}$-ra és $\mathbf{w} \geqq \mathbf{0}$ (s így legalább egy $w_i > 0$) mellett $\mathbf{w}^*\mathbf{a}(\mathbf{x}) \geqq 0$ lenne, ami azonban legalább egy $\mathbf{x}$-re, mégpedig a (18*b*) szerinti $\mathbf{x}$-re nem teljesülhet. Így valóban $w_0 > 0$ és $\hat{\mathbf{v}} \equiv \mathbf{w}/w_0 \geqq \mathbf{0}$ helyettesítéssel azt kapjuk az előzőkből, hogy minden $\mathbf{x} \geqq \mathbf{0}$-re

$$u(\hat{\mathbf{x}}) \leqq u(\mathbf{x}) + \hat{\mathbf{v}}^*\mathbf{a}(\mathbf{x}) \equiv \eta(\mathbf{x}, \hat{\mathbf{v}}). \tag{20c}$$

Ebből $\mathbf{x} = \hat{\mathbf{x}}$-nél

$$\hat{\mathbf{v}}^*\mathbf{a}(\hat{\mathbf{x}}) \geqq 0 \quad \text{és} \quad \mathbf{a}(\hat{\mathbf{x}}) \leqq \mathbf{0} \quad (\text{azaz } \hat{\mathbf{x}} \in L) \quad \text{miatt} \quad \hat{\mathbf{v}}^*\mathbf{a}(\hat{\mathbf{x}}) = 0$$

következik, tehát valóban $u(\hat{\mathbf{x}}) = \eta(\hat{\mathbf{x}}, \hat{\mathbf{v}})$. Ha még figyelembe vesszük, hogy minden $\mathbf{v} \geqq \mathbf{0}$-ra

$$u(\mathbf{x}) \geqq u(\hat{\mathbf{x}}) + \mathbf{v}^*\mathbf{a}(\hat{\mathbf{x}}) \equiv \eta(\hat{\mathbf{x}}, \mathbf{v}), \tag{20d}$$

akkor nyilván beigazolódott, hogy minden $\mathbf{x} \geqq \mathbf{0}$, $\mathbf{v} \geqq \mathbf{0}$ vektorra

$$\eta(\hat{\mathbf{x}}, \mathbf{v}) \leqq \eta(\hat{\mathbf{x}}, \hat{\mathbf{v}}) \leqq \eta(\mathbf{x}, \hat{\mathbf{v}}), \quad \text{q. e. d.}$$

Megjegyzendő, hogy *Kuhn* és *Tucker* eredetileg csak a *differenciálható* $u(\mathbf{x})$ és $\mathbf{a}(\mathbf{x})$ esetére bizonyították be fenti tételüket, mégpedig némileg eltérő regularitási feltétel mellett. A tétel tetszőleges *konvex* függvényekre való általánosítása *Slater*-től [58] származik.

IV°. Kiegészítések a nyeregponttételhez. *1′*. Ha $u(\mathbf{x})$ és $\mathbf{a}(\mathbf{x})$ *differenciálható* függvények, akkor a (19*a*, *b*) feltételek ekvivalensek az alábbi ún. *lokális Kuhn—Tucker-feltételekkel:*

$$\eta_{\mathbf{x}}'(\hat{\mathbf{x}}, \hat{\mathbf{v}}) \geqq \mathbf{0}, \quad \hat{\mathbf{x}}^*\eta_{\mathbf{x}}'(\hat{\mathbf{x}}, \hat{\mathbf{v}}) = 0, \quad \hat{\mathbf{x}} \geqq \mathbf{0}; \tag{21a-c}$$

$$\eta_{\mathbf{x}}'(\hat{\mathbf{x}}, \hat{\mathbf{v}}) \leqq \mathbf{0}, \quad \hat{\mathbf{v}}^*\eta_{\mathbf{v}}'(\hat{\mathbf{x}}, \hat{\mathbf{v}}) = 0, \quad \hat{\mathbf{v}} \geqq \mathbf{0}. \tag{21d-f}$$

A(21*a-c*) előjel-korlátozások miatt a (21*b*) skalár szorzat $\hat{x}_j \eta'_{x_j}(\hat{\mathbf{x}}, \hat{\mathbf{v}})$ részletszorzatai mind egyenlő előjelűek, s így a skalárszorzat (21*b*) szerinti eltűnése az egyes részletszorzatok $\hat{x}_j \eta'_{x_j}(\hat{\mathbf{x}}, \hat{\mathbf{v}}) = 0$ eltűnését igényli. Értelemszerűen ugyanez mondható a (21*d, f*) előjelkorlátozások és a (21*e*) skalár szorzat viszonylatában.

Egyébként könnyen belátható, hogy a (19*a, b*) a (21*a-f*)-re vezet. Mivel rögzített $\hat{\mathbf{v}} \geqq \mathbf{0}$-nál $\eta(\mathbf{x}, \hat{\mathbf{v}})$ konvex az $\mathbf{x} \geqq \mathbf{0}$ tartományban és $\hat{\mathbf{x}} \geqq \mathbf{0}$-nál minimuma van, ezért kell, hogy minden $\mathbf{x} \geqq \mathbf{0}$-re

$$\eta(\mathbf{x}, \hat{\mathbf{v}}) - \eta(\hat{\mathbf{x}}, \hat{\mathbf{v}}) \geqq 0 \quad \text{és így} \quad (\mathbf{x} - \hat{\mathbf{x}})^* \eta'_{\mathbf{x}}(\hat{\mathbf{x}}, \hat{\mathbf{v}}) = \mathbf{x}^* \eta'_{\mathbf{x}}(\hat{\mathbf{x}}, \hat{\mathbf{v}}) - \hat{\mathbf{x}}^* \eta'_{\mathbf{x}}(\hat{\mathbf{x}}, \hat{\mathbf{v}}) \geqq 0$$

legyen; ez utóbbi az $\mathbf{x} \geqq \hat{\mathbf{x}}$ vektorokra az $\eta'_{\mathbf{x}}(\hat{\mathbf{x}}, \hat{\mathbf{v}}) \geqq \mathbf{0}$, tetszőleges $\mathbf{x} \geqq \mathbf{0}$ vektorokra pedig az $\mathbf{x}^* \eta'_{\mathbf{x}}(\hat{\mathbf{x}}, \hat{\mathbf{v}}) \geqq \hat{\mathbf{x}}^* \eta'_{\mathbf{x}}(\hat{\mathbf{x}}, \hat{\mathbf{v}}) = 0$ igényt támasztja; teljesülésük hiányában $\eta(\mathbf{x}, \hat{\mathbf{v}}) - \eta(\hat{\mathbf{x}}, \hat{\mathbf{v}}) \leqq 0$ lenne. — Hasonlóan adódik a (21*d, e*), a rögzített $\hat{\mathbf{v}} \geqq \mathbf{0}$-nál a $\mathbf{v} \geqq \mathbf{0}$-ban lineáris $\eta'(\hat{\mathbf{x}}, \mathbf{v})$ függvény maximumfeladatából.

Megfordítva, ha a (21*a-f*) teljesül, akkor az $\eta(\mathbf{x}, \hat{\mathbf{v}})$ függvény $\mathbf{x}$-beli konvexitása folytán minden $\mathbf{x} \geqq \mathbf{0}$-ra

$$\eta(\mathbf{x}, \hat{\mathbf{v}}) \geqq \eta(\hat{\mathbf{x}}, \hat{\mathbf{v}}) + (\mathbf{x} - \hat{\mathbf{x}})^* \eta'_{\mathbf{x}}(\hat{\mathbf{x}}, \hat{\mathbf{v}}) = \eta(\hat{\mathbf{x}}, \hat{\mathbf{v}}) + \mathbf{x}^* \eta'_{\mathbf{x}}(\hat{\mathbf{x}}, \hat{\mathbf{v}}) \geqq \eta(\hat{\mathbf{x}}, \hat{\mathbf{v}}),$$

továbbá az $\eta(\hat{\mathbf{x}}, \mathbf{v})$ függvény $\mathbf{v}$-beli linearitása folytán minden $\mathbf{v} \geqq \mathbf{0}$-ra

$$\eta(\hat{\mathbf{x}}, \mathbf{v}) = \eta(\hat{\mathbf{x}}, \hat{\mathbf{v}}) + (\mathbf{v} - \hat{\mathbf{v}})^* \eta'_{\mathbf{v}}(\hat{\mathbf{x}}, \hat{\mathbf{v}}) = \eta(\hat{\mathbf{x}}, \hat{\mathbf{v}}) + \mathbf{v}^* \eta'_{\mathbf{v}}(\hat{\mathbf{x}}, \hat{\mathbf{v}}) \leqq \eta(\hat{\mathbf{x}}, \hat{\mathbf{v}}).$$

E szerint a (21*a-f*) a (19*a, b*) teljesülésének s vele együtt $\hat{\mathbf{x}}$ optimalitásának szükséges és elégséges feltétele.

2'. A (21*a-f*) feltételek szemléletes értelmezése, valamint egy új, gyakran célszerűen használható formula előállítása céljából, vegyük igénybe most az $\eta(\mathbf{x}, \mathbf{v})$ *Lagrange*-függvény (18*a*) részletes alakját. A (21*d*)-ből és a (21*c*)-ből így nyert

$$\boxed{\eta'_{\mathbf{v}}(\hat{\mathbf{x}}, \hat{\mathbf{v}}) = \mathbf{a}(\hat{\mathbf{x}}) = \mathbf{0}, \quad \mathbf{x} \geqq \mathbf{0}} \tag{22a, b}$$

feltételek együtt az $\hat{\mathbf{x}} \in L$ régi megállapítást erősítik meg. A többi feltétel viszont ezen az úton az $\hat{\mathbf{x}}$ optimális megoldás újszerű jellemzését szolgáltatja. Nevezetesen, az $\eta'_{\mathbf{x}}(\hat{\mathbf{x}}, \hat{\mathbf{v}}) \equiv \mathbf{w}$ jelöléssel a (21*a*)-ból így azt kapjuk, hogy

$$u'(\hat{\mathbf{x}}) + \hat{\mathbf{v}}^* \mathbf{a}'(\hat{\mathbf{x}}) \equiv u(\hat{\mathbf{x}}) + \mathbf{A}^*(\hat{\mathbf{x}}) \hat{\mathbf{v}} \equiv$$

$$\mathbf{grad}\, u(\hat{\mathbf{x}}) + \sum_i \hat{v}_i \,\mathbf{grad}\, a_i(\hat{\mathbf{x}}) = \sum_i \hat{w}_i \mathbf{e}_i \equiv \hat{\mathbf{w}} \geqq \mathbf{0}. \tag{22c}$$

Ha most, mint korábban is feltételeztük, $\hat{x}_\mu = 0$ $(\mu = 1, 2, \ldots, m_1 \leqq m)$ és $a_\nu(\hat{\mathbf{x}}) = 0$ $(\nu = 1, 2, \ldots, n_1 \leqq n)$, akkor a (21*b, e*)-nek megfelelő

$$\begin{aligned} &\hat{\mathbf{x}}^* \hat{\mathbf{w}} = 0\text{-ból} \quad \hat{w}_{\mu^*} = 0 \quad (\mu^* = m_1 + 1, \ldots, m), \\ &\hat{\mathbf{v}}^* \mathbf{a}(\hat{\mathbf{x}}) = 0\text{-ból} \quad \hat{v}_{\nu^*} = 0 \quad (\nu^* = n_1 + 1, \ldots, n) \end{aligned} \tag{22d, e}$$

következik. Ily módon a (21*a*-*f*)-ből végeredményben azt kapjuk, hogy a (22*a*, *b*) szerint $\hat{\mathbf{x}} \in L$ és a (22*c*-*e*)-ből kifolyólag

$$-\mathbf{grad}\ u(\hat{\mathbf{x}}) = \sum_{\nu} \hat{v}_{\nu}\, \mathbf{grad}\ a_{\nu}(\hat{\mathbf{x}}) + \sum_{\mu} \hat{w}_{\mu}(-\mathbf{e}_{\mu}),\ \hat{v}_{\nu} \geqq 0,\ \hat{w}_{\mu} \geqq 0 \tag{23a}$$

$$(\nu = 1, 2, \ldots, n_1 \leqq n;\ \mu = 1, 2, \ldots, m_1 \leqq m). \tag{23b}$$

A (22*a*, *b*) és a (23*a*, *b*) formulák együttesen a (21*a*-*f*) *lokális Kuhn—Tucker-feltételek részletes alakját* szolgáltatják.

Megfordítva, ha egy $\hat{\mathbf{x}} \in L$ lehetséges megoldásra teljesülnek a (23*a*, *b*) feltételek, akkor ($\hat{v}_{\nu^*} = 0$ és $\hat{w}_{\mu^*} = 0$-sal) a (21*a*-*f*) feltételek is kielégülnek. Ily módon a (32*a*, *b*) *szükséges és elégséges feltételeknek* bizonyult ahhoz, hogy egy $\hat{\mathbf{x}} \in L$ lehetséges megoldás egyszersmind optimális megoldás is legyen. E feltételek szemléletes tartama nyilván úgy fogalmazható meg, hogy *az* $\hat{\mathbf{x}}$ *minimumhelyen a hipercélfelület (L-hez képest) külső normálisa előállítható az L e pontot hordó hiper-határfelületei külső normálisainak nem negatív lineáris kombinációjaként.* Ez más szóval azt jelenti, hogy a $-\mathbf{grad}\ u(\hat{\mathbf{x}})$ vektor beleesik a $\mathbf{grad}\ a_{\nu}(\hat{\mathbf{x}})$ és a $-\mathbf{e}_{\mu}$ vektorokra felfeszített kúpba.

Ha az $\hat{\mathbf{x}}$ történetesen az L belső pontja (s így az L egyetlen hiper-határfelülete sem hordja), akkor a (23*a*, *b*)-ben $n_1 = m_1 = 0$, azaz valamennyi $\hat{v}_i \equiv \hat{v}_{\nu^*} = 0$, $\hat{w}_j \equiv \hat{w}_{\mu^*} = 0$, s így

$$u(\hat{\mathbf{x}}) \equiv \mathbf{grad}\ u(\hat{\mathbf{x}}) = \mathbf{0}, \quad \text{ahol} \quad \hat{\mathbf{x}} > \mathbf{0} \quad \text{és} \quad \mathbf{a}(\hat{\mathbf{x}}) < \mathbf{0}. \tag{23c, d}$$

A feltételes minimum ez esetben az egész E_m térbeli szabad minimum is egyben, amely a $\mathbf{grad}\ u(\mathbf{x})$ derivált zérushelyeként nyerhető.

A (23*a*, *b*) kritériumokat a 7. ábrán szemléltettük; pl. az $\mathbf{x}_0$ pont nem optimális, mert $-\mathbf{grad}\ u(\mathbf{x}_0)$ nem fekszik a $-\mathbf{e}_2$-re és a $\mathbf{grad}\ a_1(\mathbf{x}_0)$-ra felfeszített kúpban; viszont az $\hat{\mathbf{x}}$ pont optimális, mert $-\mathbf{grad}\ u(\mathbf{x}) = \hat{v}_1\, \mathbf{grad}\ a_1(\hat{\mathbf{x}})$.

A (23*a*, *b*) jól mutatja továbbá, hogy az optimalitás szempontjából az $x_j \geqq 0$ előjel-korlátozások ugyanolyan szerepet játszanak, mint az $a_i(\mathbf{x}) \leqq 0$ kényszerfeltételek.

3'. A (23*a*) formulából az is következik, hogy a (12*a*-*c*) feladat egy $\hat{\mathbf{x}}$ megoldása egyszersmind megoldása az

$$\left\{ \sum_{\mu} x_{\mu} \frac{\partial u(\hat{\mathbf{x}})}{\partial x_{\mu}}\ ; \quad x_{\mu} \geqq 0, \quad (\mathbf{x} - \hat{\mathbf{x}})^*\, \mathbf{grad}\ a_{\nu}(\hat{\mathbf{x}}) \leqq 0 \right\} = \text{Min!} \tag{24}$$

egyszerűsített és linearizált feladatnak, amely a (12*a*)-ból az $u(\mathbf{x})$ és $a_{\nu}(\mathbf{x})$ függvények az $\hat{\mathbf{x}}$ hely környezetére érvényes lineáris közelítésével nyerhető [figyelembe véve, hogy a (18*b*) folytán $\mathbf{grad}\ a_{\nu}(\hat{\mathbf{x}}) \neq \mathbf{0}$].

Ugyancsak a (23*a*, *b*) formulákkal igazolható, hogy *lineáris kényszerfeltételek* esetén a *Kuhn—Tucker*-feltételek a (18*b*) *regularitási követelmények nélkül* veen-

dők. Ha ugyanis $a_i(\mathbf{x}) = \mathbf{a}_i^*\mathbf{x} - a_{i0}$, $\mathbf{grad}\ a_i(\mathbf{x}) = \mathbf{a}_i$ és ha $\hat{\mathbf{x}} \in \hat{L}$, akkor kell, hogy

$$\mathbf{s}^*\,\mathbf{grad}\ u(\hat{\mathbf{x}}) \geqq 0 \quad \text{legyen, midőn} \quad \mathbf{a}_\nu^*\mathbf{s} \leqq 0 \quad \text{és} \quad s_\mu = \mathbf{e}_\mu^*\mathbf{s} \geqq 0. \quad (25)$$

Egy ilyen $\mathbf{s}$-re $\mathbf{s}^*\,\mathbf{grad}\ u(\hat{\mathbf{x}}) < 0$ nem lehet, mert elég kis $\lambda > 0$-ra $\hat{\mathbf{x}}_\lambda \equiv \hat{\mathbf{x}} + \lambda\mathbf{s} \in L$, s ott $u(\hat{\mathbf{x}}_\lambda) < u(\hat{\mathbf{x}})$, vagyis $\hat{\mathbf{x}} \notin \hat{L}$, szemben a feltevéssel. — Megfordítva, a (26)-ból *Farkas* tétele* szerint a (23*a*, *b*) következik.

A (18*b*) regularitási feltétel mellett, azon $\hat{\mathbf{v}}$ *vektorok halmaza,* amelyek legalább egy $\hat{\mathbf{x}}$ optimális megoldással együtt a *Kuhn—Tucker*-tételt kielégítik, *korlátos.* Ugyanis a (20*c*) szerint minden $\mathbf{x} \geqq \mathbf{0}$-ra és $a_i(\mathbf{x}) \leqq 0$-sal

$$u(\hat{\mathbf{x}}) \leqq u(\mathbf{x}) + \hat{\mathbf{v}}^*\mathbf{a}(\mathbf{x}) \quad \text{s így} \quad u(\hat{\mathbf{x}}) \leqq u(\mathbf{x}) + \hat{v}_i a_i(\mathbf{x}).$$

Ebből a (18*b*) szerint $\mathbf{x} = \bar{\mathbf{x}}$-re vonatkozó $a_i(\bar{\mathbf{x}}) < 0$-sal osztva a

$$0 \leqq \bar{v}_i \leqq \frac{u(\hat{\mathbf{x}}) - u(\bar{\mathbf{x}})}{a_i(\bar{\mathbf{x}})}$$

körülmény, ez utóbbiból pedig — a jobb oldal független lévén az $\hat{\mathbf{x}}$ speciális megválasztásától — már az állítás igazsága következik.

4'. Hasznos tudni, hogy a *Kuhn—Tucker*-feltételek a (12*a*-*e*) konvex programozási feladat (10-11) alatt említett *egyszerűbb változataira* is könnyen megszerkeszthetők.

A) Induljunk ki a fentebb már részletesen tárgyalt általános feladatból (feltételezve továbbra is, de ott már kiírás nélkül az $u(\mathbf{x})$ és az $\mathbf{a}(\mathbf{x})$ konvexitását és folytonos differenciálhatóságát). Az *általános programozási feladat,* mint egyenlőtlenség — feltételes és előjelkorlátos minimumfeladat — a (12*a*-*c*) szerint:

$$u(\hat{\mathbf{x}}) \leqq u(\mathbf{x}); \qquad \mathbf{x}, \hat{\mathbf{x}} \geqq 0; \qquad \mathbf{a}(\mathbf{x}), \mathbf{a}(\hat{\mathbf{x}}) \leqq \mathbf{0}. \qquad (27a)$$

A megfelelő *általános Lagrange-feladat,* mint csupán előjelkorlátos minimaxfeladat — a (18*a*) és a (19*a*, *b*) szerint:

$$\eta(\mathbf{x}, \mathbf{v}) = u(\mathbf{x}) + \mathbf{a}^*(\mathbf{x})\mathbf{v}, \quad \mathbf{x} \geqq \mathbf{0}, \quad \mathbf{v} \geqq \mathbf{0}; \qquad (27a')$$

$$\eta(\hat{\mathbf{x}}, \mathbf{v}) \leqq \eta(\hat{\mathbf{x}}, \hat{\mathbf{v}}) \leqq \eta(\mathbf{x}, \hat{\mathbf{v}}), \quad \hat{\mathbf{x}} \geqq \mathbf{0}, \quad \hat{\mathbf{v}} \geqq \mathbf{0}.$$

A hozzá tartozó *általános lokális Kuhn—Tucker-feltételek* — a (21—23) szerint (az $\hat{\mathbf{y}}$ értelemszerű bevezetésével):

$$\left.\begin{array}{l} \eta'_{\mathbf{x}}(\hat{\mathbf{x}}, \hat{\mathbf{v}}) - \hat{\mathbf{w}} \equiv \mathbf{A}^*(\hat{\mathbf{x}})\hat{\mathbf{v}} + \mathbf{u}(\hat{\mathbf{x}}) - \hat{\mathbf{w}} = \mathbf{0}, \\ \eta'_{v}(\hat{\mathbf{x}}, \hat{\mathbf{v}}) + \hat{\mathbf{y}} \equiv \mathbf{a}(\hat{\mathbf{x}}) + \hat{\mathbf{y}} = \mathbf{0}, \\ \hat{\mathbf{x}} \geqq \mathbf{0}, \quad \hat{\mathbf{v}} \geqq \mathbf{0}, \quad \hat{\mathbf{w}} \geqq \mathbf{0}, \quad \hat{y} \geqq \mathbf{0}; \\ \hat{\mathbf{x}}^*\hat{\mathbf{w}} = 0, \quad \hat{\mathbf{v}}^*\hat{\mathbf{y}} = 0. \end{array}\right\} \qquad (27b)$$

---

* L. *Farkas* [52].

B) Az iménti általános feladat speciális eseteként nyerhető az alábbi *egyszerűbb programozási feladat,* mint egyenletfeltételes, de előjelkorlátos minimumfeladat:

$$u(\hat{\mathbf{x}}) \leqq u(\mathbf{x}); \quad \mathbf{x}, \hat{\mathbf{x}} \geqq \mathbf{0}; \quad \mathbf{a}(\mathbf{x}) = \mathbf{a}(\hat{\mathbf{x}}) = \mathbf{0}. \tag{28a}$$

A változatlan *Lagrange*-féle minimaxfeladathoz tartozó *lokális Kuhn—Tucker-feltételek* nyilván így egyszerűsödnek ($\hat{\mathbf{y}} = \mathbf{0}$ miatt):

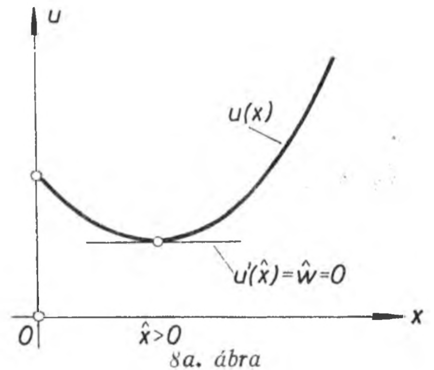
$$\left.\begin{aligned} \eta'_{\mathbf{x}}(\hat{\mathbf{x}}, \hat{\mathbf{v}}) - \hat{\mathbf{w}} &\equiv \mathbf{A}^*(\hat{\mathbf{x}})\hat{\mathbf{v}} + \mathbf{u}(\hat{\mathbf{x}}) - \hat{\mathbf{w}} = \mathbf{0}, \\ \eta'_{\mathbf{v}}(\hat{\mathbf{x}}, \hat{\mathbf{v}}) &\equiv \mathbf{a}(\hat{\mathbf{x}}) = \mathbf{0}, \\ \hat{\mathbf{x}} \geqq \mathbf{0}, &\quad \hat{\mathbf{v}} \geqq \mathbf{0}, \quad \hat{\mathbf{w}} \geqq \mathbf{0}; \\ \hat{\mathbf{x}}^*\hat{\mathbf{w}} &= 0. \end{aligned}\right\} \tag{28b}$$

C) Még egyszerűbb speciális eset az alábbi *csonka programozási feladat,* mint közönséges, egyenlet-feltételes minimumfeladat:

$$u(\hat{\mathbf{x}}) \leqq u(\mathbf{x}), \quad \mathbf{a}(\mathbf{x}) = \mathbf{a}(\hat{\mathbf{x}}) = \mathbf{0}. \tag{29a}$$

Ez az a klasszikus eset, amelyet az *α)* III°-ban a *Lagrange*-féle multiplikátor módszerével tárgyaltunk. A fenti *Lagrange*-féle minimax-feladatból most elmarad az $\mathbf{x}, \hat{\mathbf{x}} \geqq \mathbf{0}$ előjel-korlátozás s e miatt az $\hat{\mathbf{x}}^*\hat{\mathbf{w}} = 0$, $\hat{\mathbf{w}} \geqq \mathbf{0}$ feltételek csak $\hat{\mathbf{w}} = \mathbf{0}$ esetén teljesülnek biztosan (pl. $\hat{\mathbf{x}} > \mathbf{0}$ esetén; v. ö. a (23*c*, *d*)-nél mondottakkal is). Sőt elhagyható a multiplikátorra vonatkozó $\hat{\mathbf{v}} \geqq \mathbf{0}$ előjel-korlátozás is. Az *extrémum-feltételek* tehát most eképpen egyszerűsödnek:

$$\left.\begin{aligned} \eta'_{\mathbf{x}}(\hat{\mathbf{x}}, \hat{\mathbf{v}}) &\equiv \mathbf{A}^*(\hat{\mathbf{x}})\hat{\mathbf{v}} + \mathbf{u}(\hat{\mathbf{x}}) = \mathbf{0}, \\ \eta'_{\mathbf{v}}(\hat{\mathbf{x}}, \hat{\mathbf{v}}) &\equiv \mathbf{a}(\hat{\mathbf{x}}) = \mathbf{0}. \end{aligned}\right\} \tag{29b}$$



8a. ábra

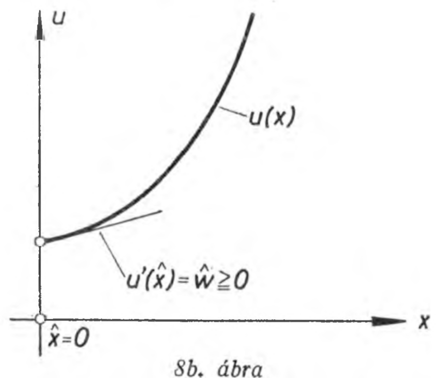
Ezek megegyeznek az *α)* III°-beli *Lagrange*-féle lokális szabad extrémumfeladat szükséges feltételeivel, melyek — az itteni konvexitási feltételekkel kiegészítve — elégségesek lesznek.

D) Említésre méltó az alábbi *hiányos programozási feladat* mint közönséges, csupán előjelkorlátos minimumfeladat:

$$u(\hat{\mathbf{x}}) \leqq u(\mathbf{x}), \quad \mathbf{x}, \hat{\mathbf{x}} \geqq 0, \tag{30a}$$

valamint a megfelelő *lokális Kuhn—Tucker-feltételek :*

$$\left.\begin{aligned} u'(\hat{\mathbf{x}}) - \hat{\mathbf{w}} &\equiv \mathbf{u}(\hat{\mathbf{x}}) - \hat{\mathbf{w}} = \mathbf{0}, \\ \hat{\mathbf{x}} \geqq \mathbf{0}, &\quad \hat{\mathbf{w}} \geqq \mathbf{0}; \\ \hat{\mathbf{x}}^*\hat{\mathbf{w}} &= \mathbf{0}. \end{aligned}\right\} \tag{30b}$$



8b. ábra

A 8*a*., *b*. ábrán feltüntettük az $\hat{x}\hat{w}=0$ feltétel teljesülését az $x\geqq 0$ tartomány belsejében, ill. határán.
Ez utóbbi esetben a *Lagrange*-feladat a közönséges előjelkorlátos extrémum-feladatra egyszerűsödik, lévén $\eta(\mathbf{x}, \mathbf{v}) \equiv y(\mathbf{x})$.

E) Végül álljon itt még az elképzelhető *legegyszerűbb programozási feladat*, mint közönséges szabad minimumfeladat:

$$u(\hat{\mathbf{x}}) \leqq u(\mathbf{x}), \tag{31a}$$

és a megfelelő (szükséges) *extrémumfeltétel* (mely az itteni konvexitás miatt elégséges is):

$$u'(\hat{\mathbf{x}}) \equiv \mathbf{u}(\hat{\mathbf{x}}) = \mathbf{0}. \tag{31b}$$

A fenti összeállítás jól érzékelteti a konvex $u(\mathbf{x})$ és $\mathbf{a}(\mathbf{x})$ függvényekkel kapcsolatos és *egyre enyhébb kényszerfeltételeknek* alávetett programozási (minimum-) feladat megoldási kritériumainak, ti. a (lokális) *Kuhn—Tucker-feltételeknek fokozatos egyszerűsödését.*

b) A konvex programozás megoldó algoritmusairól (KP—VA)

α) Megoldás különböző gradiens-módszerekkel (GVA)

I°. Á l t a l á n o s m e g j e g y z é s e k. *1'.* Az *a) β)* I°. pontban megismerkedtünk az

$$\{u(\mathbf{x});\quad \mathbf{x} \geqq \mathbf{0},\quad \mathbf{a}(\mathbf{x}) \leqq \mathbf{0}\} = \text{Min!} \quad (\mathbf{x} \in E_m,\quad \mathbf{a} \in E_n) \tag{1a, b, c}$$

alakú *matematikai programozási (minimum-) feladattal.* Ugyanezt az *a) β)* II° pontban — az

$$u(\mathbf{x} + \lambda\Delta\mathbf{x}) \leqq u(\mathbf{x}) + \lambda\Delta u, \quad \text{ill.} \quad \mathbf{a}(\mathbf{x} + \lambda\Delta\mathbf{x}) \leqq \mathbf{a}(\mathbf{x}) + \lambda\Delta\mathbf{a} \tag{1d, e}$$

követelményekkel kiegészítve — a *konvex programozási (minimum-) feladatra* szűkítettük. Minthogy az $\mathbf{a}(\mathbf{x})$ feltételi és az $u(\mathbf{x})$ célfüggvény — az $\mathbf{x}$ szempontjából nézve — általában nem elsőfokú, ezért az (1*a*-*c*-*e*)-t *nemlineáris* (konvex) programozási feladat néven is emlegetjük.

Az ilyen feladatot, mint általában a nemlineáris egyenlet-, ill. egyenlőtlenség-rendszert, gyakorlatilag valamilyen közelítő módszerrel szoktuk megoldani, többnyire még akkor is, ha elvileg mód van zárt alakú, pontos megoldás megkeresésére (de rendszerint súlyos bonyodalmak árán). Ilyen körülmények között célszerű most megismerkedni a nemlineáris (konvex) programozás *egy-két általános közelítő módszerével* és egyben kiemelni ezeket a különféle speciális feladatok (pl. a kvadratikus programozás) megoldására javasolt *különleges közelítő, esetleg pontos módszerek széles változatosságából;* az utóbbiak némelyikéről a II°—III°. pontban kívánunk röviden megemlékezni.

Figyelemre méltó, hogy a szóban forgó közelítő (esetleg pontos) módszereket olykor nem magára az (1*a*-*c*-*e*) programozási feladatra, hanem az *a) β)* IV°. 4'

szerint neki megfelelő

$$\left.\begin{array}{l}\eta(\mathbf{x}, \mathbf{v}) \equiv u(\mathbf{x}) + \mathbf{a}^*(\mathbf{x})\mathbf{v}, \quad \mathbf{x} \geqq \mathbf{0}, \quad \mathbf{v} \geqq \mathbf{0}; \\ \eta(\hat{\mathbf{x}}, \mathbf{v}) \leqq \eta(\hat{\mathbf{x}}, \hat{\mathbf{v}}) \leqq \eta(\mathbf{x}, \hat{\mathbf{v}}), \quad \hat{\mathbf{x}} \geqq \mathbf{0}, \quad \hat{\mathbf{v}} \geqq \mathbf{0}\end{array}\right\} \tag{2a}$$

adjungált Lagrange-feladat

$$\left.\begin{array}{l}\eta'_{\mathbf{x}}(\hat{\mathbf{x}}, \hat{\mathbf{v}}) - \hat{\mathbf{w}} \equiv \mathbf{A}^*(\hat{\mathbf{x}})\hat{\mathbf{v}} + u(\hat{\mathbf{x}}) - \hat{\mathbf{w}} = \mathbf{0}, \\ \eta'_{\mathbf{v}}(\hat{\mathbf{x}}, \hat{\mathbf{v}}) + \hat{\mathbf{y}} \equiv \qquad \mathbf{a}(\hat{\mathbf{x}}) + \hat{\mathbf{y}} = \mathbf{0}; \\ \hat{\mathbf{x}} \geqq \mathbf{0}, \quad \hat{\mathbf{v}} \geqq \mathbf{0}, \quad \hat{\mathbf{w}} \geqq \mathbf{0}, \quad \hat{\mathbf{y}} \geqq \mathbf{0}; \\ \hat{\mathbf{x}}^*\hat{\mathbf{w}} = 0, \qquad \hat{\mathbf{v}}^*\hat{\mathbf{y}} = 0\end{array}\right\} \tag{2b}$$

lokális Kuhn—Tucker-feltételeire alkalmazzuk (persze, az $u(\mathbf{x})$ és $\mathbf{a}(\mathbf{x})$ folytonos differenciálhatósága esetén, ami bizonyos mértékű *fokszám-redukciót* is magával hoz.

Az általános közelítő módszerek közül az alábbiakban főleg az ún. *gradiens-módszereket* kívánjuk bemutatni, mások, pl. az ún. *gradiensvetítési módszer (Rosen)*, az ún. *multiplexmódszer (Frisch)* és a *lehetséges irányok módszere (Zoutendijk)* tekintetében a változatos szakirodalomra utalva.

Megjegyzendő, hogy a szakirodalom ezen általános vagy legalább általánosítható módszereket is jórészt speciális (pl. kvadratikus programozási) feladatokra alkalmazva közli s így általános megfogalmazásuk olykor némi gondot okoz.

A fenti előkészítő észrevételek után térjünk rá most a *legismertebb* nemlineáris (konvex) programozási közelítő módszerek, az ún. gradiens-módszerek ismertetésére.

II°. Görbe menti gradiens-módszerek (GgVA). *1'.* Vezessük be e módszert az

$$u(\mathbf{x}) = \text{Min!} \quad u(\mathbf{x} + \lambda\Delta\mathbf{x}) < u(\mathbf{x}) + \lambda\Delta u \; (\Delta\mathbf{x} \neq \mathbf{0}) \tag{3a, b}$$

egyszerű probléma vagyis *szigorúan konvex függvény szabad minimumfeladata* kapcsán.

Gyakorlati megoldására, induljunk ki valamely $\mathbf{x}_0$ rajtpontból és haladjunk az $u(\mathbf{x}) = \text{const}$ szintfelületseregnek az $\mathbf{x}_0$-ra illeszkedő $\mathbf{x}(t)$ *ortogonális trajektóriája*, vagy ami ugyanaz, az $u(\mathbf{x}) \equiv \mathbf{grad}\, u(\mathbf{x})$ gradiens-vektormezőnek az $\mathbf{x}_0$-ra illeszkedő $\mathbf{x}(t)$ vektor vonala, érintőgörbéje mentén, mégpedig a $-u(\mathbf{x})$ *negatív gradiens*, vagy az u skalár leggyorsabb csökkenése irányában. Az így befutandó trajektória (vektorvonal, érintőgörbe) *differenciálegyenlete* nyilván

$$\dot{\mathbf{x}} \equiv \frac{d\mathbf{x}}{dt} = -\mathbf{grad}\, u(\mathbf{x}) \equiv -u(\mathbf{x}). \tag{3c}$$

E görbe bizonyára az $u(\mathbf{x})$ függvény keresett $\hat{\mathbf{x}}$ minimumpontjában (lokális és globális egyaránt!) végződik, ahol is szükségszerűen

$$u(\hat{\mathbf{x}}) \equiv \mathbf{grad}\ u(\hat{\mathbf{x}}) = \mathbf{0}, \tag{3d}$$

vagyis $\hat{\mathbf{x}}$ a gradiensfüggvény zérushelye is egyben.

Az $\mathbf{x}(t)$ trajektóriának, mint az $\hat{\mathbf{x}}$ minimumpont felé haladó mozgás pályagörbéjének a (3c) differenciálegyenlet *integrálgörbéjeként* való pontos meghatározása többnyire nehézségbe ütközik, s így a különböző közelítő eljárások valamelyikével kell azt a kívánt pontossággal előállítanunk. Pl. az *Euler-féle poligon-eljárás*

$$\Delta\mathbf{x}_k \approx u(\mathbf{x}_k)\,\Delta t_k \quad (\Delta\mathbf{x}_k \equiv \mathbf{x}_{k+1} - \mathbf{x}_k, \quad \Delta t_k \equiv t_{k+1} - t_k; \quad k = 1, 2, \ldots) \tag{3e}$$

érintő poligonnal közelíti a keresett görbét. A különböző *gradiensmódszerek* lényegében csak a t_k paraméterek, ill. a megfelelő $\mathbf{x}_k$ osztópontok megválasztásában térnek el egymástól.

2'. A gradiens-módszerek fenti alapgondolatát próbáljuk most kiterjeszteni, általánosítani az

$$\{u(\mathbf{x});\quad \mathbf{a}(\mathbf{x}) \leqq \mathbf{0}\} = \text{Min!} \tag{4a-d}$$

$$u(\mathbf{x} + \lambda\Delta\mathbf{x}) \leqq u(\mathbf{x}) + \lambda\Delta u, \quad \mathbf{a}(\mathbf{x} + \lambda\Delta\mathbf{x}) \leqq \mathbf{a}(\mathbf{x}) + \lambda\Delta\mathbf{a}$$

konvex programozási feladatra. Itt — az egyszerűség kedvéért — mellőztük az (1b) szerinti $\mathbf{x} \geqq \mathbf{0}$ előjel-korlátozást, amely $-\mathbf{x} \leqq \mathbf{0}$ formában amúgy is beépíthető az (1c) szerinti $\mathbf{a}(\mathbf{x}) \leqq \mathbf{0}$ feltételbe.

A (4a-d) feladat megoldására, egy $\mathbf{x}_0 \in L$ rajtpontból kiindulva ismét az $u(\mathbf{x}) = c$ szintfelületsereg megfelelő $\mathbf{x}(t)$ ortogonális trajektóriája, mint pályagörbe mentén kívánunk haladni s most is a $-u(\mathbf{x}) \equiv -\mathbf{grad}\,u(\mathbf{x})$ negatív gradiens, vagyis az u skalár leggyorsabb csökkenése irányában. Esetünkben azonban gondoskodni kell arról, hogy e mozgás közepette *ne szaladjunk ki* a (4b) feltétellel megszabott *L lehetséges megoldási tartományból.* Az $\mathbf{a}(\mathbf{x}) \leqq \mathbf{0}$ kényszer figyelembevételét kell tehát biztosítani, és ezt szintén *többféle eljárással* lehet eszközölni.

3'. Az egyszerű (szakadásos) gradiens-módszernél a pályagörbe differenciálegyenletét

$$\dot{\mathbf{x}} \equiv \frac{d\mathbf{x}}{dt} = -\mathbf{grad}\ u(\mathbf{x}) - \sum_{i=1}^{n} \omega_i(\mathbf{x})\,\mathbf{grad}\ a_i(\mathbf{x}) \equiv -u(\mathbf{x}) - \sum_{i=1}^{n} \omega_i(\mathbf{x})\mathbf{a}_i(\mathbf{x}),$$

$$\text{ahol } \omega_i(\mathbf{x}) = \begin{cases} 0, & \text{ha } a_i(\mathbf{x}) \leqq 0, \quad \text{vagy} \quad \mathbf{x} \in L \\ N, & \text{ha } a_i(\mathbf{x}) > 0, \quad \text{vagyis} \quad \mathbf{x} \notin L \end{cases} \tag{5a, b}$$

módon írjuk elő. E szerint az L belsejében és határán a szokásos $\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{u}(\mathbf{x})$ sebességgel haladunk, azonban az L-et az i-edik határfelületen elhagyva, rögtön hozzáadandó az $\dot{\mathbf{x}}$-hoz az L belseje felé irányuló $\dot{\mathbf{x}}_i = N\mathbf{a}_i(\mathbf{x})$ *járulékos kompo-*

nens, amely a pályagörbét — iránytöréssel — nyomban visszatéríti az L tartományba. Elegendő nagy N választásával a pályagörbe L-ből való kilépését is meg lehet akadályozni.

E módszer hátránya, hogy — az $\omega_i(\mathbf{x})$ függvénynek az L határfelületein jelentkező ($|N|$ mértékű) ugrása miatt — az ($5a$, b) differenciálegyenlet esetleg nem oldható meg, s ilyenkor nem is folytatjuk az eljárást. Inkább arra jó ez a módszer, hogy a kényszerfeltételek befolyását szemléltesse.

4'. A módosított (folytonos) gradiensmódszer matematikailag járhatóbb utat mutat a pályagörbe meghatározására, mert a szakadásos $\omega_i(\mathbf{x})$ függvény helyett a folytonosan változó v_i *Lagrange-multiplikátorokat alkalmazza* és csak ezek t szerinti deriváltjában enged meg szakadást. Ez esetben a pályagörbe differenciálegyenletrendszerét

$$\dot{\mathbf{x}} \equiv \frac{d\mathbf{x}}{dt} = -\mathbf{grad}\; u(\mathbf{x}) - \sum_{i=1}^{n} v_i\, \mathbf{grad}\; a_i(\mathbf{x}) \equiv -\mathbf{u}(\mathbf{x}) - \sum_{i=1}^{n} v_i \mathbf{a}_i(\mathbf{x}), \qquad (6a,\ b,\ c)$$

$$\ddot{\mathbf{x}} \equiv \frac{d^2\mathbf{x}}{dt^2} = -\sum_{i=1}^{n} \frac{\partial v_i}{\partial t}\mathbf{a}_i(\mathbf{x}), \quad \text{ahol} \quad \frac{\partial v_i}{\partial t} = \begin{cases} a_i(\mathbf{x}), & \text{ha } a_i(\mathbf{x}) \geqq 0, \text{ vagy } v_i > 0; \\ 0, & \text{ha } a_i(\mathbf{x}) < 0 \text{ és } v_i = 0 \end{cases}$$

módon írjuk elő. Így az $\dot{\mathbf{x}}$ sebesség folytonos [ha $u(\mathbf{x})$ és $a_i(\mathbf{x})$ is az], csak az $\ddot{\mathbf{x}}$ gyorsulás szenved szakadást, midőn belülről az L tartomány i-edik határfelületét elérve $\mathbf{0}$-ról $-a_i(\mathbf{x})\mathbf{a}_i(\mathbf{x})$-ra ugrik. Ez az L-re nézve *„centripetális" gyorsulás* ismét az L felé tereli a mozgás $\dot{\mathbf{x}}$ irányát, a v_i-vel együtt növelvén annak $\dot{\mathbf{x}}_i = -v_i\mathbf{a}_i(\mathbf{x})$ komponensét. Célszerű mindvégig $0 \leqq v_i$-vel dolgozni (a *Lagrange*-feladat $\mathbf{v} \geqq \mathbf{0}$ követelményének is megfelelően).

Megjegyzendő, hogy a *Lagrange*-függvény korábbi jelöléseivel (l. az *a*) *β*) IV°-ot) a ($6a$, b, c) formularendszert

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = -\eta'_{\mathbf{x}}(\mathbf{x}, \mathbf{v}), \qquad \ddot{\mathbf{x}}(t) = -\sum_{i=1}^{n} \frac{\partial v_i}{\partial t}\, \eta''_{\mathbf{x}, v_i}(\mathbf{x}, \mathbf{v}),$$

$$\frac{\partial v_i}{\partial t} = \begin{cases} \eta'_{v_i}, & \text{ha } \eta'_{v_i} \geqq 0, \text{ vagy } v_i > 0; \\ 0, & \text{ha } \eta'_{v_i} < 0, \text{ és } v_i = 0 \end{cases} \qquad (6a',\ b',\ c')$$

alakra *írhatjuk át*.

Meg lehet mutatni*, hogy a fenti differenciálegyenletek — adott $\mathbf{x}_0 = \mathbf{x}(0)$, $\mathbf{v}_0 = \mathbf{v}(0) \geqq \mathbf{0}$ rajtpont és bizonyos regularitási feltevések mellett — olyan $\mathbf{x}(t)$, $\mathbf{v}(t)$ megoldással rendelkeznek, amelyek $t \to \infty$-nél $\hat{\mathbf{x}}$, $\hat{\mathbf{v}}$-hez tartanak. Ez az $\hat{\mathbf{x}}$ éppen a ($4a$-d) feladat optimális megoldása; ui. az $\hat{\mathbf{x}}$, $\hat{\mathbf{v}}$ helyen bizonyára $\dot{\hat{\mathbf{x}}} = 0$ és $\dot{\hat{\mathbf{v}}} = 0$, ahonnan a ($6a'$, b', c') figyelembevételével az

$$\eta'_{\mathbf{x}}(\hat{\mathbf{x}}, \hat{\mathbf{v}}) = \mathbf{0}, \qquad \eta'_{\mathbf{v}}(\hat{\mathbf{x}}, \hat{\mathbf{v}}) \leqq \mathbf{0}, \qquad \hat{\mathbf{v}}^* \eta'_{\mathbf{v}}(\hat{\mathbf{x}}, \hat{\mathbf{v}}) = 0, \qquad \hat{\mathbf{v}} \geqq \mathbf{0} \qquad (7)$$

---

* L. pl. *Arrow* stb. [9].

formulák következnek, megegyezésben az *a)* *β)* IV° alatti *Kuhn—Tucker*-féle optimumfeltételekkel, q. e. d.

Az ($5a$, b) és a ($6a$, b, c) differenciálegyenletek keresett integrálgörbéjének pontos meghatározása méginkább nehézségekbe ütközik, mint az egyszerűbb ($3c$) differenciálegyenleté, következésképpen azoknál még fokozottabban előtérbe kerülnek a különféle közelítő módszerek. Fontosságuk miatt beszéljünk külön ezekről!

III°. Poligon menti gradiensmódszerek (GpVA). *1'*. A ($4a$-d) egyszerűsített vagy akár az ($1a$-e) teljes konvex programozási feladat gyakorlati megoldására nem az $\mathbf{x}_0$ rajtpontból kiinduló trajektória folytonos befutásával, hanem egy *közelítő poligonja* szomszédos csúcspontjaira ugrálva, ún. *hosszú lépésekben* közeledünk a keresett $\hat{\mathbf{x}}$ optimumhoz.

A közelítő poligon $\mathbf{x}_k$ csúcspontjait egymás után, iteratíve állapítjuk meg. Azt a kérdést, hogy az $\mathbf{x}_k$ pontból *milyen irányú és hosszú lépéssel* jussunk el az $\mathbf{x}_{k+1}$ pontba, a különböző iteratív eljárások más és más elv alapján döntik el s lényegében ebben térnek el egymástól. Az irány kijelölése pl. magával a $-\mathbf{u}(\mathbf{x})$ negatív gradienssel, vagy egy hozzá hegyesszög alatt hajló $\mathbf{s}$ vektorral stb. történik. A hossz kiszabásánál a lehetséges megoldások L tartományának elhagyását ilyen vagy olyan módon meg kell akadályozni, mégpedig az egész eljárás folyamán. Így elérhető, hogy — feladatunknak megfelelően —

$$u(\mathbf{x}_{k+1}) < u(\mathbf{x}_k); \quad \mathbf{x}_k \in L, \quad \mathbf{x}_{k+1} = \mathbf{x}_k + \lambda_k \mathbf{s}_k \in L \ (k = 0, 1, 2, \ldots; \lambda_k > 0) \tag{8}$$

legyen. Az alábbiakban röviden vázoljuk, hogy az imént felvetett kérdést *miként oldjuk meg az ismertebb eljárásokkal.*

2'. Tegyük fel, hogy a ($4a$, c) szerinti $u(\mathbf{x})$ célfüggvény kétszer, a ($4b$, d) szerinti $\mathbf{a}(\mathbf{x})$ feltételi függvény egyszer folytonosan differenciálható az $E_m = \{\mathbf{x}\}$ térben, s így ott bármely $\mathbf{x} + \Delta\mathbf{x} \equiv \mathbf{x} + \lambda\mathbf{s}$ ($\lambda > 0$) pontban előállítható

$$u(\mathbf{x} + \lambda\mathbf{s}) \approx u(\mathbf{x}) + \mathbf{u}^*(\mathbf{x}) \cdot \lambda\mathbf{s} + \frac{\lambda^2}{2}\mathbf{s}^*\mathbf{U}(\mathbf{x})\mathbf{s} \equiv Q_u(\mathbf{x}) \equiv q_u(\lambda), \tag{8a}$$

illetve

$$\mathbf{a}(\mathbf{x} + \lambda\mathbf{s}) \approx \mathbf{a}(\mathbf{x}) + \mathbf{A}(\mathbf{x}) \cdot \lambda\mathbf{s} \equiv L_a(\mathbf{x}) \equiv l_a(\lambda) \tag{8b}$$

közelítő (másod-, ill. elsőfokú) *Taylor-polinomjával*, s *konvexitásuk* folytán minden $\mathbf{x}$-re és $\mathbf{s}$-re

$$\mathbf{s}^*\mathbf{U}(\mathbf{x})\mathbf{s} \geqq 0, \quad \text{illetve} \quad [\mathbf{A}(\mathbf{x} + \lambda\mathbf{s}) - \mathbf{A}(\mathbf{x})]\mathbf{s} \geqq \mathbf{0}. \tag{8c, d}$$

Ugyanezekre, mint a rögzített $\mathbf{x}$, $\mathbf{s}$ vektorú *sugár menti, λ változós* (és λ-ban is konvex) *függvényekre* nézve írható, hogy az $a_i(\mathbf{x} + \lambda\mathbf{s}) \approx l_{a_i}(\lambda)$ feltételi

függvénykomponens ottani *zérusértékű* felső határát közelítőleg az

$$l_{a_i}(\lambda) \equiv a_i(\mathbf{x}) + \mathbf{a}^i(\mathbf{x})\mathbf{s} \cdot \lambda' \equiv l_{a_i}(0) + l'_{a_i}(0) \cdot \lambda' = 0$$

egyenletből nyert

$$\lambda' = -\frac{l_{a_i}(0)}{l'_{a_i}(0)} \equiv \frac{a_i(\mathbf{x})}{a^i(\mathbf{x})\mathbf{s}} \equiv -\frac{a_i}{d_i} > 0 \quad (d_i \neq 0) \tag{9a}$$

érték(ek)nél éri el, az $u(\mathbf{x} + \lambda\mathbf{s}) \approx q_u(\lambda)$ célfüggvény pedig a sugár menti *minimumát* közelítőleg a

$$q'_u(\lambda) \equiv \mathbf{u}^*(\mathbf{x})\mathbf{s} + \lambda'' \cdot \mathbf{s}^*\mathbf{U}(\mathbf{x})\mathbf{s} \equiv q'_u(0) + q''_u(0) \cdot \lambda'' = 0$$

egyenletből nyert

$$\lambda'' = -\frac{q'_u(0)}{q''_u(0)} \equiv -\frac{u^*(\mathbf{x})\mathbf{s}}{\mathbf{s}^*\mathbf{U}(\mathbf{x})\mathbf{s}} \equiv -\frac{g}{q} > 0 \quad (q \neq 0) \tag{9b}$$

helyen.

Ilyen előkészületek után kezdjük az iterációt egy $\mathbf{x}_0 \in L$ *belső rajtpontban*, amelyben tehát $\mathbf{a}(\mathbf{x}_0) < \mathbf{0}$. Első lépésként induljunk ki az $\mathbf{x}_0$-ból az $\mathbf{s} = \mathbf{u}(\mathbf{x}_0) \equiv \equiv -\mathbf{grad}\, u(\mathbf{x}_0)$ negatív gradiens, vagyis az u skalár leggyorsabb csökkenése *irányában*, tehát az

$$\mathbf{x}_0 + \lambda_0\mathbf{s}_0 \equiv \mathbf{x}_0 - \lambda_0\mathbf{u}(\mathbf{x}_0), \; (0 >)\; \mathbf{u}^*(\mathbf{x}_0)\mathbf{s}_0 \equiv -\mathbf{u}^2(\mathbf{x}_0) = \text{Min} \tag{10a}$$

sugár mentén. Haladjunk rajta az ottani λ_0 zérushely(ek) és a λ'' minimumhely közül az ($\mathbf{x}_0$-tól számított) *legközelebbiig*, vagyis a

$$\lambda_0 = \text{Min}\,(\lambda'_0, \lambda''_0) > 0 \tag{10b}$$

pontig. Tegyük fel, hogy ez éppen a sugár menti minimumhely, azaz

$$(0 <) \quad \lambda_0 = \lambda''_0 \quad (< \lambda'). \tag{10c}$$

[Ellenkező esetben, tehát ha $\lambda'' > \lambda' > 0$, sőt esetleg $\lambda'' \to +\infty$ (midőn $q \equiv \mathbf{s}_0^*\mathbf{U}(\mathbf{x}_0)\mathbf{s}_0 \to 0$), akkor az $u(\mathbf{x}_0 + \lambda\mathbf{s}_0)$ függvény monoton csökken a $(0, \lambda'_1)$ szakaszon, azaz ott $q'_u(\lambda) \leqq 0$, és a sugár menti minimumhely az L-en kívülre kerül.

Tegyük fel továbbá, hogy *néhány újabb lépés*, mondjuk, még a h-1-edik is az elsőhöz *hasonló jellegű* lesz, tehát az $\mathbf{u}(\mathbf{x}_k)$ irányú sugarak $\lambda_k = \lambda''_k$ minimumhelyei az L belsejében maradnak. Írható tehát, hogy e lépések során

$$\left\| \begin{array}{l} \mathbf{x}_{k+1} = \mathbf{x}_k + \lambda_k\mathbf{s}_k \equiv \mathbf{x}_k - \lambda_k\mathbf{u}_k \in L, \quad (0 <)\; \mathbf{u}_k^*\mathbf{s}_k = -\mathbf{u}_k^2 = \text{Min}; \quad (11a,\, b,\, c) \\ \lambda_k = \text{Min}\,(\lambda'_k, \lambda''_k) > 0; \quad \lambda_k = \lambda''_k \equiv +\dfrac{\mathbf{u}^2}{\mathbf{u}_k^*\mathbf{U}_k\mathbf{u}_k} \quad (< \lambda_k) \\ [\mathbf{u}_k \equiv \mathbf{u}(\mathbf{x}_k), \quad \mathbf{U}_k \equiv \mathbf{U}(\mathbf{x}_k); \quad k = 0, 1, 2, \ldots, h-1]. \end{array} \right.$$

3'. Jegyezzük meg, hogy a közelítő (poligon menti) gradiensmódszerek egy része *az imént mondottak szerint* bonyolítja le az iteráció kezdeti, az L belsejére korlátozódó lépéseit. Az *egyéb alapelven* induló eljárások közül figyelemre méltó a *Stiefel—Hestenes-féle* konjugált gradiensek módszere [68]. Ennél a (11*a-c*) helyébe az

$$\mathbf{x}_{k+1} = \mathbf{x}_k + \lambda_k \mathbf{s}_k \in L, \quad \mathbf{u}_k^* \mathbf{s}_k < 0; \quad \mathbf{s}_k^* \mathbf{U}_k \mathbf{s}_\varkappa = 0;$$

$$\lambda_k = \operatorname{Min}(\lambda_k', \lambda_k'') > 0; \quad \lambda_k = \lambda_k'' \equiv -\frac{\mathbf{u}_k^* \mathbf{s}_k}{\mathbf{s}_k^* \mathbf{U}_k \mathbf{s}_k} \quad (< \lambda_k') \qquad (12a\text{-}d)$$

$$[\mathbf{s}_0 \equiv \mathbf{u}_0, \quad \mathbf{u}_k \equiv \mathbf{u}(\mathbf{x}_k), \quad \mathbf{U}_k \equiv \mathbf{U}(\mathbf{x}_k);$$

$$k = 0, 1, 2, \ldots, h-1; \qquad \varkappa = 0, 1, 2, \ldots, k-1]$$

formulák lépnek. Az $\mathbf{s}_k$ irányvektort — az $\mathbf{s}_0, \mathbf{s}_1, \ldots, \mathbf{s}_{k+1}$-gyel a (12*b*) szerint eszközölt *konjugálása nem határozza meg teljesen;* e célra a szerzők [68] kiegészítő előírásokat adtak meg.

4'. Ugyancsak említést érdemel a *Zoutendijk-féle* lehetséges irányok módszere. Ez az $\mathbf{x}_k \in L$ belső pontból kiindulva minden olyan $\mathbf{s}_k$ irányt *lehetségesnek* tart, amely nem hagyja el rögtön az L tartományt, azaz ($d\lambda > 0$-nál)

$$\mathbf{a}(\mathbf{x}_k + d\lambda \mathbf{s}_k) \approx \mathbf{a}(\mathbf{x}_k) + \mathbf{A}(\mathbf{x}_k) \cdot d\lambda \mathbf{s}_k \leqq \mathbf{0}, \text{ s így } d\lambda \cdot \mathbf{A}_k \mathbf{s}_k \leqq -\mathbf{a}_k \ (> \mathbf{0}). \qquad (13a)$$

Ezek közül a $-\mathbf{u}(\mathbf{x}_k) \equiv -\mathbf{grad}\, u(\mathbf{x}_k)$ negatív gradienssel hegyesszöget bezáró, tehát a célfüggvény csökkenése irányába mutató $\mathbf{s}_k$ vektorokat tekinti *használhatónak,* amelyekre így

$$-\mathbf{u}^*(\mathbf{x}_k)\mathbf{s}_k \equiv -\mathbf{u}_k^* \mathbf{s}_k > 0, \qquad (13b)$$

sőt e (13*b*) függvényt maximálni igyekszünk a (13*a*) feltétel mellett (lineáris alprogram). Az $\mathbf{x}_k$-hoz rendszerint a lehetséges és használható (sőt akár a $-\mathbf{u}_k^* \mathbf{s}_k$-et maximáló) $\mathbf{s}_k$ irányvektorok egész *halmaza* tartozik; ebből *a legkedvezőbb irányt* az alábbi *kiegészítő feltételek* valamelyikének érvényesítésével nyerjük:

$$\mathbf{s}_k^2 \leqq 1, \qquad |s_{jk}| \leqq 1, \qquad s_{jk} \begin{Bmatrix} \leqq 1, & \text{ha} & u_{ik} > 0 \\ \geqq -1, & \text{ha} & u_{ik} < 0 \end{Bmatrix},$$

$$-\mathbf{u}_k^* \mathbf{s}_k \leqq 1, \quad \mathbf{A}_k \mathbf{s}_k \leqq -\mathbf{a}_k \qquad (14a\text{-}f)$$

$$[s_{jk} = \mathbf{e}_j^* \mathbf{s}_k, \quad u_{jk} = \mathbf{e}_j^* \mathbf{u}_k, \quad \mathbf{A}_k \equiv \mathbf{A}(\mathbf{x}_k), \quad \mathbf{a}_k \equiv \mathbf{a}(\mathbf{x}_k); \quad j = 1, 2, \ldots, m].$$

c) Kvadratikus programozás, szimplex-matrixalgoritmussal (SqMA)

α) A kvadratikus programozás feladatáról általában

I°. B e v e z e t ő m e g j e g y z é s e k. *1'.* A 2. *a) α)* részben utaltunk arra, hogy üzemgazdasági vizsgálatokban gyakran sikerül — bizonyos érvényességi határokon belül — lineáris matematikai modellel megközelíteni a valóságos üzemi folyamatot, azaz ilyenkor *lineáris programozással* megállapítani az akcióparaméterek optimális kombinációit. Ez az eset a legkedvezőbb, mert éppen a l. prs a legegyszerűbb a matematikai prs-i módszerek közül.

Újabban mind sűrűbben fordul elő azonban, hogy — a közelítés javítása és az érvényességi határok kiszélesítése érdekében — bonyolultabb nemlineáris, pl. kvadratikus matematikai modellel kényszerülünk leírni a valóságos üzemi folyamatot s ennek megfelelően a sokkal körülményesebb *kvadratikus programozással** meghatározni az optimális akcióprogramot. Más esetben olykor hiperbolikus vagy egyéb fajta nemlineáris programozási** módszer igénybevételének szükségessége is felmerül.

2'. E helyen a kv. prs-sal kívánunk röviden — csupán az alapvető ismeretekre szorítkozva — foglalkozni. *Kv. prs-on* — mint képletszerűen is látni fogjuk — *nemnegatív változókra értelmezett és l. korlátozó feltételeknek alávetett kv. célfüggvény extremálását értjük.* A kv. prs tárgyalása *kétszeresen indokolt;* egyrészt önmagában is számos érdekes gazdaságossági problémánál alkalmazható (mindjárt megemlítünk egy-két ilyet), másrészt pedig fontos lépést jelent a még bonyolultabb nl. prs-i feladatok megoldása felé.

Kv. prs-sal megoldható problémák pl.:*** *Hatékony termelés;* a nyereség maximálása l. termelési függvények és l.-an változó határköltségek esetén. *„Aktatáska"-probléma;* valószínűségi változók egy adott várható értékű és minimális szórásnégyzetű kombinációjának megállapítása. *Regresszió;* észlelési adatok illesztése egy függvényhez, a legkisebb négyzetek elve alapján, bizonyos parametrikus korlátozó feltételek mellett. *Konvex programozás;* általános konvex függvény minimálása kv. közelítéssel, l. korlátozó feltételek mellett. *Közlekedés programozás;* közlekedési hálózat átbocsátóképességét optimálisan kihasználó áramlatkombináció megállapítása, minimális ellenállási munka alapján.****

II°. A p r i m á l é s d u á l f e l a d a t m e g f o r m u l á z á s a. *1'.* Utalva a l. prs feladatának *b) β)* I°-beli formuláira, ***a kvadratikus programozás primál minimumfeladata***, *bővített alakjában, skaláris írásmódon* így fogalmazható meg:

---

* A továbbiakban így **rövidítjük:** kv. prs., a **-ot pedig így: nl. prs.

*** L. pl. *Wolfe* [18].

**** L. *Jándy* [40].

Megoldandó az

$$x_1 \geqq 0, \quad x_2 \geqq 0, \quad \ldots, \quad x_m \geqq 0 \tag{1a}$$

nemnegatív változókra értelmezett és

$$\left.\begin{array}{l} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1m}x_m = a_{10} \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2m}x_m = a_{20} \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \ldots + a_{nm}x_m = a_{n0} \end{array}\right\} \tag{1b}$$

1. feltételi egyenletekkel korlátozott

$$u = u(\lambda, x_j) = \lambda(a_{01}x_1 + \ldots + a_{0m}x_m) + \frac{1}{2}(c_{11}x_1^2 + \ldots + c_{jl}x_jx_l + \ldots + c_{mm}x_m^2)$$

$$(\lambda \geqq 0, \quad c_{jl} = c_{lj}) \tag{1c'}$$

kvadratikus (egy paraméteres) célfüggvényre vonatkozó

$$u = \text{Min!} \tag{1c''}$$

(kötött) szélsőérték-feladat.

Ugyanez *matrixos írásmódon* — az eddigi jelölések igénybevételével — eképpen formulázható meg:

$$\mathbf{x} \geqq \mathbf{0}, \quad \mathbf{A}\mathbf{x} = \mathbf{a}_0, \quad u = \lambda\mathbf{a}^0\mathbf{x} + \frac{1}{2}\mathbf{x}^*\mathbf{C}\mathbf{x} = \text{Min!} \tag{2a, b, c}$$

$$(\lambda \geqq 0, \quad \mathbf{C} = \mathbf{C}^*).$$

2'. Az imént megfogalmazott feladattal kapcsolatban *néhány megjegyzést*, sőt megszorítást kell tenni. Először is emlékeztetünk arra, hogy a 1. korlátozó feltételeket az eredeti $\mathbf{A'y} \leqq \mathbf{a}_0$ alakjukról — az $\mathbf{u}^* = [u_1, u_2, \ldots, u_n]$ duál vektorváltozó bevezetésével — mindig át lehet írni a (2*b*) szerinti

$$\mathbf{A'y} + \mathbf{Eu} = [\mathbf{A'}, \mathbf{E}]\begin{bmatrix}\mathbf{y}\\ \mathbf{u}\end{bmatrix} \equiv \mathbf{A}\mathbf{x} = \mathbf{a}_0 \tag{2d}$$

alakra. Említésre méltó, hogy a (2*c*)-beli λ alkalmasan megválasztható nem-negatív paraméter.

Külön ki kell emelni egy, a (2*c*) célfüggvénnyel kapcsolatos *lényeges megszorítást*, ti. azt, hogy *az $u(\lambda, \mathbf{x})$ célfüggvény — az $\mathbf{x}$ változóra nézve — ún. k o n v e x legyen („alulról" nézve)*, vagyis rendelkezzék az

$$u(\lambda, \mathbf{x} + \vartheta\Delta\mathbf{x}) \leqq u(\lambda, \mathbf{x}) + \vartheta[u(\lambda, \mathbf{x} + \Delta\mathbf{x}) - u(\lambda, \mathbf{x})] \quad (0 \leqq \vartheta \leqq 1), \tag{3a, b}$$

másként pedig az

$$u[\lambda, \vartheta\mathbf{x}' + (1 - \vartheta)\mathbf{x}] \leqq \vartheta \cdot u(\lambda, \mathbf{x}') + (1 - \vartheta) \cdot u(\lambda, \mathbf{x})$$

$$(0 \leqq \vartheta \leqq 1, \quad \mathbf{x}' = \mathbf{x} + \Delta\mathbf{x})$$

sajátsággal. [Megjegyzendő, hogy $u(\lambda, \mathbf{x})$ akkor konkáv, ha $-u(\lambda, \mathbf{x})$ konvex].

E konvexitási követelmény – a matematikai programozás jelenlegi állása mellett – minden nl. prs-i módszernél döntő fontosságú, mert ennek a teljesülése biztosítja, hogy *a célfüggvény egy lokális minimuma egyszersmind globális minimuma is*, s mint ilyen, az optimális program értékét szolgáltatja.

A szóban forgó kv. prs-nál a (2*c*) célfüggvény akkor konvex, ha kv. részének (m-ed rendű kv., szimmetrikus) **C** *együttható matrixa pozitív szemidefinit*, vagyis

$$\text{ha bármely } \mathbf{x}\text{-re} \qquad \mathbf{x}^*\mathbf{C}\mathbf{x} \geqq 0, \tag{4a}$$

más szóval, ha a $Q(x_j, x_l) \equiv \sum_{j=1}^{m} \sum_{l=1}^{m} c_{jl} x_j x_l$ kvadratikus alak nemnegatív értékű. Az ilyen **C** matrix $|\mathbf{C}|$ determinánsa – tudvalévőleg – zérus értékű.*

E feltétel *üzemgazdaságilag* úgy értelmezhető, hogy valamely **x** programról egy $\mathbf{x} + \Delta\mathbf{x}$ programra való $\mathbf{x} + \vartheta\Delta\mathbf{x}$ $(0 \leqq \vartheta \leqq 1)$ áttérés során az $u(\lambda, \mathbf{x} + \vartheta\Delta\mathbf{x})$ összköltség

$$\frac{d}{d\vartheta} u(\lambda, \mathbf{x} + \lambda\Delta\mathbf{x}) = \frac{d}{d\vartheta}[\lambda\mathbf{a}^0(\mathbf{x} + \vartheta\Delta\mathbf{x}) + \frac{1}{2}(\mathbf{x}^*\mathbf{C}\mathbf{x} + 2\mathbf{x}^*\mathbf{C}\Delta\mathbf{x}\vartheta + \Delta\mathbf{x}^*\mathbf{C}\Delta\mathbf{x}\vartheta^2)] =$$

$$= \frac{d}{d\vartheta}(a + b\vartheta + c\vartheta^2) = \lambda\mathbf{a}^0\Delta\mathbf{x} + \mathbf{x}^*\mathbf{C}\Delta\mathbf{x} + \Delta\mathbf{x}^*\mathbf{C}\Delta\mathbf{x}\vartheta = b + 2c \cdot \vartheta \quad (c \geqq 0) \tag{4b}$$

változási sebesség a ϑ-nak nem csökkenő függvénye.

A fentiek speciális eseteként ugyancsak megfelelő a

$$\text{bármely } \mathbf{x} \neq \mathbf{0}\text{-re} \quad \mathbf{x}^*\mathbf{C}\mathbf{x} > 0 \tag{5a}$$

sajátságú, ún. *pozitív definit* **C** matrix; a (2*c*) célfüggvény ilyenkor ún. *szigorúan konvex,*

$$u(\lambda, \mathbf{x} + \vartheta\Delta\mathbf{x}) < u(\lambda, \mathbf{x}) + \vartheta\,[u(\lambda, \mathbf{x} + \Delta\mathbf{x}) - u(\lambda, \mathbf{x})] \quad (0 < \vartheta < 1) \tag{5b}$$

magatartással. Az ilyen **C** matrix – tudvalévőleg – reguláris ($|\mathbf{C}| \neq 0$), s így invertálható. Említésre méltó továbbá, hogy a (2*c*) célfüggvény ilyen esetben mindig előállítható

$$u = \frac{1}{2}[(\mathbf{x}^* + \lambda\mathbf{a}^{0\prime})\mathbf{C}(\mathbf{x} + \lambda\mathbf{a}^{0\prime *})] - \frac{\lambda^2}{2}\mathbf{a}^{0\prime}\mathbf{C}\mathbf{a}^{0\prime *} \quad (\mathbf{a}^{0\prime} = \mathbf{a}^0\mathbf{C}^{-1}) \tag{5c}$$

---

* A kvadratikus alakok algebrája 3. *a)* α) V° helyen tekintettük át.

alakban,* amely az u minimálását nyilván megkönnyíti, lévén

$$\mathbf{x}_0^* = -\lambda \mathbf{a}^{0\prime}\text{-nél} \quad U = \operatorname{Min} u = -\frac{\lambda^2}{2}\mathbf{a}^0\mathbf{a}^{0\prime *}. \tag{5d}$$

A továbbiak a (4*a*), esetleg az (5*a*) feltételt *teljesülőnek* tekintjük.

3'. Említsük meg a (2*a, b, c*) primál minimumfeladat *duál maximumfeladatát, bővített alakjában, matrixos írásmódon :*

$$\mathbf{y}^* \geqq \mathbf{0}^*, \quad \mathbf{y}^*\mathbf{A} = \mathbf{a}^0, \quad v = \lambda \mathbf{a}_0^* \mathbf{y} - \frac{1}{2}\mathbf{y}^*\mathbf{C}^{-1}\mathbf{y} = \text{Max!} \tag{6}$$

$$(\lambda \leqq 0, \quad \mathbf{C} = \mathbf{C}^*, \quad |\mathbf{C}| \neq 0),$$

vagyis erről csak pozitív definit $\mathbf{C}$ matrix esetén beszélünk. A fentebbi megjegyzések értelemszerűen erre is vonatkoznak.

4'. A kv. prs-i problémák numerikus megoldási eljárásai közül napjainkban az elektronikus gépi számításra alkalmasak kerülnek előtérbe. Minthogy efféle gépesített eljárásokat a l. prs területén már hosszú évek óta alkalmaznak, érthető, hogy kísérletek történtek ezeknek a kv. prs területére való megfelelő kiterjesztésére. Elsőnek *Barankin* és *Dorfman* [15] mutatta meg 1958-ban *a kv. prs-i probléma l. megfogalmazhatóságát,* és tisztázta elméleti vonatkozásait. E kezdeményezésre támaszkodik *Wolfe módszere* [18], amely a l. prs szimplex módszerének számítási sémáját alkalmazza a kv. prs-nál, oly módon, hogy a l. prs gépi programjáról csupán néhány utasítás módosításával lehet a kv. prs-éra áttérni. Módszerét egy speciális ($\lambda = 0$, vagy $\mathbf{x}^*\mathbf{C}\mathbf{x} > 0$ feltételekre érvényes) *„rövid"* és egy általános ($\mathbf{x}^*\mathbf{C}\mathbf{x} \geqq 0$ feltételre szabott) *„hosszú" változatban* közölte.

Az alábbiakban főleg a nevezettek elméleti eredményeire, ill. számítási módszereire fogunk támaszkodni.

β) A feladat egyes elméleti vonatkozásai

I°. Néhány segédtétel. *1'*. Tekintsük a (2*a, b, c*) kv. minimumfeladat megoldását a célfüggvényre nézve, vagyis az

$$U(\lambda) = \operatorname{Min} u(\lambda, \mathbf{x}) = \operatorname{Min}\left(\lambda \mathbf{a}^0\mathbf{x} + \frac{1}{2}\mathbf{x}^*\mathbf{C}\mathbf{x}\right) \tag{7a}$$

$$(\mathbf{x} \geqq \mathbf{0}, \quad \mathbf{A}\mathbf{x} = \mathbf{a}_0, \quad \lambda \geqq 0),$$

rövidebb írásmódon pedig az

$$U(\lambda) = \operatorname{Min}\left\{\lambda \mathbf{a}^0\mathbf{x} + \frac{1}{2}\mathbf{x}^*\mathbf{C}\mathbf{x}: \quad \mathbf{x} \geqq \mathbf{0}, \quad \mathbf{A}\mathbf{x} = \mathbf{a}_0, \quad \lambda \geqq 0\right\} \tag{7b}$$

* Ellenőrizzük a kijelölt műveletek elvégzésével!

minimumfüggvényt! Mint tudjuk, az itteni $\mathbf{C}$ matrix (m-ed rendű) kvadratikus, szimmetrikus és pozitív szemidefinit, azaz

$$\mathbf{C} = \mathbf{C}_m, \qquad \mathbf{C} = \mathbf{C}^*, \qquad \mathbf{x}^*\mathbf{C}\mathbf{x} \geqq 0. \tag{7c}$$

Mint mindjárt látni fogjuk, a feladat feltételei alapján az $U(\lambda)$ függvény ***több sajátságát*** tudjuk majd megállapítani anélkül, hogy a függvényt magát meghatároznók. Természetesen feltételezzük, hogy a *lehetséges megoldások* (programok) $L = \{\mathbf{x}:\ \mathbf{x} \geqq \mathbf{0},\ \mathbf{A}\mathbf{x} = \mathbf{a}_0\}$ halmaza nem üres, és hasonlóan az *optimális megoldások* (programok) $L_{\text{opt}} = \{\mathbf{x}:\ \mathbf{x} \geqq \mathbf{0},\ \mathbf{A}\mathbf{x} = \mathbf{a}_0,\ \ u(\lambda, \mathbf{x}) = U(\lambda)]\} \subset L$ halmaza sem, vagyis létezik lehetséges, sőt optimális megoldás is. Előfordulhat egyébként, hogy $u(\lambda, \mathbf{x})$ nem korlátos, azaz $U(\lambda) \to -\infty$.

2'. A $\mathbf{C}$ matrix *pozitív szemidefinit* jellegéből következik az alábbi

1. segédtétel: *Minden* $\mathbf{x}^*\mathbf{C}\mathbf{x} = 0$ *sajátságú* $\mathbf{x}$*-re* $\mathbf{C}\mathbf{x} = \mathbf{0}$. (8)

Ui. tetszőleges t szám és bármely $\mathbf{y} \in E_m$ vektor mellett

$$(\mathbf{y} + t\mathbf{x})^* \mathbf{C}(\mathbf{y} + t\mathbf{x}) = \mathbf{y}^*\mathbf{C}\mathbf{y} + 2t\mathbf{y}^*\mathbf{C}\mathbf{x} + t^2 \cdot 0 \geqq 0$$

csak akkor lehet, ha az $\mathbf{y}$-tól függetlenül $\mathbf{y}^*\mathbf{C}\mathbf{x} = 0$, vagyis ha $\mathbf{C}\mathbf{x} = \mathbf{0}$, q. e. d.
Ebből következik továbbá a

2. segédtétel: *Bármely* $0 \leqq \lambda$*-nál egy* $\mathbf{x}, \mathbf{x}'$ *optimális pontpár* $(\mathbf{x}, \mathbf{x}')$ *összekötő (hiper-) szakaszának* $\mathbf{x}_\vartheta$ *pontjai is optimálisak, és ezekben bármely* $0 < \vartheta$*-nál az* $\mathbf{a}^0\mathbf{x}_\vartheta$ *értéke állandó.*

Ui. legyen $\mathbf{x}$ és $\mathbf{x}' = \mathbf{x} + \Delta\mathbf{x}$ optimális program, azaz $\mathbf{x}, \mathbf{x}' \in L_{\text{opt}}$. Akkor az $(\mathbf{x}, \mathbf{x}') \equiv \mathbf{x} + \vartheta\Delta\mathbf{x} = \{\mathbf{x}_\vartheta\}$ $(0 \leqq \vartheta \leqq 1)$ hiperegyenesszakasz $\mathbf{x}_\vartheta$ pontjai is optimális pontok, mert*

$$\mathbf{A}\mathbf{x}_\vartheta = \mathbf{A}\mathbf{x} + \vartheta(\mathbf{A}\mathbf{x}' - \mathbf{A}\mathbf{x}) = \mathbf{a}_0 + \vartheta(\mathbf{a}_0 - \mathbf{a}_0) = \mathbf{a}^0$$

$$\mathbf{x}_\vartheta = \vartheta\mathbf{x}' + (1 - \vartheta)\mathbf{x} \geqq \mathbf{0}, \qquad (\text{tehát} \quad \mathbf{x}_\vartheta \in L),$$

továbbá mert $u(\lambda, \mathbf{x})$ $\mathbf{x}$-beli konvexitása miatt

$$u(\lambda, \mathbf{x}_\vartheta) = \lambda\mathbf{a}^0(\mathbf{x} + \vartheta\Delta\mathbf{x}) + \frac{1}{2}(\mathbf{x} + \vartheta\Delta\mathbf{x})^* \mathbf{C}(\mathbf{x} + \vartheta\,\Delta\mathbf{x}) =$$

$$= \left(\lambda\mathbf{a}^0\mathbf{x} + \frac{1}{2}\mathbf{x}^*\mathbf{C}\mathbf{x}\right) + \vartheta(\mathbf{a}^0\Delta\mathbf{x} + \mathbf{x}^*\mathbf{C}\,\Delta\mathbf{x}) + \frac{\vartheta^2}{2}(\Delta\mathbf{x}^*\mathbf{C}\,\Delta\mathbf{x}) =$$

$$= \left(\lambda\mathbf{a}^0\mathbf{x} + \frac{1}{2}\mathbf{x}^*\mathbf{C}\mathbf{x}\right) = u(\lambda, \mathbf{x}) = U(\lambda) \qquad (\text{tehát} \quad \mathbf{x}_\vartheta \in L_{\text{opt}}), \tag{9a}$$

* Látható, hogy $\{\mathbf{x} + t\Delta\mathbf{x}\} \cap L = \{\mathbf{x} + \vartheta\mathbf{x}\} = (\mathbf{x}, \mathbf{x}')$, mert pl. $t = 1 + \tau^2$ esetén $\tau_t = (1 + \tau^2)\,\mathbf{x}' - \tau^2\mathbf{x} < \mathbf{0}$ s így $\mathbf{x}_t \notin L$ is lehetséges.

lévén az $u(\lambda, \mathbf{x}_\vartheta) < u(\vartheta, \mathbf{x}) = U(\lambda) = \text{Min}$ eset lehetetlen. Ily módon $\mathbf{x}^*\mathbf{C}\mathbf{x} = 0$, tehát az 1. segédtétel szerint

$$\mathbf{C}\Delta\mathbf{x} = \mathbf{0} \quad \text{s így} \quad \lambda > 0\text{-nál} \quad \mathbf{a}^0\Delta\mathbf{x} = 0, \tag{9b, c}$$

vagy ami ugyanaz,

$$\mathbf{C}\mathbf{x}' = \mathbf{C}\mathbf{x} = \mathbf{c}_1 \quad \text{és} \quad \lambda > 0\text{-nál} \quad \mathbf{a}^0\mathbf{x}' = \mathbf{a}^0\mathbf{x} = c_2.$$

Fordítva, ha

$$u(\lambda, \mathbf{x}) = U(\lambda), \quad \mathbf{C}\Delta\mathbf{x} = \mathbf{0}, \quad \mathbf{a}^0\Delta\mathbf{x} = 0, \quad \mathbf{x}_\vartheta \in L,$$

akkor adott λ-ra

$$u(\lambda, \mathbf{x}_\vartheta) = U(\lambda), \quad \text{azaz} \quad \mathbf{x}_\vartheta \in L_{\text{opt}} \quad \text{és} \quad (\mathbf{x}, \mathbf{x}') \subset L_{\text{opt}},$$

végül $\mathbf{a}_0\mathbf{x}' = \mathbf{a}^0\mathbf{x} = c_2$, sőt

$$\mathbf{a}^0\mathbf{x}_\vartheta = \vartheta \cdot \mathbf{a}^0\mathbf{x}' + (1 - \vartheta) \cdot \mathbf{a}^0\mathbf{x} = (\vartheta + 1 - \vartheta) \cdot c_2 = c_2. \quad \text{Q. e. d.} \tag{9d}$$

II°. Néhány tétel és alkalmazása. *1'.* A továbbiakban — a fentebbi segédtételekre támaszkodva — két tételt kívánunk ismertetni utalva még a 3. a) α) V° helyre is.

1. tétel: *Az $U(\lambda)$ célfüggvényminimum a $\lambda \geqq 0$ szakaszon konvex függvény, a* (λ-któl függő $\mathbf{x}_\lambda$ optimális megoldásokkal képzett) $\mathbf{a}^0\mathbf{x}_\lambda$ *függvény pedig ugyanott nem növekvő, végül az*

$$\mathbf{y} \geqq \mathbf{0}, \quad \mathbf{A}\mathbf{y} = \mathbf{a}_0, \quad \mathbf{y}^*\mathbf{C}\mathbf{y} = \text{Min!} \tag{10a}$$

feladat egy $\mathbf{y}$ *megoldása* $\mathbf{a}^0\mathbf{y} \geqq \mathbf{a}^0\mathbf{x}_\lambda$ *sajátságú.*

Ui. — ami az első állítást illeti — az $U(\lambda)$ függvény alsó határa (lim. inf.-ja) a λ-ban l. $u(\lambda, \mathbf{x}) = \lambda \cdot \mathbf{a}^0\mathbf{x} + \frac{1}{2}\mathbf{x}^*\mathbf{C}\mathbf{x}$ ($\mathbf{x} \in L$) konvex függvényseregnek, s mint ilyen, maga is konvex.

Az $\mathbf{a}^0\mathbf{x}$-szel kapcsolatos állítást illetően vegyük fel a $0 \leqq \lambda$ paraméter két tetszőleges értékét, mondjuk a λ és $\lambda' = \lambda + \Delta\lambda$ értékpárt, majd válasszunk ki egy-egy hozzátartozó $\mathbf{x}_\lambda$, ill. $\mathbf{x}_{\lambda'}$ optimális megoldást; akkor a nyilvánvalóan fennálló

$$\lambda\mathbf{a}^0\mathbf{x}_\lambda + \frac{1}{2}\mathbf{x}_\lambda^*\mathbf{C}\mathbf{x}_\lambda \leqq \lambda\mathbf{a}^0\mathbf{x}_{\lambda'} + \frac{1}{2}\mathbf{x}_{\lambda'}^*\mathbf{C}\mathbf{x}_{\lambda'}$$

$$\lambda'\mathbf{a}^0\mathbf{x}_{\lambda'} + \frac{1}{2}\mathbf{x}_{\lambda'}^*\mathbf{C}\mathbf{x}_{\lambda'} \leqq \lambda\mathbf{a}^0\mathbf{x}_\lambda + \frac{1}{2}\mathbf{x}_\lambda^*\mathbf{C}\mathbf{x}_\lambda$$

egyenlőtlenségeket összeadva és rendezve, azt kapjuk, hogy

$$(\lambda' - \lambda)\mathbf{a}^0\mathbf{x}_{\lambda'} \leqq (\lambda' - \lambda)\mathbf{a}^0\mathbf{x}_{\lambda}, \tag{10b}$$

s ebből $\Delta\lambda = \lambda' - \lambda > 0$ esetén valóban $\mathbf{a}^0\mathbf{x}_{\lambda'} \leqq \mathbf{a}^0\mathbf{x}_{\lambda}$ következik. Végül minthogy $u(\lambda, \mathbf{x}_\lambda) = U(\lambda) = \text{Min}$, minden $\mathbf{y}^*\mathbf{C}\mathbf{y} \leqq \mathbf{x}^*\mathbf{C}\mathbf{x}$ $(\mathbf{y} \in L)$ sajátságú $\mathbf{y}$-ra igaz az, hogy

$$0 \leqq \lambda(\mathbf{a}^0\mathbf{y} - \mathbf{a}^0\mathbf{x}_\lambda) + \frac{1}{2}(\mathbf{y}^*\mathbf{C}\mathbf{y} - \mathbf{x}^*\mathbf{C}\mathbf{x}) \leqq (\mathbf{a}^0\mathbf{y} - \mathbf{a}^0\mathbf{x}_\lambda), \tag{10c}$$

következésképpen $\lambda > 0$ esetén valóban $\mathbf{a}^0\mathbf{y} \geqq \mathbf{a}\mathbf{x}_\lambda$, q. e. d.

2'. A következő tétel az $\mathbf{x}_\lambda$ optimális megoldásoknak olyan jellemzését adja meg, amely kiszámításukat is lehetővé teszi. Megjegyzendő, hogy az $u(\lambda, \mathbf{x})$ minimálási feltételének csupán az elégségességet kell igazolnunk, mert szükségessége magától adódik a később ismertetendő számítási eljárás során.

*2. **tétel:*** *Ha valamely* $\mathbf{x}$ *lehetséges megoldáshoz található olyan* $\mathbf{0} \leqq \mathbf{v} \in E_m$, $\mathbf{u} \in E_n$ *vektorpár, amely kielégíti az* [$\mathbf{x} \geqq \mathbf{0}$, $\mathbf{A}\mathbf{x} = \mathbf{a}_0$-lal értendő]

$$\mathbf{v}^*\mathbf{x} = 0 \quad \text{és} \quad (\textbf{grad}\, u \equiv)\ \mathbf{C}\mathbf{x} + \lambda\mathbf{a}^{0*} = \mathbf{v} - \mathbf{A}^*\mathbf{u} \tag{11a, b}$$

feltételeket, akkor az $\mathbf{x}$ *egyszersmind optimális megoldás is* [azaz $u(\lambda, \mathbf{x}) = U(\lambda)$, $\mathbf{x} \geqq \mathbf{0}$, $\mathbf{A}\mathbf{x} = \mathbf{x}_0$].

Ui. ha $\mathbf{y}$ egy másik lehetséges megoldás [azaz $\mathbf{y} \geqq \mathbf{0}$, $\mathbf{A}\mathbf{y} = \mathbf{a}_0$], akkor $\mathbf{C}$ pozitív szemidefinit sajátsága folytán

$$(\mathbf{y} - \mathbf{x})^*\mathbf{C}(\mathbf{y} - \mathbf{x}) \geqq 0, \quad \text{azaz} \quad \mathbf{y}^*\mathbf{C}\mathbf{y} + \mathbf{x}^*\mathbf{C}\mathbf{x} \geqq 2\mathbf{x}^*\mathbf{C}\mathbf{y},$$

vagy $2\mathbf{x}^*\mathbf{C}\mathbf{y}$ kivonásával

$$\mathbf{y}^*\mathbf{C}\mathbf{y} - \mathbf{x}^*\mathbf{C}\mathbf{x} \geqq 2\mathbf{x}^*\mathbf{C}(\mathbf{y} - \mathbf{x}).$$

Ezt felhasználva,

$$u(\lambda, \mathbf{y}) - u(\lambda, \mathbf{x}) = \lambda\mathbf{a}^0(\mathbf{y} - \mathbf{x}) + \frac{1}{2}(\mathbf{y}^*\mathbf{C}\mathbf{y} - \mathbf{x}^*\mathbf{C}\mathbf{x}) \geqq (\lambda\mathbf{a}^0 + \mathbf{x}^*\mathbf{C})(\mathbf{y} - \mathbf{x}),$$

sőt a (11*a*, *b*) feltételek és $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in L$ figyelembevételével (11*c*)

$$u(\lambda, \mathbf{y}) - u(\lambda, \mathbf{x}) \geqq (\mathbf{v}^* - \mathbf{u}^*\mathbf{A})(\mathbf{y} - \mathbf{x}) = \mathbf{v}^*\mathbf{y} - 0 - \mathbf{u}^*(\mathbf{a}_0 - \mathbf{a}_0) = \mathbf{v}^*\mathbf{y} \geqq 0;$$

tehát valóban $u(\lambda, \mathbf{y}) \geqq u(\lambda, \mathbf{x})$, s így $u(\lambda, \mathbf{x}) = U(\lambda)$, q. e. d.

A 2. tétel (11*a*, *b*) feltételei *Barankin* és *Dorfman* [15] nevéhez fűződnek. Említésre méltó, hogy e feltételek az *a*) *β*) III° *Kuhn—Tucker-féle nyeregponttétel*

feltételeinek speciális eseteként is tekinthetők s belőlük úgy nyerhetők, hogy a bennük szereplő differenciálható konvex függvény helyett az itteni $u = \lambda \mathbf{a}^0\mathbf{x} + \frac{1}{2}\mathbf{x}^*\mathbf{C}\mathbf{x}$ célfüggvényt, gradiense helyett pedig a $\mathbf{grad}\, u \equiv \lambda\mathbf{a}^{0*} + \mathbf{C}\mathbf{x}$ vektort írjuk. Éppen ez utóbbi **grad** u-nak $\mathbf{x}$-beli linearitása miatt egyszerűsödik a $\mathbf{v}^*\mathbf{x} = 0$ l. alakra a megfelelő s eredetileg n. l. *Kuhn—Tucker*-féle feltétel. Egyébként a $\mathbf{v}^*\mathbf{x} = 0$ egyenletből következik, hogy

$$\mathbf{v} > \mathbf{0} \quad \text{esetén} \quad \mathbf{x} = \mathbf{0}. \tag{11d}$$

3'. Utalva a fentebbi elméleti megállapításokra, valamint a l. prs szimplex-módszerének ismert fogalmaira, sajátságaira, tegyünk még *néhány megjegyzést* a számítások előkészítése céljából!

A 2. tétel alapján megállapíthatjuk, hogy egy $\mathbf{x} \in E_m$ vektor azon *feltétellel* szolgáltatja a (2) kv. prs-i feladat egy megoldását, ha maga és egy hozzá rendelt $\mathbf{v}, \mathbf{u}$ vektorpár kielégíti az

$$\left.\begin{aligned} &\mathbf{A}\mathbf{x} &&= \mathbf{a}_0 \\ &\mathbf{C}\mathbf{x} - \mathbf{v} + \mathbf{A}^*\mathbf{u} + \mathbf{a}^{0*}\lambda &&= \mathbf{0} \end{aligned}\right\} \tag{12a, b}$$

$$(\mathbf{x} \geqq \mathbf{0}, \quad \mathbf{v} \geqq \mathbf{0}, \quad \lambda \geqq 0) \tag{12c}$$

matrixegyenletrendszert, ill. a neki megfelelő

$$\mathfrak{A}\mathfrak{x} \equiv \begin{matrix} \underset{\smile}{n} \\ \underset{\smile}{m} \end{matrix}\begin{bmatrix} \mathbf{A} & \mathbf{O} & \mathbf{O} & \mathbf{0} \\ \mathbf{C} & -\mathbf{E} & \mathbf{A}^* & \mathbf{a}^{0*} \end{bmatrix}_{\substack{\underset{\smile}{m} \quad \underset{\smile}{m} \quad \underset{\smile}{n} \quad \underset{\smile}{1}}} \begin{bmatrix} \mathbf{x} \\ \mathbf{v} \\ \mathbf{u} \\ \lambda \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{a}_0 \\ \mathbf{0} \end{bmatrix} \equiv \mathfrak{a}_0 \tag{13a}$$

$$(\mathbf{x} \geqq \mathbf{0}, \quad \mathbf{v} \geqq \mathbf{0}, \quad \lambda \geqq 0) \tag{13b}$$

hipermatrixegyenletet (a $\mathbf{v}^*\mathbf{x} = 0$ feltételt pillanatnyilag mellőztük). Ez láthatóan $n + m$ l. skalár egyenletet foglal össze, $2m + n$ változóval (mégpedig $2m$ nemnegatív és n korlátozás nélküli változóval); a λ-t nem tekintjük változónak.

A számítások során a (12) matrixegyenletrendszer $\mathfrak{x}_B$ *bázismegoldásait,* vagyis az

$$\mathfrak{A}\mathfrak{x}_B = [\mathfrak{B}, \mathfrak{A}_{nb}] \begin{bmatrix} \mathfrak{x}_b \\ \mathbf{0} \end{bmatrix} \equiv \mathfrak{B}\mathfrak{x}_b + \mathfrak{A}_{nb}\mathbf{0} \equiv \mathfrak{B}\mathfrak{x}_b = \mathfrak{a}_0$$

$$\text{sajátságú} \quad \mathfrak{x}_B^* \equiv [\mathfrak{x}_b^*, \mathbf{0}^*] \geqq \mathfrak{O}^* \quad \text{vektorokat} \tag{13c}$$

keressük, mégpedig — célszerűen — a korlátozás nélküli $\mathbf{u}$ változóhoz tartozó n oszlopvektort valamennyi bázisban szerepeltetve. Így egyrészt mellőzhető a

(12) normálalakra hozatala az **u** kiküszöbölése útján, másrészt bármely bázismegoldásban csak m pozitív változó lép fel (**x**-ben és **v**-ben).

Ha a (72a-c) kv. prs-i feladatnak egyáltalán van megoldása, akkor található olyan **x**, **v**, **u** vektorhármas, amely a (11a, b) feltételeknek tesz eleget. A (11a) következtében azonban az összesen 2 m számú x_j és v_j vektorkoordináta közül legalább n zérus értékű. Éppen e tényből következik *Barankin* és *Dorfman* [15] ama fontos megállapítása, hogy *a* (12) *matrixegyenletrendszer valamely bázismegoldása egyszersmind a* (2) *kv. prs-i feladatnak is megoldása.*

Mint ismeretes, a szimplex módszer számítási eljárása alkalmas bázismegoldások tényleges meghatározására. *Barankin* és *Dorfman* e módszert a kv. prsnál úgy javasolta alkalmazni, hogy a (12)-nek egy tetszőleges bázismegoldásából kiindulva, a **v*x** *értéke* — a (11a)-nak megfelelően — *mielőbb zérussá váljék. Frank* és *Wolfe* [17] algoritmusa ezt megvalósítja ugyan, de elég bonyodalmasan. Előnyösebb *Markowitz* [16] *algoritmusa,* amely ugyan a (12)-nél gyengébb megszorításokkal indul, de később kihasználja a (11a) feltételt, és a változókat addig módosíthatja, amíg a (12)-t nem nyeri. *Wolfe célszerűsítette* e módszert [18], mégpedig a I. prs számítási sémájához való igazításával. A következőkben éppen e *Markowitz—Wolfe*-féle algoritmust kívánjuk tárgyalni.

γ) A feladat megoldása kvadratikus szimplex-matrixalgoritmussal (SqMA)

I°. A „rövid" algoritmus. *1'.* Mint már említettük, a (2) kv. prs-i feladat (12) alakja megoldásának „rövid" algoritmusa, mint rekurzív eljárás

$$\text{vagy} \quad \lambda = 0, \quad \text{vagy} \quad \mathbf{x}^*\mathbf{C}\mathbf{x} > 0 \quad (\mathbf{x} \neq \mathbf{0}) \tag{14a, b}$$

feltétel mellett vezet eredményre, bizonyul konvergensnek; ekkor a megoldást egy rögzített λ értékre tudjuk megállapítani.

Bevezetve az új $\mathbf{0} \leqq \mathbf{y}$, $\mathbf{z} \in E_n$ és $\mathbf{0} \leqq \mathbf{w} \in E_n$ vektorokat, felírjuk velük az

$$\begin{aligned} &\mathbf{A}\mathbf{x} && + \mathbf{w} = \mathbf{a}_0 \\ &\mathbf{C}\mathbf{x} - \mathbf{v} + \mathbf{A}^*\mathbf{u} + \mathbf{y} - \mathbf{z} && = -\mathbf{a}^{0*}\lambda \end{aligned} \tag{15a, b}$$

$$(\mathbf{x}, \mathbf{v}, \mathbf{y}, \mathbf{z}, \mathbf{w} \geqq 0) \tag{15c}$$

induló *matrixegyenletrendszert,* amely a (12a-c) gyengített változata.

2'. Indulás. Mivel a normálfeladatban $\mathbf{a}_0 \geqq \mathbf{0}$, így az **y**, **z** és **w** együtthatóiból képezzük az induló bázist. Majd a szimplex módszert alkalmazzuk oly módon, hogy

$$\sum_{i=1}^{n} w_i \to 0 \quad \text{és} \quad \text{közben} \quad \mathbf{u} = \mathbf{v} = \mathbf{0} \tag{16}$$

legyen. Aztán elhagyjuk az így **0**-sá tett **w**-t, valamint **y** és **z** fel nem használt koordinátáit, és összefoglaljuk a $\mathbf{0} \leqq \boldsymbol{\zeta}$ vektorba megmaradt m koordinátájukat, az $\mathbf{F} \equiv \mathbf{F}_m$ kvadratikus matrixba pedig együtthatóikat. Ezzel a (15)-ből az

$$\left.\begin{aligned} \mathbf{A}\mathbf{x} \qquad\qquad\qquad &= \mathbf{a}_0 \\ \mathbf{C}\mathbf{x} - \mathbf{v} + \mathbf{A}^*\mathbf{u} + \mathbf{F}\boldsymbol{\zeta} &= -\mathbf{a}^{0*}\lambda \end{aligned}\right\} \tag{17a, b}$$

$$(\mathbf{x}, \mathbf{v}, \boldsymbol{\zeta} \geqq \mathbf{0}) \tag{17c}$$

matrixegyenlet-rendszerre jutunk.

Rekurzió. Ha már ismeretes egy bázis és egy olyan bázismegoldás, amely kielégíti a (17)-et, valamint a

$$\mathbf{v}^*\mathbf{x} = 0 \quad \text{és} \quad \sum_{j=1}^{m} \zeta_j > 0 \tag{18a, b}$$

feltételeket, akkor hajtsunk végre egy báziscserét azon rendeltetéssel, hogy

$$Z \equiv \sum_{j=1}^{m} \zeta_j = \text{Min! legyen, miközben} \left\{\begin{matrix} \text{ha } x_j \text{ bázisváltozó, } v_j \text{ nem lehet az} \\ \text{ha } v_j \text{ bázisváltozó, } x_j \text{ nem lehet az} \end{matrix}\right\}; \tag{19a, b}$$

ez utóbbi a minimáló szimplex eljárás mellékfeltétele.

Befejezés. Ha $Z > 0$ adódik, akkor az előbbi rekurzív lépést megismételjük, sőt mindaddig ismételgetjük, amíg $Z = 0$ nem lesz [ami legfeljebb $\binom{3m}{m}$ lépéssel elérhető]; ez egyszersmind a $\boldsymbol{\zeta} = \mathbf{0}$-t is jelenti. A befejező bázismegoldás **x** része már kv. prs-i problémánk egy megoldását szolgáltatja, adott λ mellett.

3'. Jegyezzük meg, hogy a vázolt algoritmus során célszerűen *a módosított szimplex eljárást,* ill. lépéseit alkalmazzuk, mert itt a változók száma rendszerint jóval nagyobb az egyenleteknél és gyakran degenerációval is számolni kell. Ennek megfelelően, a *c) γ)* IV°-ban tanultak értelemszerű alkalmazásával intézzük a módosított szimplex lépéseket, mégpedig előnyösen a

$$\mathfrak{A}_q = \mathfrak{A}_{q-1} - \frac{1}{a^{(q)}_{k_q l_q}} (\mathfrak{a}^{(q)}_{l_q} - \mathfrak{e}_k)\mathfrak{a}^{k_q}_{(q)} \tag{20}$$

$$(k_q, l_q, a^{(q)}_{k_q l_q} = 1/\gamma^{(q)} \neq 0, \quad \mathfrak{A}_0 \equiv \mathfrak{A})$$

kvadratikus szimplex matrixalgoritmusunk (SqMA) útján. Használata a numerikus számolásnál még akkor is ajánlatos, ha egyébként megtartjuk a táblázatos formát.

Említésre méltó végül, hogy *E. M. L. Beale* [20] megadta a fenti rövid algoritmusnak egy olyan, ún. *virtuális perturbációs változatát,* amely pozitív szemi-

definit $\mathbf{C}$ matrix (azaz $\mathbf{x}^*\mathbf{C}\mathbf{x} \geqq 0$) esetén is alkalmazható. Lényege — a *Charnes*-féle perturbációs módszerre emlékeztetően — a $\mathbf{C}$ matrix (ill. az $\mathbf{x}^*\mathbf{C}\mathbf{x} \geqq 0$ kvadratikus alak)

$$\mathbf{C}' = [c_{ij} + \delta_{ij}\varepsilon^i], \quad 0 \leqq \varepsilon \ll 1 \quad (\mathbf{x}^*\mathbf{C}'\mathbf{x} > 0) \tag{21}$$

módon való átmeneti kiegészítése és pozitív definitként való használata.

1. Pl. Oldjuk meg a fenti „rövid" algoritmussal az alábbi kv. prs-i feladatot:*

$$x_1 \geqq 0, \quad x_2 \geqq 0, \quad x_3 \geqq 0;$$

$$x_1 - x_2 + x_3 = 1,$$

$$u_0 = \lambda(x_1 - 2x_3) + \frac{1}{2}(x_1^2 + x_2^2 + x_3^2) = \text{Min!}$$

— Először is írjuk át a feladatot az adott skaláris alakról a (2*a*-*c*) szerinti *matrixos alakra:*

$$\mathbf{x} = [x_1, x_2, x_3]^* \geqq \mathbf{0}, \quad \mathbf{A}\mathbf{x} = [1, \ -1, \ 1]\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = [1] = \mathbf{a}_0, \quad (\mathbf{A} \equiv \mathbf{a}^*) \quad (\mathbf{a}_0 \equiv a_0)$$

$$u_0 = \lambda\mathbf{a}^0\mathbf{x} + \frac{1}{2}\mathbf{x}^*\mathbf{C}\mathbf{x} = \lambda[1, \ 0, \ -2]\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} + \frac{1}{2}[x_1, \ x_2, \ x_3]\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}. \quad (\lambda \geqq 0) \quad (\mathbf{C} \equiv \mathbf{E})$$

A $\mathbf{C} \equiv \mathbf{E}$ együtthatómatrix esetünkben nyilván pozitív definit, mert — az (5*a*)-nak megfelelően — bármely $\mathbf{x} \neq \mathbf{0}$ vektorra

$$Q \equiv \mathbf{x}^*\mathbf{C}\mathbf{x} = x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 \equiv \mathbf{x}^2 = |\mathbf{x}|^2 \neq 0.$$

Célfüggvényünk tehát előállítható az (5*c*) szerinti (de a $\mathbf{C}^{-1} \equiv \mathbf{E}$, $\mathbf{a}^{0\prime} = \mathbf{a}^0$ miatt egyszerűbb)

$$u_0 = \frac{1}{2}[(\mathbf{x}^* + \lambda\mathbf{a}^0)(\mathbf{x} + \lambda\mathbf{a}^{0*})] - \frac{\lambda^2}{2}\mathbf{a}^0\mathbf{a}^{0*} =$$

$$= \frac{1}{2}[(x_1 + \lambda)^2 + x_2^2 + (x_3 - 2\lambda)^2] - \frac{5}{2}\lambda^2$$

alakban s ebből — az (5*d*) szerint —

$$\mathbf{x}_0^* = -\lambda\mathbf{a}^0 = [-\lambda, \ 0, \ 2\lambda]\text{-nál } U = \text{Min } u_0 = -\frac{5}{2}\lambda^2.$$

---

* L. *Wolfe* [18].

Feladatunk megoldása valamely λ-nál nyilván a lehetséges megoldások L halmazának az $\mathbf{x}_0$-hoz legközelebb eső $\mathbf{x} \equiv \mathbf{x}_{opt}$ pontja lesz, amelyre nézve tehát

$$|\mathbf{x} - \mathbf{x}_0|^2 = (\mathbf{x} - \mathbf{x}_0)^*(\mathbf{x} - \mathbf{x}_0) = \text{Min!}$$

Minthogy $\mathbf{C} \equiv \mathbf{E}$ esetünkben pozitív definit, ezért — a (14*a*, *b*)-nél mondottak értelmében — a „rövid" algoritmussal egy tetszőleges, rögzített λ-ra oldhatjuk meg a feladatot. Az egyszerűség kedvéért legyen $\lambda = 1$. Írjuk fel most a (15*a*, *b*) induló matrixegyenletrendszert, mégpedig — az $\mathbf{A} \equiv \mathbf{a}^*$, $\mathbf{A}^* \equiv \mathbf{a}$, $\mathbf{C} \equiv \mathbf{E}$, $\mathbf{w} \equiv w$, $\mathbf{u} \equiv u$, $\mathbf{a}_0 \equiv a_0$ körülmény figyelembevételével — az

$$\begin{bmatrix} \mathbf{a}^* & \mathbf{0}^* & 0 & \mathbf{0}^* & \mathbf{0}^* & 1 \\ \mathbf{E} & -\mathbf{E} & \mathbf{a} & \mathbf{E} & -\mathbf{E} & \mathbf{0} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{x} \\ \mathbf{v} \\ u \\ \mathbf{z} \\ \mathbf{y} \\ w \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_0 \\ -\mathbf{a}^{0*} \end{bmatrix}$$

hipermatrixegyenletnek megfelelő

1	x_1	x_2	x_3	v_1	v_2	v_3	u	z_1	z_2	z_3	y_1	y_2	y_3	w
1	1	−1	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1
−1	1	0	0	−1	0	0	1	1	0	0	−1	0	0	0
0	0	1	0	0	−1	0	−1	0	1	0	0	−1	0	0
2	0	0	1	0	0	−1	1	0	0	1	0	0	−1	0

induló szimplex táblázat alakjában.

A tetemes elfajulásra való tekintettel a módosított szimplex módszert alkalmazzuk. A 2. lépés során megvalósul a $\sum w_i = 0$ követelmény, s ekkor elhagyjuk a fel nem használt z_1, z_3, y_2, y_3 változókat (sőt később a z_2-t és az y_1-et is). A továbbiak során egyre csökkentjük a $0 < \sum \zeta_j$ értékét, az 5. lépésben zérusig, s egyben figyelemmel kísérjük a célfüggvény u_0 értékének alakulását. Az u változót az első lépéstől kezdve minden bázisban szerepeltetjük (noha, mint kötetlen változót, ki is küszöbölhettük volna). A teljes (esetünkben 5 lépéses) rövid algoritmust az alábbi *módosított szimplextáblázat-sorozatban* tüntettük fel.

A táblázatból kiolvasható az $\mathbf{x}$ *lehetséges program* és az u_0 *programérték* alakulása, nevezetesen:

$$\mathbf{x}'' = [1, 0, 0]^*, \quad \mathbf{x}''' = [0, 0, 1]^*, \quad \mathbf{x}^{(4)} = \mathbf{x}^{(5)} = \mathbf{x}_{opt} = \left[0, \frac{1}{2}, \frac{3}{2}\right]^*;$$

$$u_0'' = \frac{3}{2} > u_0''' = -\frac{3}{2} > u_0^{(4)} = u_0^{(5)} = u_{0\,opt} = -\frac{7}{4}.$$

Bázis-		1	x			v			u	z			y			w	$\sum w_i$	$\sum \zeta_j$	u_0
sor-sz.	vál-tozók		x_1	x_2	x_3	v_1	v_2	v_3	u	z_1	z_2	z_3	y_1	y_2	y_3	w			
0.	w	1	1	−1	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	1	—	—
	$-y_1$	−1	1	0	0	−1	0	0	1	1	0	0	−1	0	0	0			
	z_2	0	0	1	0	0	−1	0	−1	0	1	0	0	−1	0	0			
	z_3	2	0	0	1	0	0	−1	1*	0	0	1	0	0	−1	0			
1.	w'	1	1*	−1	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	1	—	—
	$-y_1'$	−3	1	0	−1	−1	0	1	0	1	0	−1	−1	0	1	0			
	z_2'	2	0	1	1	0	−1	−1	0	0	1	1	0	−1	−1	0			
	u'	2	0	0	1	0	0	−1	1	0	0	1	0	0	−1	0			
2.	x_1''	1	1	−1	1*	0	0	0	0		0		0			1	0	6	$\frac{3}{2}$
	$-y_1''$	−4	0	1	−2	−1	0	1	0		0		−1			−1			
	z_2''	2	0	1	1	0	−1	−1	0		1		0			0			
	u''	2	0	0	1	0	0	−1	1		0		0			0			
3.	x_3'''	1	1	−1	1	0	0	0	0		0		0				—	3	$-\frac{3}{2}$
	$-y_1'''$	−2	2	−1	0	−1	0	1	0		0		1						
	z_2'''	1	−1	2*	0	0	−1	−1	0		1		0						
	u'''	1	−1	1	0	0	0	−1	1		0		0						
4.	$x_3^{(4)}$	$\frac{3}{2}$	$\frac{1}{2}$	0	1	0	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{2}$	0				0				—	$\frac{3}{2}$	$-\frac{7}{4}$
	$-y_1^{(4)}$	$-\frac{3}{2}$	$\frac{3}{2}$	0	0	−1*	$-\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	0				−1						
	$x_2^{(4)}$	$\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{2}$	1	0	0	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{2}$	0				0						
	$u^{(4)}$	$\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{2}$	0	0	0	$\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{2}$	1				0						
5.	$x_3^{(5)}$	$\frac{3}{2}$	$\frac{1}{2}$	0	1	0	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{2}$	0								—	0	$-\frac{7}{4}$
	$-v_1^{(5)}$	$-\frac{3}{2}$	$\frac{3}{2}$	0	0	−1	$-\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	0										
	$x_2^{(5)}$	$\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{2}$	1	0	0	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{2}$	0										
	$u^{(5)}$	$\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{2}$	0	0	0	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{2}$	1										

II°. A „hosszú" algoritmus. *1'*. Tárgyalását – a rövid algoritmus ismeretében – már rövidre foghatjuk. Mint már utaltunk rá, a hosszú algoritmus mint rekurzív eljárás

pozitív szemidefinit **C** matrix

feltétel mellett alkalmazható, konvergens; ekkor a megoldást bármely $0 \leqq \lambda$ értéknél szolgáltatja.

Indulás. Végrehajtjuk a rövid algoritmust $\lambda = 0$ mellett, majd egyenletrendszerét kiegészítjük $\mu\mathbf{a}^{0*}$-gal,

$$\left.\begin{aligned} \mathbf{Ax} &= \mathbf{a}_0 \\ \mathbf{Cx} - \mathbf{v} + \mathbf{A}^*\mathbf{u} + \mu\mathbf{a}^{0*} + \mathbf{F}\boldsymbol{\zeta} &= \mathbf{0} \end{aligned}\right\} \qquad (22a,\ b)$$

módon. Egy kezdeti megoldása is ismeretes, mégpedig

$$\mathbf{u} = \mathbf{0}, \quad \boldsymbol{\zeta} = \mathbf{0}, \quad \mathbf{v}^*\mathbf{x} = 0. \qquad (22c)$$

Rekurzió. Ha már rendelkezésünkre áll egy bázis és benne egy, a (22*a*, *b*, *c*)-t — az $\mathbf{u} = \mathbf{0}$ kivételével — kielégítő bázismegoldás, akkor lehetőség szerint olyan báziscseréket eszközlünk a szimplex eljárás során, amelyek megvalósítják a

$$-\mu = \text{Min!} \qquad (23a)$$

minimálást, egyidejűleg kielégítve a (19*a*, *b*) mellékfeltételt és a

$$\text{„}\zeta_j \text{ nem lehet bázisváltozó''} \qquad (23b)$$

alakú kiegészítő feltételt.

Befejezés. Ha a rekurzióban említett báziscseréket nem lehet végrehajtani, akkor

$$\mu = 0 \quad \text{és minden} \quad 0 < \lambda\text{-ra } U(\lambda) = -\infty, \qquad (24a)$$

továbbá ilyenkor a lehetséges $\mathbf{x}$ megoldásnak egy olyan L halmaza található, amelyben

$$u(\lambda, \mathbf{x}) \to \infty, \quad \text{hacsak} \quad \lambda > 0 \quad \text{és} \quad \mathbf{x} \in L. \qquad (24b)$$

Ellenkező esetben a rekurzió a véges $0 = \mu < \mu' < \ldots < \mu^{(\varkappa)}$ sorozatot és a hozzájuk tartozó bázismegoldások $\mathbf{x}$-es részének $\mathbf{x}, \mathbf{x}', \ldots, \mathbf{x}^{(\varkappa)}$ sorozatát szolgáltatja. Az iteráció — legfeljebb $\binom{2n}{n}$ lépés után — az $\mathbf{x}^{(\infty)}$ vektorral végződik. E vektorokkal a kvadratikus feladat *optimális programja* így képezhető:

$$\mathbf{x}_{\text{opt}} = \begin{cases} \dfrac{\mu^{(k+1)} - \lambda}{\mu^{(k+1)} - \mu^{(k)}}\mathbf{x}^{(k)} + \dfrac{\lambda - \mu^{(k)}}{\mu^{(k+1)} - \mu^{(k)}}\mathbf{x}^{(k+1)}, & \text{ha } \mu^{(k)} \leqq \lambda \leqq \mu^{(k+1)}; \\ \mathbf{x}^{(\varkappa)} + (\lambda - \mu^{(\varkappa)})\mathbf{x}^{(\infty)}, & \text{ha } \lambda \geqq \mu^{(\varkappa)}. \end{cases} \qquad (25a,\ b)$$

2'. Megjegyzendő, hogy a hosszú algoritmusnál is a *módosított szimplex eljárást,* ill. lépéseit célszerű alkalmazni (a rövidnél mondottakhoz hasonló okok miatt), mégpedig a (20) szerinti *kvadratikus szimplex matrixalgoritmus (SqMA)* útján, akár a táblázatos forma megtartása mellett is.

Végezetül hangsúlyozzuk, hogy a fentiekben a rövid és a hosszú változattal kapcsolatban csupán a legszükségesebb tudnivalókat vázoltuk fel. További elmé-

leti, gyakorlati és speciális kérdésekben a szakirodalomra, mindenekelőtt *P. Wolfe* már említett cikkére kell utalnunk.

*2. **Pl.*** Oldjuk meg most az imént vázolt „hosszú" algoritmussal az 1. példában megadott kv. prs-i feladatot!

Az 1. példa részletes tárgyalása után itt szintén rövidebbre foghatjuk a szót. A hosszú algoritmus *induló szimplex táblázata* — a μ oszlopával bővülve és $\lambda = 0$ mellett — nyilván így alakul:

1	x_1	x_2	x_3	v_1	v_2	v_3	u	μ	z_1	z_2	z_3	y_1	y_2	y_3	w
1	1	−1	1	0	0	0	0	0	0	0	0		0	0	1
0	1	0	0	−1	0	0	1	1	1	0	0	−1	0	0	0
0	0	1	0	0	−1	0	−1	0	0	1	0	0	−1	0	0
0	0	0	1	0	0	−1	1	−2	0	0	1	0	0	−1	0

A hosszú algoritmus módosított szimplex lépéseit jellemző *táblázatsorozatot* itt már csak a mindenkori változók és az u_0 értékeire szorítkozva tüntetjük fel:

Bázis	x_1	x_2	x_3	v_1	v_2	v_3	u	μ	z_1	z_2	z_3	y_1	y_2	y_3	w	u_0
0									0	0	0				1	
1							0			0	0				1	
2	0						0				0				1	
3	0		0				0								1	
4	$\frac{1}{2}$		$\frac{1}{2}$				$-\frac{1}{2}$						$\frac{1}{2}$			$\frac{1}{4}$
5	$\frac{1}{2}$		$\frac{1}{2}$		$\frac{1}{2}$		$-\frac{1}{2}$									$\frac{1}{4}$
6			1		$\frac{1}{3}$		$-\frac{1}{3}$	$\frac{1}{3}$								$\frac{1}{6}$
7			1	$\frac{1}{2}$			0	$\frac{1}{2}$								$-\frac{1}{2}$
8		t	$1+t$	$\frac{1}{2}+2t$			t	$\frac{1}{2}+t$								$-\frac{1}{2}-t(2+t)$

Esetünkben $\varkappa = 7$, $\mu^{(7)} = \frac{1}{2}$ és $\lambda = \frac{1}{2} + t \geqq \mu^{(7)}$-re az *optimális megoldás* — a (25*b*) szerint —

$$\mathbf{x}_{opt} = \mathbf{x}^{(7)} + (\lambda - \mu^{(7)})\mathbf{x}^{(\infty)} = [0,\ 0,\ 1]^* + t[0,\ 1,\ 1]^* = [0,\ t,\ 1+t]^*;$$

speciálisan $\lambda = 1$-re, vagyis $t = \frac{1}{2}$-re tehát $\mathbf{x}_{opt} = \left[0,\ \frac{1}{2},\ \frac{3}{2}\right]^*$, összhangban a rövid algoritmus eredményével. Viszont pl. $\lambda = \frac{1}{4}$-re, minthogy ez $\mu^{(5)} = 0$ és $\mu^{(6)} = \frac{1}{3}$ közé esik, az optimális megoldás — a (25*a*) szerint —

$$\mathbf{x}_{opt} = \frac{\mu^{(6)} - \lambda}{\mu^{(6)} - \mu^{(5)}}\mathbf{x}^{(5)} + \frac{\lambda - \mu^{(5)}}{\mu^{(6)} - \mu^{(5)}}\mathbf{x}^{(6)} = \frac{\frac{1}{3} - \frac{1}{4}}{\frac{1}{3} - 0}\mathbf{x}^{(5)} + \frac{\frac{1}{4} - 0}{\frac{1}{3} - 0}\mathbf{x}^{(6)} =$$

$$= \frac{1}{4}\mathbf{x}^{(5)} + \frac{3}{4}\mathbf{x}^{(6)} = \frac{1}{4}\left[\frac{1}{2},\ 0,\ \frac{1}{2}\right]^* + \frac{3}{4}[0,\ 0,\ 1]^* = \left[\frac{1}{8},\ 0,\ \frac{7}{8}\right]^*.$$

Az optimális program értéke $\mu^{(7)} \leqq \lambda$-ra láthatóan

$$u_{0\,opt} = -\frac{1}{2} - t(2 + t), \quad \text{tehát } \lambda = 1\text{-re} \left(t = \frac{1}{2}\text{-re}\right) \quad u_{0\,opt} = -\frac{7}{4},$$

összhangban a rövid algoritmus eredményével.

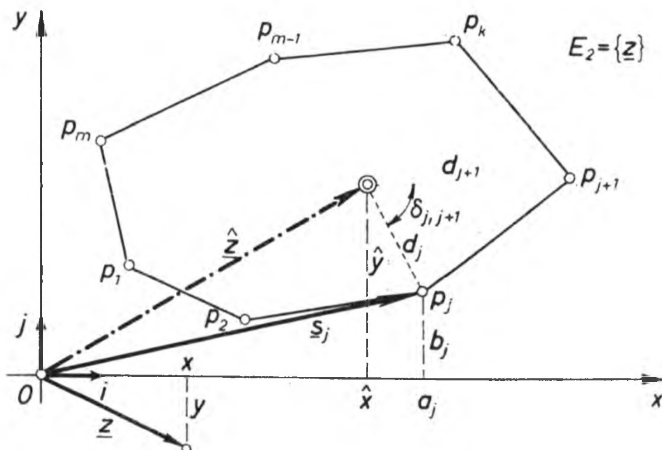
d) Telepítésprogramozás, centrum-vektoralgoritmussal (CVA)

α) A centrumproblémákról általában

I°. A probléma felvetése. *Adott fogyasztóhelyeket* (termelőhelyeket) *kiszolgáló elosztóhelyek* (gyűjtőhelyek), ún. centrumok *gazdaságos elhelyezésének, telepítésének tervezése* — amint erre már a század elején megindult gyártelepítési vizsgálatok alkalmával felfigyeltek — egyszerű esetben az alábbi (klasszikus) ***centrumproblémára*** vezet:

Adva vannak az $E_2 = \{\mathbf{z}\} = \{x\mathbf{i} + y\mathbf{j}\}$ kétdimenziós euklideszi térben (röviden: az x, y derékszögű koordináta-rendszerben) [az $\mathbf{s} = a_j\mathbf{i} + b_j\mathbf{j} \in E_2$ *diszkrét pontok* ($j = 1, 2, \ldots, m$), $p_j > 0$ *súlyokkal ellátva és egy tetszőleges* $\mathbf{z} = x\mathbf{i} + y\mathbf{j} \in E_2$ *ponttól* (9. ábra)

$$d_j \equiv |\mathbf{d}_j| = |\mathbf{z} - \mathbf{s}_j| = \sqrt{(\mathbf{z} - \mathbf{s}_j)^2} = \sqrt{(x - a_j)^2 + (y - b_j)^2} \geqq 0, \quad (j = 1, 2, \ldots, m) \tag{1}$$



9. ábra

távolságban. Keresendő azon $\hat{\mathbf{z}} = \hat{x}\mathbf{i} + \hat{y}\mathbf{j} \in E_2$ *centrumpont, amelynél az*

$$u(\mathbf{z}) \equiv \sum_j p_j d_j = \sum_j p_j |\mathbf{d}_j| = \sum_j p_j |\mathbf{z} - \mathbf{s}_j| =$$

$$= \sum_j p_j \sqrt{(x-a_j)^2 + (y-b_j)^2} \geqq 0 \qquad (j = 1, 2, \ldots, m) \tag{2}$$

súlyozott távolságösszeg az

$$\hat{u} = u(\hat{\mathbf{z}}) =: \operatorname{Min} u(\mathbf{z}) \tag{3}$$

minimális értékét veszi fel.

Említsünk meg ***néhány konkrét centrumproblémát!***

1. Legyen egy metropolisznak *m nagy városrésze,* a *j*-edik $\mathbf{s}_j$ központtal, p_j lakólétszámmal és egy $\mathbf{z}$ ponttól számítva $d_j = |\mathbf{z} - \mathbf{s}_j|$ középtávolsággal. Megállapítandó (pl. a legfontosabb közigazgatási és kereskedelmi középületek célszerű elhelyezése végett) az egész lakosság számára *leghozzáférhetőbb* $\hat{\mathbf{z}}$ *városközpont,* ún. viálcentrum, amelyre vonatkozó ún. viálösszeg $\sum_j p_j d_j = \text{Min!}$

2. Meghatározandó *ipartelep gazdaságos elhelyezése m helység között* úgy, hogy a d_j hosszúságú bekötő út- (vasút-) szakaszok p_j fajlagos költségekkel számított $\sum_j p_j d_j$ építési összköltsége minimális legyen.

3. Megállapítandó *olajtartály (gáztartály) gazdaságos telepítése m olajkút (gázkút) között* úgy, hogy a d_j hosszúságú bekötő csővezetékeknek (az átmérőtől függő) p_j fajlagos költségekkel számított $\sum_j p_j d_j$ építési összköltsége minimális legyen.

4. Megállapítandó *hűtőház gazdaságos telepítése m helység között* úgy, hogy a d_j hosszúságú bekötő utakon a p_j mennyiségű fagyasztott anyagok szállítási összköltsége minimális legyen.

II°. A problémá történetéről. A (2)-vel megformulázott centrum-probléma, mint *kétváltozós szélsőérték-feladat* korántsem új a matematikában, sőt már századokkal az utolsó évtizedek telepítéstervezési alkalmazásai előtt foglalkoztatta a matematikusokat. Egyes szélsőérték-problémákat már az ókorban is ismertek; pl. *Euklidesz* és *Pappus* írt ilyenekről. Később a francia *P. Fermat* már egységes módszerrel, a mai differenciálszámítás egy korai változatával tárgyalta az extrémumfeladatokat, köztük az egyenlő súlyos, *hárompontos* centrum-problémát. A probléma általános megoldása felé nagy lépést tett *Gauss*, vizsgálva az egyenlő súlyos, *négypontos* probléma különféle eseteit; felismerte, hogy négynél több pont mindig magasabb fokú egyenletre vezet (melynél — tudvalevőleg — egzakt megoldhatóság nincs biztosítva), sőt felfigyelt a probléma *közlekedési (viál-) vonatkozásaira is*. A későbbiekben egyes részletkérdéseket, határeseteket, közlekedési (viál-) vonatkozásokat vizsgáltak, az utóbbit pl. *Foeppl*, s időnként még eredménytelen kísérleteket tettek egyesek a négynél több pontos feladat egzakt megoldására.

A centrum-probléma telepítéstervezési jelentőségét elsőnek a *A. Weber* ismerte fel és közölte *„Über den Standort der Industrien"* c. könyvében (1909, Tübingen). Munkáját 20 év múlva angolra is lefordították, *"A. Weber's Theory of the Location of Industries"* címen (1929, Chicago). Minthogy van bizonyos kapcsolat (de távolról sem megegyezés) a *Weber*-féle centrumprobléma és a másodrendű nyomaték *Steiner*-féle extrémumproblémája* között, ezért több szerző *Steiner—Weber-féle probléma* néven idézi a szóban forgó centrumproblémát.

A *Weber*-könyv említett amerikai kiadása (1929) nyilván az ottani nagyipari konszernek érdeklődését mutatta az *ipartelepítés gazdaságossági problémái* iránt. Ettől az időtől datálhatjuk a telepítési problémák többé-kevésbé *rendszeres vizsgálatát* a szakirodalomban és alkalmazásukat konkrét telepítéseknél. A problémakör fejlődése, gyarapodása *eleinte lassú volt*, újszerűségénél fogva, kevéssé haladta túl a *Weber*-féle kereteket. A 30-as években a *Szovjetunióban* végrehajtott nagyszabású iparosítás során is végeztek hasonló vizsgálatokat. Fordulatot a *II. világháború* hozott, széleskörű *hadászati alkalmazásaival* (pl. támaszpontok, hadianyagraktárak, javítóműhely-központok, olajtankoló állomások stb. telepítésével), majd utána *a matematikai programozás* szakirodalmának kialakulása adott újabb lendületet a telepítési problémák fejlődésének.

Az utóbbi tekintetben főleg *a nemlineáris (konvex) programozás Kuhn—Tucker-féle megalapozása* (1951) és azóta bekövetkezett *gyors fejlődése* volt ösztönző hatással a telepítési problémák tárgyi és módszerbeli gyarapodására. Kitűnt, hogy a centrumprobléma egy speciális, tetszőleges m ($>$ 4) és különböző súlyok esetén egzakt módon nem megoldható konvex programozási feladat, amelyre ily módon eredményesen alkalmazhatók a konvex programozás változatos *közelítő módszerei* (pl. a gradiens-módszerek). E mellett a modern ipartelepítés újabb és újabb szempontjai a klasszikus centrumprobléma több irányú és messze menő *általánosítását* is megkövetelték (pl. több körzet és centrum, előírt lehetséges telephelyek közül való optimális kiválasztás, adott útvonalhálózathoz alkalmazkodó gazdaságos telepítés stb. esetében).

Napjainkban még javában folyik a telepítésprogramozás fejlődése a szocialista és a kapitalista országokban egyaránt, mégpedig a módszertani célszerűsítés, a tárgyi általánosítás

*L. bővebben az *a)* *x)* III° helyen.

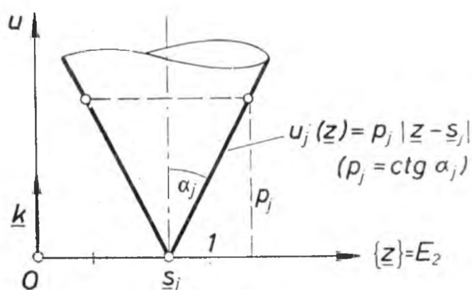
és nem utolsósorban az intenzív gyakorlati alkalmazás vonalán s egyben *a korszerű telepítési politika tudományos megalapozásaként.* Napjaink telepítési problematikájának egyes kérdéseire, *az újabb szakirodalmi vizsgálatokra,* köztük a *hazai kutatás néhány eredményére, gépi számítására* később még visszatérünk.

III°. Elméleti vonatkozások. Mint már említettük, a (2, 3) alapján

$$u(\mathbf{z}) \equiv \sum_j p_j d_j = \sum_j p_j |\mathbf{z} - \mathbf{s}| = \sum_j p_j \sqrt{(\mathbf{z} - \mathbf{s}_j)^2} =$$
$$= \sum_j p_j \sqrt{(x - a_j)^2 + (y - b_j)^2} = \text{Min}! \qquad (4)$$

$$[\hat{u} = u(\hat{\mathbf{z}}) = \text{Min}\, u(\mathbf{z}), \quad \hat{\mathbf{z}} = ?, \quad \hat{u} = ?;\ j = 1, 2, \ldots, m; \quad p_j > 0, \quad d_j \geqq 0]$$

alakban is megformulázható centrumprobléma feltétel nélküli, vagyis *szabad szélsőérték-feladat,* s mint ilyen, a matematikai programozás egy speciális esete (ti. a nemnegativitási és a többi szokásos kényszerfeltételek itt hiányoznak). A kétváltozós $u(\mathbf{z}) = u(x, y)$ célfüggvény láthatóan irracionális, s így nemlineáris, extrémálása tehát *nemlineáris programozást* jelent.



10. ábra

A feladat megoldhatósági kérdéseinek tisztázását kívánják elősegíteni az alábbi *elméleti megállapítások,* melyek egyébként a szakirodalomban bővebben kifejtve is megtalálhatók.*

a) Az $u_j(\mathbf{z}) = p_j |\mathbf{z} - \mathbf{s}_j| \geqq 0$ *függvények,* ill. az $E_3 = \{\mathbf{z} + u\mathbf{k}\}$ térben megfelelő ($\mathbf{s}_j$ csúcspontú, az u tengellyel $\|$ tengelyű, $\alpha = \text{arc ctg}\, p_j$ félnyílású, felfelé nyíló) *körkúpfelületek* nyilván (alulról) *konvexek* (10. ábra).

b) Az $u(\mathbf{z}) = \sum_j u_j(\mathbf{z})$ *függvény,* mint az $u_j(\mathbf{z})$ konvex függvénynek pozitív l. kombinációja, *szintén konvex,* a megfelelő (az említett körkúpokból) *szuperponált felület ugyancsak;* függőleges síkmetszetei felfelé nyíló hiperbolaágakból és metsződő egyenespárokból szuperponált konvex görbék.

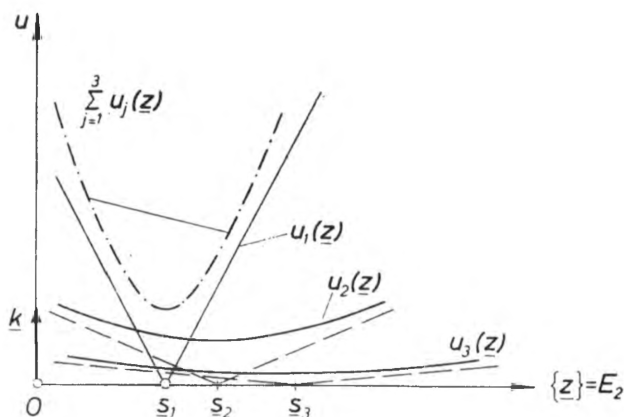
c) Ha az $\mathbf{s}_j$ csúcspontok *nem kollineárisak,* azaz

$$\mathbf{s}_j \neq \lambda \mathbf{s}_m + (1 - \lambda)\mathbf{s}_1 \qquad (0 \leqq \lambda \leqq 1; \quad j = 1, 2, \ldots, m), \qquad (5)$$

akkor az $u(z)$ *függvény,* ill. *felület* (függőleges síkmetszeteivel együtt) *szigorúan konvex* (11. ábra), vagyis

$$\mathbf{z}^* \mathbf{U}(\mathbf{z}) \mathbf{z} > 0, \quad \text{ahol} \quad \mathbf{z} \neq \mathbf{0} \quad \text{és} \quad \mathbf{U}(\mathbf{z}) \equiv \frac{d^2 u}{d\mathbf{z}^2} \equiv \frac{d\mathbf{u}}{d\mathbf{z}}. \qquad (6)$$

* Ezekről l. pl. *Kuhn* [22], *Hosszú* [23].



11. ábra

Ha pedig az $\mathbf{s}_j$ pontok kollineárisak, akkor hordozó egyenesük mentén $u(\mathbf{z})$ szakaszonként lineáris konvex (ún. konvex poligon), egyebütt szigorúan konvex.

d) Az $u(\mathbf{z})$ felület $u(\mathbf{z}) = c$ *szintvonalai* (vízszintes síkmetszetei), mint különböző középpontú és sugarú körök burkolói, *szigorúan konvex zárt görbék*, kivéve a kollineáris $\mathbf{s}_j$ pontok esetén egyenesdarabbá fajuló egyetlen (éppen a $c_0 = \text{Min}\, u$-nak megfelelő) szintvonalat.

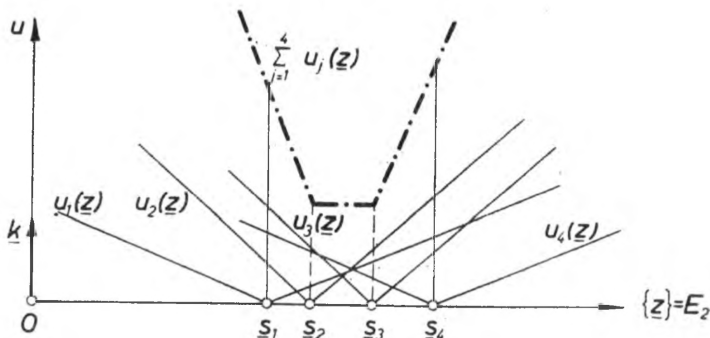
e) Ha az $\mathbf{s}_j$ csúcspontok *nem kollineárisak*, akkor $u(\mathbf{z})$-nek csak *egyetlen* (lokális s egyben globális) $\hat{u} = u(\hat{\mathbf{z}})$ *minimuma* (lehet, sőt $u(\mathbf{z})$ jellegénél fogva) van, a c)-beli szigorú konvexitásnak megfelelően; ezen $\hat{\mathbf{z}}$ *minimumhely (centrum)*

$$\text{általában } \hat{\mathbf{z}} \neq \mathbf{s}_j, \qquad \text{speciálisan } \hat{\mathbf{z}} = \hat{\mathbf{s}}_k \quad (k \in \{j\}). \tag{7a, b}$$

A továbbiakban ezt az (általános és speciális) gyakorlati esetet fogjuk vizsgálni.

f) Ha az $\mathbf{s}_j$ *pontok kollineárisak*, akkor a hordozó egyenesük mentén jelentkező konvex poligon valamelyik csúcspontja, esetleg oldala szolgáltatja a $\hat{\mathbf{z}}$ minimumhely(ek)et *(12. ábra)*. A továbbiakban e triviális esettel nem szükséges foglalkoznunk.

Néhány további elméleti megállapításra a szélsőérték-feladat megoldása során kerül sor.



12. ábra

β) A centrumprobléma megoldásáról

I°. Általános eset. Térjünk rá most a (4) szabad szélsőérték-feladat megoldására, mégpedig az (5) *inkollinearitásnak* megfelelő (7*a*, *b*) gyakorlati esetre, annak (7*a*) általános és (7*b*) speciális alesetére szorítkozva. Lokális [és $u(\mathbf{z})$ szigorú konvexitása folytán egyben globális] extrémumról lévén szó, vizsgálatainkban fontos szerepet játszik s így külön figyelmet érdemel *az* $u(\mathbf{z})$ *függvény gradiense:*

$$\mathbf{u}(\mathbf{z}) \equiv \frac{du}{d\mathbf{z}} \equiv \mathbf{grad}\, u(\mathbf{z}) = \sum_j \frac{p_j(\mathbf{z}-\mathbf{s}_j)}{\sqrt{(\mathbf{z}-\mathbf{s}_j)^2}} = \sum_j p(\mathbf{z}-\mathbf{s}_j)^0 = \sum_j p_j \mathbf{d}_j^0 =$$
$$= \sum_j p_j(\mathbf{i}\cos\varphi_j + \mathbf{j}\sin\varphi_j) \qquad (j = 1, 2, \ldots, m), \tag{8}$$

ahol $\mathbf{d}_j^0 \equiv (\mathbf{z}-\mathbf{s}_j)^0$ az $\mathbf{s}_j$ pontból a $\mathbf{z}$ felé irányuló egységvektor. A gradiens vektor — tudvalevőleg — *irányát* tekintve merőleges a szintvonalakra, *értelmét* tekintve a magasabb skalárú szintvonalak felé mutat, *nagyságával* pedig a skalár legnagyobb (ívhossz szerinti) változási sebességét adja (mely éppen saját iránya és értelme mentén jelentkezik). Belátható, hogy a

$$\mathbf{z} = \mathbf{s}_j \text{ helyek, ahol } \mathbf{d}_j = \mathbf{z} - \mathbf{s}_j = \mathbf{0}, \tag{9}$$

a (7) szerinti $\mathbf{u} \equiv \mathbf{grad}\, u(\mathbf{z})$ gradiens-vektormező *szinguláris pontjai;* ui. az ott jelentkező $\mathbf{d}_j = \mathbf{0}$ vektorok iránya értelme és egységvektora, így minden $\mathbf{u}(\mathbf{s}_j)$ gradiens is határozatlan, értelmezetlen. Helyettük az $\mathbf{u}(\mathbf{z})$ értelmezésének kibővítéseként — célszerűen, mechanikai analógia alapján — az

$$\mathbf{u}(\mathbf{s}_j) = \mathrm{maj}(|\mathbf{u}_j| - p_j, 0)\cdot\frac{\mathbf{u}_j}{|\mathbf{u}_j|}, \quad \text{ahol} \quad \mathbf{u}_j = \sum_{i\neq j} p_i(\mathbf{s}_j - \mathbf{s}_i)^0 = \sum_{i\neq j} p_i \mathbf{d}_i^0 \tag{10a, b}$$

vektorok vezethetők be; eszerint $|\mathbf{u}_j| < p_j$ esetén $\mathbf{u}(\mathbf{s}_j) = \mathbf{0}$, viszont $|\mathbf{u}_j| > p_j$ esetén az $\mathbf{u}(\mathbf{s}_j)$ vektorok $|\mathbf{u}_j| - p_j$ nagyságúak és $\mathbf{u}_j$ irányúak, értelműek.

Ezek után az (5) inkollinearitás esetén (6) módon szigorúan konvex $u(\mathbf{z})$ függvény (4) lokális s egyben globális *minimumának szükséges és elégséges feltétele** a (8) gradiensvektor eltűnése, azaz — a (7*b*) általános esetet feltételezve —

$$\mathbf{u}(\hat{\mathbf{z}}) = \sum \frac{p_j(\hat{\mathbf{z}}-\mathbf{s}_j)}{\sqrt{(\mathbf{z}-\mathbf{s}_j)^2}} = \sum_j \frac{p_j}{\hat{d}_j}(\hat{\mathbf{z}}-\mathbf{s}_j) = \sum_j p_j(\hat{\mathbf{z}}-\mathbf{s}_j)^0 = \sum_j p_j \hat{\mathbf{d}}_j^0 = \mathbf{0}$$
$$(j = 1, 2, \ldots, m; \quad \hat{\mathbf{z}} \neq \mathbf{s}_j). \tag{11}$$

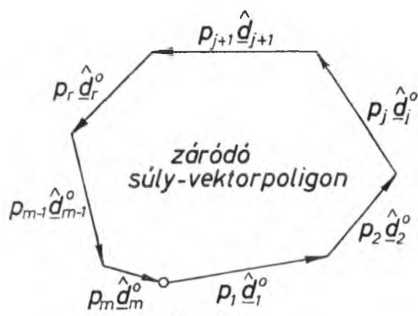
* Az elégségességet a szigorú konvexitás biztosítja.

Ez geometriailag *záródó súlyvektorpoligont* jelent *(13. ábra)*. A (11)-ből az (egyetlen) *minimumhelyre*, vagyis a *centrumra* a

$$\hat{\mathbf{z}} = \frac{1}{\hat{Q}} \sum_j \frac{p_j \mathbf{s}_j}{\sqrt{(\hat{\mathbf{z}} - \mathbf{s}_j)^2}} = \frac{1}{\hat{Q}} \sum_j \frac{p_j}{\hat{d}_j} \mathbf{s}_j = \frac{1}{\hat{Q}} \sum_j \hat{q}_j \mathbf{s}_j \equiv \zeta(\hat{\mathbf{z}})$$

$$(j = 1, 2, \ldots, m;\ \hat{q}_j = p_j/\hat{d}_j,\ \hat{Q} = \sum_j \hat{q}_j;\ \hat{\mathbf{z}} \neq \mathbf{s}_j) \qquad (12)$$

formula adódik, hacsak a $\hat{\mathbf{z}}$ centrum nem esik össze valamelyik $\mathbf{s}_j$ kúpcsúcsponttal. *Az $m = 2, 3, 4$ esetben* ez — megfelelő racionalizáló művelettel — legfeljebb 4-edfokú algebrai egyenletet szolgáltat a keresett $\hat{\mathbf{z}}$ meghatározására, ami — tudvalevőleg — zárt alakban (a négy alapművelet és a gyökvonás véges számú alkalmazásával) *egzaktul megoldható*, bár az $m = 3, 4$ esetben elég bonyolult megoldóképletekkel. Ugyanezek egyenlő súlyok ($p_j = p =$ const) esetén jóval egyszerűbb alakot öltenek és kedvező geometria szerkesztésre is módot adnak.* Egyes különleges esetekben (pl. egyenlő súlyok és szabályos n-szög csúcsaiban elhelyezkedő $\mathbf{s}_j$ pontok mellett) $m > 4$ esetén is lehetséges zárt alakú egzakt megoldás. Ezzel szemben *$m > 4$ és tetszőleges súlyok és $\mathbf{s}_j$ pontok esetén* a racionalizáló lépések a (11—12)-ből $4 < m$-edfokú algebrai egyenletre vezetnek, amely — *Abel* tétele értelmében △ — általában nem oldható meg zárt alakban, egzakt módon, hanem *csupán közelítőleg*. E célra — a (12) $\hat{\mathbf{z}} = \zeta(\hat{\mathbf{z}})$ alakjánál fogva — pl. az *iteráció*□ is alkalmas, amely pl. a $\hat{\mathbf{z}}^{(0)} = \mathbf{z}_s$ (súly-) pontból kiindulva a



13. ábra

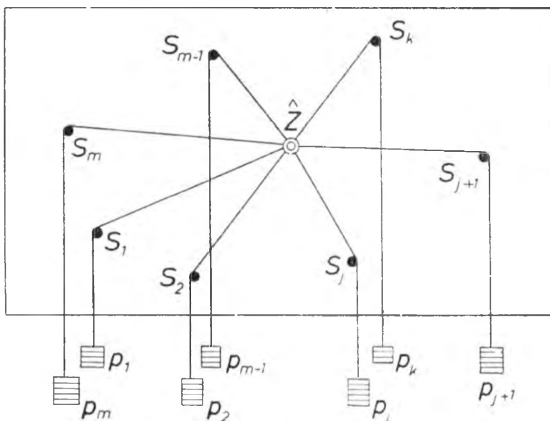
$$\hat{\mathbf{z}}^{(1)} = \zeta(\mathbf{z}^{(0)}),\quad \hat{\mathbf{z}}^{(2)} = \zeta(\hat{\mathbf{z}}^{(1)}), \ldots,\quad \hat{\mathbf{z}}^{(n+1)} = \zeta(\hat{\mathbf{z}}^{(n)}),\quad |\hat{\mathbf{z}}^{(n+1)} - \hat{\mathbf{z}}^{(n)}| < \varepsilon \qquad (13)$$

közelítő megoldást szolgáltatja, az előírt ε abszolút hibakorláttól függő $n + 1$ lépésben (az eljárás konvergencia-feltételeinek teljesülése mellett). Később ennek *egy speciális változatát* fogjuk alkalmazni [ahol $\zeta(\hat{\mathbf{z}}^{(k)})$ helyett $\hat{\mathbf{z}}^{(k)} - \lambda_k \mathbf{u}(\hat{\mathbf{z}}^{(k)})$ lesz].

A (4) feladat közelítő megoldására *egyszerű mechanikai analógia* is rendelkezésre áll. Nevezetesen, alkalmas kicsinyítés után, egy függőleges táblán megjelölt $S_1, \ldots S_m$ pontokba verjünk szögeket és vezessük át rajtuk az összecsomózott m fonálra függesztett $p_1, \ldots, p_m$ súlyokat *(14. ábra)*. A fonalerők a csomópontot $-\mathbf{u}(\mathbf{z}) \equiv -\mathbf{grad}\, u$ eredő erővel terhelik, és saját irányukban elmozgatják mindaddig, míg *a csomópont $\hat{Z}$ helyzetében* elő nem áll a $-\mathbf{u}(\hat{\mathbf{z}}) \equiv \equiv -\widehat{\mathbf{grad}}\, u = \mathbf{0}$ *egyensúly*. A fonalak súrlódása és a csomópont merevsége

*L. az alábbiakban! △ és □ L. pl. *Szentmártony:* Felsőbb mennyiségtan.

miatt az utóbbi nem a pontos $\hat{\mathbf{z}}$ centrumon állapodik meg, hanem valamely $\tilde{\mathbf{z}}$ közelítő helyzetén, a pontosság azonban technikai fogásokkal (pl. csigákkal, csúszógyűrűvel, több táblaállással stb.) fokozható. (E mechanikai analógia a $\hat{\mathbf{z}} = \mathbf{s}_k$ speciális esetben is hasznukra lesz.)



14. ábra

II°. Különleges eset. Tegyük fel, hogy az $u(\mathbf{z})$ függvény $\hat{\mathbf{z}}$ minimumhelye, vagyis *a $\hat{\mathbf{z}}$ centrum összeesik* valamely, pl. *az $\mathbf{s}_k$ kúpcsúcsponttal.* Ez — mint a (9)-nél már említettük — az $\mathbf{u}(\mathbf{z})$ gradiensmező *szinguláris pontja* vagyis $\mathbf{u}(\mathbf{z})$ itt nincs értelmezve. Az $\mathbf{s}_k$ pont $0 < |\mathbf{z} - \mathbf{s}_k| < \varepsilon$ *kis környezetében* azonban létezik és folytonos az $\mathbf{u}(\mathbf{z})$, tehát az $\mathbf{s}_k$ pontból a (10*b*) szerinti $\mathbf{u}_k$ vektorral ellentett irányban elmozdulva, a *gradiens* (8) formulája

$$\mathbf{u}(\mathbf{z}_{k\varepsilon}) \equiv \mathbf{u}(\mathbf{s}_k - \varepsilon\mathbf{u}_k^0) = \sum_{i \neq k} p_i(\mathbf{z}_{k\varepsilon} - \mathbf{s}_i)^0 + p_k(-\mathbf{u}_k^0) \approx$$

$$\approx \sum_{i \neq k} p_i(\mathbf{s}_k - \mathbf{s}_i)^0 - p_k\mathbf{u}_k^0 \equiv \mathbf{u}_k - p_k\mathbf{u}_k^0 = (|\mathbf{u}_k| - p_k)\mathbf{u}_k^0, \tag{14}$$

$$-\mathbf{u}(\mathbf{z}_{k\varepsilon}) \approx +(p_k - |\mathbf{u}_k|)\,\mathbf{u}_k^0$$

alakot ölt, összhangban a (10*a*)-val. Ha $p_k > |\mathbf{u}_k|$, akkor a csomópont a $\mathbf{z}_{k\varepsilon}$ helyről az $\mathbf{u}_k$ irányában, tehát az $\mathbf{s}_k$ hely felé mozdul el, ott kialakul az $\mathbf{u}(\mathbf{s}_k) = \mathbf{0}$ egyensúly s egyben az $u(\mathbf{s}_k)$ függvényminimum. Ha $p_k \leqq |\mathbf{u}_k|$, akkor nem az $\mathbf{s}_k$ pont lesz az egyensúlyi, ill. minimumhely (hanem valamely $\mathbf{s}_k - \tau\mathbf{u}_k^0$, $\tau \geqq \varepsilon$ pont). Annak *elégséges feltétele,* hogy a $\hat{\mathbf{z}}$ centrum összeessék az $\mathbf{s}_k$ kúpcsúcsponttal, az utóbbi „túlsúlyát" kifejező

$$p_k > |\mathbf{u}_k| \equiv \sum_{i \neq k} p_i(\mathbf{s}_k - \mathbf{s}_i)^0 \tag{15}$$

egyenlőtlenség teljesülése.*

Itt jegyezzük meg, hogy *a $\hat{\mathbf{z}}$ centrum,* vagyis az $u(\mathbf{z})$ célfüggvény minimumhelye — az általános és a különleges esetben egyaránt — az $\mathbf{s}_j$ pontokat burkoló konvex poligontartományban, *az $\mathbf{s}_j$-k ún. konvex burokjában (K) helyez-*

* E feltétel — szemben a [23] cikk megállapításával — *nem szükséges,* mert *m* adott pont centruma, egy újabb, tetszőlegesen kicsiny súlyú (nem „túlsúlyos") pont ráhelyezése után is, nyilván centrum marad.

kedik el. Ha $\hat{\mathbf{z}} = \mathbf{s}_k$, akkor az állítás triviális. Ha pedig $\hat{\mathbf{z}} \neq \mathbf{s}_j$, akkor a $\hat{\mathbf{z}}$ vektor — a (12) szerint —

$$\hat{\mathbf{z}} = \sum_j \frac{p_j}{\hat{d}_j} \mathbf{s}_j \Big/ \sum_j \frac{p_j}{\hat{d}_j} = \sum_j \frac{\hat{q}_j}{\hat{Q}} \mathbf{s}_j \tag{16}$$

$$\left(\hat{q}_j/\hat{Q} = \frac{p_j}{\hat{d}_j} \Big/ \sum_j \frac{p_j}{\hat{d}_j} > 0, \quad \sum_j \hat{q}_j/\hat{Q} = 1\right)$$

módon, vagyis az $\mathbf{s}_j$ vektorok (szigorúan) konvex kombinációjaként nyerhető (s így $\hat{\mathbf{z}}$ a K belső pontja), q.e.d.

Az eddigiek szemléltetésére oldjunk meg most néhány egyszerű ($m = 2, 3, 4$) telepítési feladatot!

γ) Néhány egyszerű feladat egzakt megoldása

1°. Két adott pont. Célszerűségből helyezzük el a koordináta-rendszert úgy, hogy az $m = 2$ adott s egyébként l távolságú és tetszőleges p_1, p_2 súlyokkal veendő S_1, S_2 pontok s így a keresett $\hat{Z}$ centrum is az x tengelyre essenek. Ekkor *feladatunk* a (4)-ről az

$$u(x) = p_1 d_1 + p_2 d_2 = p_1(x - x_1) + p_2(x_2 - x) = \tag{17a}$$
$$= (p_2 x_2 - p_1 x_1) + (p_1 - p_2)x \equiv b + ax = \text{Min!}$$
$$(p_i > 0, \quad x_1 \leqq \hat{x} \leqq x_2 = x_1 + l, \quad \hat{x} = ?)$$

alakra, sőt további célszerűsítéssel az

$$u(x) = p_2 l + (p_1 - p_2)x \equiv b_0 + ax = \text{Min!} \tag{17b}$$
$$(p_i > 0, \quad x_1 = 0 \leqq \hat{x} \leqq x_2 = l, \quad \hat{x} = ?)$$

alakra egyszerűsödik. E $0 \leqq x \leqq l$ szakaszon értelmezett *lineáris függvénynek* nyilván

$$\textit{minimumhelye}\ \hat{x} = \begin{cases} 0, & \text{ha } a > 0 \\ 0 \leqq x \leqq l, & \text{ha } a = 0 \\ l, & \text{ha } a < 0 \end{cases} \text{ és } \textit{minimuma}\ u(\hat{x}) = \begin{cases} b_0, \\ b_0, \\ b_0 + al. \end{cases} \tag{18a, b, c}$$

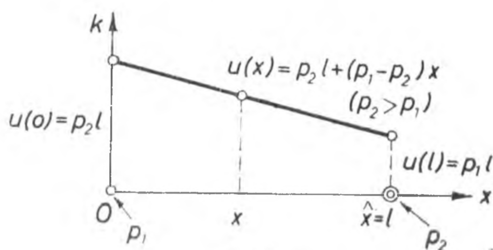
Ez a (17*b*) feladat triviálisan egyszerű, *egzakt megoldása*, mely szükségtelenné tesz bármiféle közelítő megoldással való „igazolást”*. Eredményünk gazdaságilag úgy *magyarázható*, hogy az $\hat{x}$ ellátó hely különböző ($p_1 \neq p_2$) fogyasztások esetén a nagyobbiknak megfelelő x_i fogyasztóhelyre ($p_1 > p_2$-nél az $x_1 = 0$,

* Mégis található ilyen felesleges „igazolás” az irodalomban; l. [69] 176. o.

$p_2 > p_1$-nél az $x_2 = l$ helyre *(15. ábra)*, egyenlő ($p_1 = p_2$) fogyasztások esetén pedig az összekötő szakaszuk bármely pontjára ($0 \leqq \hat{x} \leqq l$) telepítendő.

Pl. Ha $x_1 = 0$, $x_2 = l = 5$ és $p_1 = 2$, $p_2 = 3$, akkor $a \equiv p_1 - p_2 = -1 < 0$, $b_0 = p_2 l = 15$ és a (17*b*, 18*c*) szerint $u(x) \equiv ax + b_0 = -x + 15$, $\hat{x} = x_2 = 5$ és $u(\hat{x}) = b_0 + al = 10$.

II°. Három adott pont.* Legyenek ezek az $E_2 = \{x\mathbf{i} + y\mathbf{j}\}$ koordinátasíkban az $\mathbf{s}_j = a_j\mathbf{i} + b_j\mathbf{j}$ pontok, p_j súllyal ellátva ($j = 1, 2, 3 \equiv m$). Ekkor a $\mathbf{z} = x\mathbf{i} + y\mathbf{j}$ centrum megkeresésére irányuló (4) *feladat* az



15. ábra

$$u(\mathbf{z}) \equiv \sum_{j=1}^{3} p_j d_j = \sum_{j=1}^{3} p_j \sqrt{(\mathbf{z} - \mathbf{s}_j)^2} = \sum_{j=1}^{3} p_j \sqrt{(x - a_j)^2 + (y - b_j)^2} = \text{Min!}$$

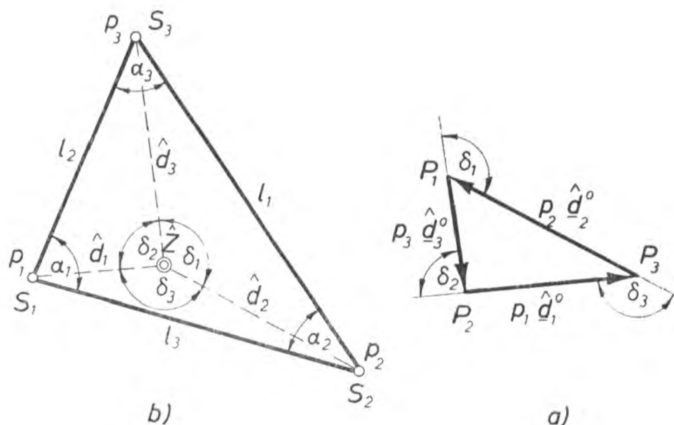
$$[p_j > 0, \quad d_j \geqq 0; \quad \hat{\mathbf{z}} = ?, \quad u(\hat{\mathbf{z}}) = ?] \tag{19}$$

alakban konkrétizálódik. *Megoldása* $\hat{\mathbf{z}}$-re — a $\hat{\mathbf{z}} \neq \mathbf{s}_j$ feltevéssel — a (11)-nek megfelelő

$$\mathbf{u}(\mathbf{z}) \equiv \sum_{j=1}^{3} \frac{p_j(\hat{\mathbf{z}} - \mathbf{s}_j)}{\sqrt{(\hat{\mathbf{z}} - \mathbf{s}_j)^2}} = \sum_{j=1}^{3} p_j(\hat{\mathbf{z}} - \mathbf{s}_j)^0 = \sum_{j=1}^{3} p_j \hat{\mathbf{d}}_j^0 = \mathbf{0} \tag{20}$$

vektoregyenletből nyerhető. A (20) geometriailag a $\hat{\mathbf{d}}_j^0 \equiv (\hat{\mathbf{z}} - \mathbf{s}_j)^0$ irányú és p_j hosszúságú vektorok összeadásával nyert súlyvektor-háromszög *záródását* követeli meg *(16/a ábra)*. Ez csak akkor lehetséges, ha teljesülnek a súlyra a

$$p_j < p_k + p_l \qquad [j = 1, 2, 3; \quad k = (j + 1) \bmod 3, \quad l = (j + 2) \bmod 3] \tag{21}$$



16. ábra

* Ezt az esetet behatóan vizsgálja *Forrai* [86] cikkében.

háromszög-relációk. Ekkor $P_1P_2P_3$ súlyháromszög p_i oldalaira és a *cosinustétellel* kiszámított

$$\delta_j = \text{arc}\,(\hat{\mathbf{d}}_k, \hat{\mathbf{d}}_l) = \text{arc cos}\,\frac{p_j^2 - p_k^2 - p_l^2}{2p_kp_l} \tag{22}$$

$$[j = 1, 2, 3; \quad k = (j+1) \bmod 3, \quad l = (j+2) \bmod 3]$$

külső szögeire, egyszersmind az eredeti $S_1S_2S_3$ háromszög $l_j = \overline{S_kS_l} = |\mathbf{s}_k - \mathbf{s}_l|$ oldalainak a $\hat{Z}$ centrumból mért arc $(\hat{\mathbf{d}}_k, \hat{\mathbf{d}}_l)$ *látószögeire* felírható a

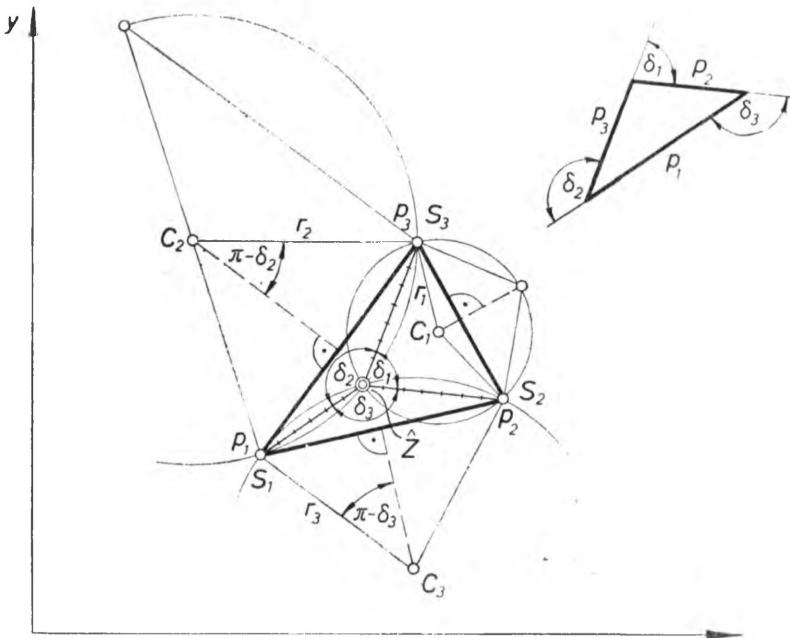
$$\sin \delta_1 : \sin \delta_2 : \sin \delta_3 = p_1 : p_2 : p_3 \tag{23}$$

sinustétel (16/b ábra).

A $\hat{\mathbf{z}}$ centrum ezek után a geodéziából ismert *hátrametszés* nevű szerkesztéssel, ill. a neki megfelelő számítással* adódik. Nevezetesen, az $l_j = \overline{S_kS_l}$ oldalakra rárajzoljuk *(17. ábra)* a

$$\mathbf{c}_j = \frac{1}{2}(\mathbf{s}_k + \mathbf{s}_l) + \frac{\text{ctg}\,\delta_j}{2}(\mathbf{s}_k - \mathbf{s}_l)_\perp \text{ középpontú**}, \tag{24a}$$

$$r_j = \frac{l_j}{2\cos\left(\delta_j - \dfrac{\pi}{2}\right)} = \frac{l_jp_kp_l}{4p_k^2p_l^2 - (p_j^2 - p_k^2 - p_l^2)^2} \text{ sugarú}, \tag{24b}$$



17. ábra

* L. *Forrai* [86] és pl. *Oltay—Rédey* [85].

** $(\mathbf{s}_k - \mathbf{s}_l)_\perp = [(b_k - b_l)\,\mathbf{i} - (a_k - a_l)\,\mathbf{j}] \perp [(a_k - a_l)\,\mathbf{i} + (b_k - b_l)\,\mathbf{j}] = (\mathbf{s}_k - \mathbf{s}_l)$.

δ_j látószögű látóköríveket (pontosabban közülük két jól, vagyis közel merőlegesen metsződőt), s ezek kimetszik a keresett $\hat{\mathbf{z}}$ centrumot.

Ugyanez egy másik hátrametszési számítással* *explicite* is előállítható, mégpedig

$$\hat{\mathbf{z}} = \frac{1}{C} \cdot \sum_{j=1}^{3} c_j \mathbf{s}_j \equiv \frac{1}{c_1 + c_2 + c_3} (c_1 \mathbf{s}_1 + c_2 \mathbf{s}_2 + c_3 \mathbf{s}_3) \tag{25}$$

$$[c_j = (\operatorname{ctg} \alpha_j - \operatorname{ctg} \delta_j)^{-1}, \quad C = \sum c_j, \quad \alpha_j = \operatorname{arc} (\mathbf{s}_k - \mathbf{s}_j, \ \mathbf{s}_l - \mathbf{s}_j)]$$

módon, vagyis a $c_j \mathbf{s}_j$ ($j = 1, 2, 3$) súlyozott pontthármas $\hat{\mathbf{z}}$ súlypontjaként.

Ha speciálisan a *súlyok egyenlők* (célszerűen egységnyiek),

$$p_1 = p_2 = p_3 = 1, \tag{26}$$

akkor — ellenőrizhetően**

$$\delta = \arccos \left(-\frac{1}{2}\right) = 120°, \quad \operatorname{ctg} \delta = -\frac{\sqrt{3}}{3}; \quad \mathbf{c}_j = \frac{1}{2}\left[(\mathbf{s}_k + \mathbf{s}_l) - \frac{\sqrt{3}}{3}(\mathbf{s}_k - \mathbf{s}_l)_\perp\right],$$

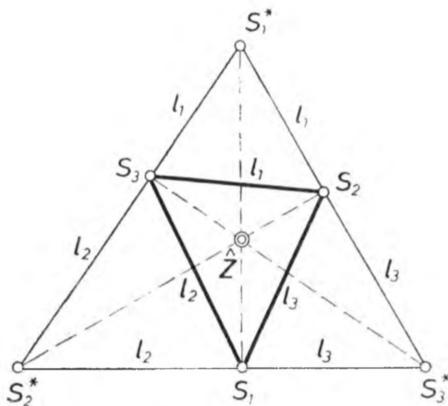
$$r_j = \frac{l_j}{\sqrt{3}}; \quad c_j = \left(\operatorname{ctg} \alpha_j + \frac{3}{\sqrt{3}}\right)^{-1}, \quad \hat{\mathbf{z}} = \frac{1}{C} \cdot \sum_{j=1}^{3} c_j \mathbf{s}_j, \tag{27}$$

az optimális távolságok és minimális összegük pedig

$$\hat{d}_j = \frac{2 l_k l_l \sin (60° + \alpha_j)}{\sqrt{3} \sqrt{l_k^2 + l_l^2 - 2 l_k l_l \cos (60° + \alpha_j)}}, \tag{28}$$

$$\hat{u} = \sum_{j=1}^{3} \hat{d}_j = \sqrt{\frac{1}{2} (l_1^2 + l_2^2 + l_3^2) + 2\sqrt{3} \cdot T},$$

ahol T az $S_1 S_2 S_3 \triangle$ területe. E speciális esetben a centrum *geometriai megszerkesztése* lényegesen egyszerűbb; ui. — igazolhatóan — az $S_1 S_2 S_3 \triangle$ oldalaira rárajzolt (l_j oldalhosszú) egyenlő oldalú háromszögek új S^* csúcspontjaiból a régi S_j csúcspontokba húzott $S_j^* S_j$ egyenesdarabok metszik ki a $\hat{Z}$ centrumot (*18. ábra*). Ha valamelyik $\alpha_j > 120°$, akkor az így nyert $\hat{Z}$ pont az $S_1 S_2 S_3 \triangle$-ön kívül esik, és nem minimumpont, vagyis nem centrum többé, hanem legtöbb-



18. ábra

* *Miller* [81].
** *Miller* [81].

ször a tompaszög csúcsa az (l. a *19. ábrát;* ott $\overline{S_1S_2} < \overline{S_1Z}$ és $\overline{S_3S_2} < \overline{S_3Z}$, tehát $\overline{S_1Z} + \overline{S_2Z} + \overline{S_3Z} > \overline{S_1S_2} + \overline{S_3S_2}$, vagyis S_2 a centrum).

III°. Négy adott pont. Igen egyszerűen nyerhető a $\hat{Z}$ centrumpont, ha történetesen

$$p_1 = p_3 \quad \text{és} \quad p_2 = p_4;$$

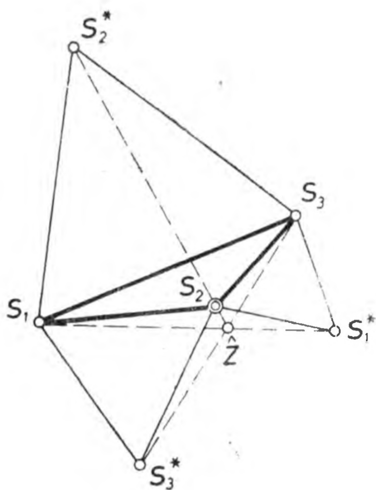
ekkor az $S_1S_2S_3S_4$ négyszög $\overline{S_1S_3} = l_1$, $\overline{S_2S_3} = l_2$ *átlóinak metszéspontja* szolgáltatja a $\hat{Z}$-t *(20. ábra)*. Ui. ekkor a

$$\text{Min}\,(p_1|\mathbf{z}-\mathbf{s}_1| + p_3|\mathbf{z}-\mathbf{s}_3|) = p_1(|\mathbf{s}_1-\mathbf{z}_{13}| + |\mathbf{z}_{13}-\mathbf{s}_3|) = p_1l_1, \quad (29a, b)$$

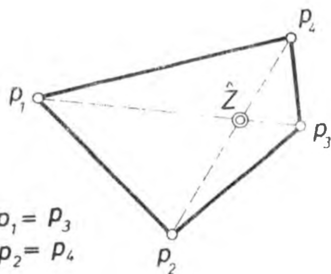
$$\text{Min}\,(p_2|\mathbf{z}-\mathbf{s}_2| + p_4|\mathbf{z}-\mathbf{s}_4|) = p_2|\mathbf{s}_2-\mathbf{z}_{24}| + |\mathbf{z}_{24}-\mathbf{s}_4| = p_2l_2,$$

s e két, a hozzátartozó átló mentén állandó s egyben minimális értékű függvény összege valóban az átlók metszéspontjában lesz minimális.

További, egzaktul megoldható esetek ismertetésére itt nincs terünk, hanem a szakirodalomra kell utalnunk.



19. ábra



20. ábra

δ) Az általános feladat közelítő megoldása (CVA)

I°. Centrum-vektoralgoritmus (CVA). A β) I°-beli tárgyalás során említettük már, hogy a $\hat{\mathbf{z}}$ centrum, vagyis a szigorúan konvex (8) célfüggvénynek a (11—12) irracionális egyenlettel mint szükséges és elégséges feltétellel (implicite) megállapított minimumhelye, *m > 4 és tetszőleges p_j súlyok esetén általában nem számítható ki egzakt módon, zárt alakban,* hanem csak közelítőleg, pl. *iterációval,* a (13) alatti általános elv szerint. Most éppen a szóban forgó iterációt kívánjuk gyakorlati numerikus számításra alkalmas alakban konkretizálni.

A (11) formula alapján — a k-adik iterált centrum, a $\hat{\mathbf{z}}^{(k)}$ felhasználásával — írható, hogy

$$\sum_j \hat{q}_j^{(k)}(\hat{\mathbf{z}}^{(k)} - \mathbf{s}_j) = \mathbf{u}(\hat{\mathbf{z}}^{(k)}) \neq \mathbf{0}. \tag{30a}$$

Ez — a (12) mintájára a $\hat{\mathbf{z}}^{(k)}$-ra explicite megoldva — a

$$\hat{\mathbf{z}}^{(k)} = \frac{1}{\hat{Q}^{(k)}}\mathbf{u}(\hat{\mathbf{z}}^{(k)}) + \frac{1}{\hat{Q}^{(k)}}\sum_j \hat{q}_j^{(k)}\mathbf{s}_j \equiv \frac{1}{\hat{Q}^{(k)}}\mathbf{u}(\hat{\mathbf{z}}^{(k)}) + \zeta(\hat{\mathbf{z}}^{(k)}) \tag{30b}$$

alakot, majd a (13) iterációs elv

$$\hat{\mathbf{z}}^{(k+1)} = \frac{1}{\hat{Q}^{(k)}}\sum_j \hat{q}_j^{(k)}\mathbf{s}_j \equiv \zeta(\hat{\mathbf{z}}^{(k)}) \tag{31a}$$

részletes alakjának figyelembevételével éppen a keresett

$$\boxed{\hat{\mathbf{z}}^{(k+1)} = \hat{\mathbf{z}}^{(k)} - \frac{1}{\hat{Q}^{(k)}}\sum_j \hat{q}_j^{(k)}(\hat{\mathbf{z}}^{(k)} - \mathbf{s}_j)} \tag{31b}$$

$$\left[\hat{q}_j^{(k)} = p_j/|\hat{\mathbf{z}}^{(k)} - \mathbf{s}_j|, \quad \hat{Q}^{(k)} = \sum_j \hat{q}_j^{(k)}; \; k = 0, 1, 2, \ldots, n; \; \hat{\mathbf{z}}^{(0)} \text{ felvéve}\right]$$

centrum-*vektoralgoritmust* (CVA) adja. E formula új keletű, nevezetesen *H. Kuhn* amerikai professzornak, a nemlineáris programozás egyik megalapozójának 1963. évi budapesti előadásából [79], valamint a vele egyidejűleg közölt *Hosszú—Heinemann*-féle figyelemre méltó cikkből [80] ismeretes. A (31a) és (31b) ekvivalenciája az előzőkből nyilvánvaló, de közvetlen algebrai átalakítással is megmutatható, mégpedig

$$\hat{\mathbf{z}}^{(k+1)} = \hat{\mathbf{z}}^{(k)} - \frac{1}{\hat{Q}^{(k)}}\sum_j \hat{q}_j^{(k)}(\hat{\mathbf{z}}^{(k)} - \mathbf{s}_j) =$$

$$= \frac{1}{\hat{Q}^{(k)}}\sum_j \hat{q}_j^{(k)}(\hat{\mathbf{z}}^{(k)} - \hat{\mathbf{z}}^{(k)} + \mathbf{s}_j) = \frac{1}{\hat{Q}^{(k)}}\sum_j \hat{q}_j^{(k)}\mathbf{s}_j \tag{31c}$$

módon.

A $\hat{\mathbf{z}}^{(k+1)}$ közelítő centrumot egyébként a (31a) a $\hat{q}_j^{(k)}\mathbf{s}_j$ ($j = 1, 2, \ldots, m$) *súlyozott pontrendszer súlypontjaként* állítja elő; ugyanígy a (31b) is, de (a **0** helyett) a $\hat{\mathbf{z}}^{(k)}$-ból mint origóból felrakott vektorokkal dolgozva, vagyis

$$\hat{\mathbf{z}}^{(k+1)} - \hat{\mathbf{z}}^{(k)} = \frac{1}{\hat{Q}^{(k)}}\sum_j \hat{q}_j^{(k)}(\mathbf{s}_j - \hat{\mathbf{z}}^{(k)}) \tag{31d}$$

felfogásban. Ez a fenti *iterációs lépések grafikus lebonyolítását* is megvilágítja, hiszen a (31d) bal oldali vektora a jobb oldali $\sum$-nak megfelelő vektorpoligon *záróoldala.*

II°. Az algoritmus kezdete és vége (CVA_0, CVA_{n+1}). A (31*b*) eljárás $\hat{\mathbf{z}}^{(0)}$ *indító (nulladik) közelítéseként* szokás szerint az adott $p_j\mathbf{s}_j$ súlyozott pontrendszer $\mathbf{z}_s$ *súlypontját* választjuk, azaz CVA_0:

$$\hat{\mathbf{z}}^{(0)} = \mathbf{z}_s \equiv \frac{1}{P}\sum p_j\mathbf{s}_j \quad (P = \sum_j p_j)\,. \tag{32a}$$

Említésre méltó, hogy a $\mathbf{z}_s$ súlypont a

$$v(\mathbf{z}) \equiv \sum_j p_j d_j^2 = \sum_j p_j(\hat{\mathbf{z}} - \mathbf{s}_j)^2 = \text{Min!} \tag{32b}$$

szabad szélsőérték-feladatnak, szavakkal *a súlyozott távolságnégyzetek (!) összege minimálási feladatának a megoldása* (ti. minimumhelye, lévén ott ($j = 1, 2, \ldots,$ m-mel)

$$\mathbf{v}(\mathbf{z}_s) \equiv \mathbf{grad}\, v(\mathbf{z})\Big|_{\mathbf{z}_s} = 2\Big[P\mathbf{z}_s - \sum_j p_j\mathbf{s}_j\Big] = \mathbf{0},$$
$$Q_v \equiv d\mathbf{z}^*\mathbf{V}(\mathbf{z})d\mathbf{z} = 2Pd\mathbf{z}^*\mathbf{E}d\mathbf{z} = 2Pd\mathbf{z}^2 > 0, \text{ ha } d\mathbf{z} \neq \mathbf{0} \text{ (def. +)} \tag{32c, d}$$

és a minimum:

$$v(\mathbf{z}_s) \equiv \sum_j p_j(\mathbf{s}_j - \mathbf{z}_s)^2 = \sum_j p_j\mathbf{s}_j^2 - P\mathbf{z}_s^2 \quad (\textit{Steiner}\text{-tétel}). \tag{32e}$$

Láthatóan egzakt megoldás van, az m-től és a p_j-ktől függetlenül! E klasszikus feladat — rokon vonásai ellenére — *élesen megkülönböztetendő* a bennünket foglalkoztató, újabb keletű centrumfeladattól, tehát a *súlyozott távolságok (!) összegének minimálási feladatától.* Ezt annál inkább hangsúlyoznunk kell, mert e feladatok alkalmazási területén még a közelmúltban is előfordult a két feladat összekeverése, pl. a centrumfeladatra vezető műszaki-gazdasági problémának (a $\hat{\mathbf{z}}$ centrum helyett) a $\mathbf{z}_s$ súlyponttal való „megoldása".

Szóljunk most *az algoritmus befejezéséről!* A (31*b*), vagyis a (31*a*) iteráció lépéseinek $n + 1$ számát úgy választjuk meg, hogy CVA_{n+1}:

$$\delta^{(n+1)} \equiv |\hat{\mathbf{z}}^{(n+1)} - \hat{\mathbf{z}}^{(n)}| = \left|\frac{1}{\hat{Q}^{(n)}}\sum_j \hat{q}_j^{(n)}(\hat{\mathbf{z}}^{(n)} - \mathbf{s}_j)\right| < 10^{-N}\cdot|\hat{\mathbf{z}}^{(n+1)}| \equiv \varepsilon \tag{33a}$$

legyen, ahol $N = 4 \sim 5$ rendszerint bőven elegendő, mert ekkor a $\delta^{(n+1)}$ abszolút hiba kisebb, mint az utolsó centrumközelítő $\hat{\mathbf{z}}^{(n+1)}$ vektor hosszának tíz-, ill. százezred része. Ugyanez geometriailag a (33*a*)-beli $\sum$-nak megfelelő *vektorpoligon gyakorlati záródását* jelenti. Ilyen csekély abszolút hiba mellett méltán tekinthetjük a $\hat{\mathbf{z}}^{(n+1)}$-et *a* $\hat{\mathbf{z}}$ *elméleti centrum numerikus értékének,* azaz — a (31*a*)-val —

$$\hat{\mathbf{z}}^{(n+1)} \approx \hat{\mathbf{z}} = \lim_{n\to\infty}\sum_j \frac{\hat{q}_j^{(n)}}{\hat{Q}^{(n)}}\mathbf{s}_j \neq \mathbf{s}_l\,. \tag{33b}$$

Iterációs algoritmusunk nyilván *nem vonatkozik a* $\hat{\mathbf{z}} = \mathbf{s}_l$ *különleges esetre,*

hiszen ekkor a $\hat{q}_i = p_i/|\hat{\mathbf{z}} - \mathbf{s}_i|$-nek és vele együtt a $\hat{Q} = \sum_j \hat{q}_j$-nek nincs értelme. Az iteráció konvergenciaviszonyaira később még visszatérünk.

III°. A z algoritmus mint gradiensmódszer. Figyelemre méltó körülmény, hogy a (31*b*) iteratív algoritmus a nemlineáris programozásból jól ismert gradiensmódszerek* egyikeként is felfogható. Ugyanis — mint a gradiensmódszereknél

$$\hat{\mathbf{z}}^{(k+1)} = \hat{\mathbf{z}}^{(k)} - \lambda_k \mathbf{u}_k \quad \left[\mathbf{u}_k \equiv \mathbf{u}(\hat{\mathbf{z}}^{(k)}) \equiv \mathbf{grad}\, u(\mathbf{z})\Big|_{\hat{\mathbf{z}}^{(k)}}, \ \lambda_k = ?\right] \tag{34a}$$

általában — alakban keresve az eljárás *rekurzív formuláját*, ezt a (31*b*)-vel és a (30*a*)-val összevetve, a keresett λ_k-ra a

$$\lambda_k = \frac{1}{\hat{Q}^{(k)}} > 0 \quad \left[\hat{Q}^{(k)} = \sum_j p_j \Big/ |\hat{\mathbf{z}}^{(k)} - \mathbf{s}_j|, \quad k = 0, 1, \ldots, n\right] \tag{35}$$

értéket kapjuk.

Mivel az $\mathbf{u}_k$ gradiensvektor az $u_k \equiv u(\hat{\mathbf{z}}^{(k)})$ skalárú $\hat{\mathbf{z}}^{(k)}$ pontból (az ottani szintvonalra merőleges irányban) az $u_k < u$ skalárú szintvonalak felé mutat, ezért biztosan fennáll $u_{k+1} < u_k$, ha a $\hat{\mathbf{z}}^{(k+1)}$ pont az $u(\hat{\mathbf{z}}_k) = u_k$ zárt szintvonal $\zeta = \hat{\mathbf{z}}^{(k)} + \lambda \mathbf{u}_k$ egyenes menti húrjának belső pontja (s vele a zárt szintvonal határolta konvex tartománynak is belső pontja) marad. Keressük ezért a szóban forgó húr ismeretlen $\mathbf{z}^{(k)} = \hat{\mathbf{z}}^{(k)} - \mu \mathbf{u}_k$ végpontját (ismert végpontja nyilván $\hat{\mathbf{z}}^{(k)}$), mégpedig közelítő számítással! E végből — *Hosszú* [22] nyomán — írható, hogy

$$u(\mathbf{z}^k) \equiv \sum_j p_j |\mathbf{z}^{(k)} - \mathbf{s}_j| = \sum_j p_j \sqrt{(\mathbf{z}^{(k)} - \mathbf{s}_j)^2} = \sum_j p_j \sqrt{(\hat{\mathbf{z}}^{(k)} - \mathbf{s}_j - \mu \mathbf{u}_k)^2} =$$

$$= \sum_j p_j \sqrt{\alpha\mu^2 + \beta_j \mu + \gamma_j} = \sum_j p_j \sqrt{\gamma_j}\,[1 + (\alpha'_j \mu^2 + \beta' \mu)]^{1/2} \equiv U(\mu) =$$

$$= V(\nu) \equiv \sum_j p_j \sqrt{\gamma_j}\left[1 + \frac{1}{2}(\alpha'_j \nu^2 + \beta'_j \nu)\right] = \sum_j p_j \sqrt{\gamma_j} \equiv u(\hat{\mathbf{z}}^{(k)}) \tag{36a}$$

$$[\alpha = \mathbf{u}_k^2 > 0, \quad \beta_j = -2\mathbf{u}_k^*(\hat{\mathbf{z}}^{(k)} - \mathbf{s}_j), \quad \gamma_j = (\hat{\mathbf{z}}^{(k)} - \mathbf{s}_j)^2 > 0, \quad \alpha'_j = \alpha/\gamma_j, \quad \beta'_j = \beta_j/\gamma_j;$$

$$U(0) = V(0); \quad U(\lambda) < V(\lambda), \quad \lambda > 0; \quad U(\mu) = V(\nu), \quad \mu \gtreqq \nu],$$

ahonnan — a $\nu = 0$ megoldás mellőzésével —

$$\mu \gtreqq \nu = -\sum_j p_j \beta_j \Big/ \sqrt{\gamma_j} : \alpha \sum_j p_j \Big/ \sqrt{\gamma_j} =$$

$$= +2\mathbf{u}_k^* \sum_j \hat{q}_j^{(k)}(\hat{\mathbf{z}}^{(k)} - \mathbf{s}_j) : \mathbf{u}_k^2 \sum_j \hat{q}_j = \frac{2}{\hat{Q}^{(k)}} > 0. \tag{36b}$$

A (λ_k paraméterű) $\hat{\mathbf{z}}^{(k+1)}$ iterációs pont a ($\lambda = 0$ paraméterű) $\hat{\mathbf{z}}^{(k)}$ kezdőpontú és a ($\mu \gtreqq \nu = 2\lambda_k$ paraméterű) $\mathbf{z}^{(k)}$ végpontú húrnak *közel felező* s így biztosan belső pontja, tehát valóban igaz (mégpedig $\gamma_j = (\hat{\mathbf{z}}^{(k)} - \mathbf{s}_j)^2 > 0$-sal), hogy

$$u_{k+1} \equiv u(\hat{\mathbf{z}}^{(k+1)}) < u(\hat{\mathbf{z}}^{(k)}) \equiv u_k \quad [\hat{\mathbf{z}}^{(k+1)} \neq \hat{\mathbf{z}}^{(k)}], \quad \text{q.e.d.} \tag{37}$$

A (34*a*, *b*) iteráció tehát *javító* jellegű, mert az $u(\mathbf{z}_S) \equiv u_0 < u_1 < \ldots < u_k < u_{k+1} < \ldots$ szigorúan *monoton csökkenő* értéksorozatot szolgáltat az $u(\mathbf{z})$ célfüggvényre. E sorozat *alsó korlátját* nyilván az $\hat{u} \equiv \min u(\mathbf{z})$ képezi. Ilyen skalárú, zárt szintvonal nem létezhet, mert

* L. bővebben az 1. 2. részben.

a vázolt gradiens irányú, húrfelező eljárással $u < \hat{u}$ skalár volna nyerhető, ami lehetetlen. Ily módon az $\hat{u}$ skalárú, zárt szintvonal egyetlen pontra, nyilván a keresett $\hat{\mathbf{z}}$ minimumpontra, a gradiens zérushelyére, a centrumra zsugorodik. Alsó korláttal rendelkező, monoton csökkenő sorozat *konvergens,** tehát a mi u_k sorozatunk is az.

IV°. Egyes konvergenciakérdésekről. Az előbbi szemléletes tárgyalás, mely a $\hat{\mathbf{z}}^{(k+1)}$ centrumközelítést a konvex tartományt határoló $u(\mathbf{z}) = u_k$ zárt szintvonal $\zeta = \hat{\mathbf{z}}^{(k)} + \lambda \mathbf{u}_k$ $(0 \leq \lambda < \nu \leq u)$ húrjának közelítő felezőpontjaként mutatta be, nyilván megengedi azt a gradiensmódszerekre egyébként is jellemző megállapítást, hogy *a (34a, b) iteráció nem túl érzékeny a $\lambda_k \mathbf{u}_k$ lépésvektor irányára és nagyságára.* Ezek kis mértékű módosítása nyilván nem téríti el túlságosan a $\mathbf{z}^{(k+1)}$ pontot az említett kb. húrfelező helyzettől, és még kevésbé téríti ki azt az $u(\mathbf{z}) = u_k$ zárt szintvonal belsejéből. Ilyen kis módosítás tehát nem érinti az $u(\hat{\mathbf{z}}^{(k)})$ sorozat monoton csökkenését s ezen keresztül konvergenciáját. Az iteráció eme rugalmassága numerikus, mégpedig *gépi és grafikus számítás során is észlelhető* a gyakorlatban**.

Az u_k sorozatnak a konvergencia szempontjából fontos monoton csökkenő jellege *általánosabb,* a súlyozott távolsághatványok (!) összegének minimálására *Vincze* [25] által ajánlott *módszerrel* is igazolható. Figyelembe véve a $\hat{\mathbf{z}}^{(k+1)}$-nek a (31*d*)-nél említett súlyponti felfogását, valamint a (32*a*) súlypont (32*b*) szerinti (súlyozott távolságnégyzet-összeget minimáló) tulajdonságát, írható, hogy

$$u(\hat{\mathbf{z}}^{(k)}) = \sum_j p_j |\hat{\mathbf{z}}^{(k)} - \mathbf{s}_j| = \sum_j \hat{q}_j^{(k)} (\hat{\mathbf{z}}^{(k)} - \mathbf{s}_j)^2 > \sum_j \hat{q}_j^{(k)} (\hat{\mathbf{z}}^{(k+1)} - \mathbf{s}_j)^2 =$$

$$= \sum_j \hat{q}_j^{(k)} [(\hat{\mathbf{z}}^{(k)} - \mathbf{s}_j) + (\hat{\mathbf{z}}^{(k+1)} - \mathbf{s}_j) + (\hat{\mathbf{z}}^{(k)} - \mathbf{s}_j)]^2 =$$

$$= \sum_j p_j |\hat{\mathbf{z}}^{(k)} - \mathbf{s}_j| + 2 \sum_j p_j |\hat{\mathbf{z}}^{(k+1)} - \mathbf{s}_j| - 2 \sum_j p_j |\hat{\mathbf{z}}^{(k)} - \mathbf{s}_j| + \mathrm{M}^2 =$$

$$= 2u(\hat{\mathbf{z}}^{(k+1)}) - u(\hat{\mathbf{z}}^{(k)}) + \mathrm{M}^2, \tag{38a}$$

amelyből már következik az

$$u(\hat{\mathbf{z}}^{(k+1)}) < u(\hat{\mathbf{z}}^{(k)}) \quad [\hat{\mathbf{z}}^{(k)} \neq \hat{\mathbf{z}}^{(k+1)}] \tag{38b}$$

monoton csökkenés; ez az $\hat{u} = \min u(\mathbf{z})$ alsó korlát létezése miatt már a konvergenciát is biztosítja, q.e.d.

Végül itt teszünk említést az $u = u(\mathbf{z})$ skalármező $u(\mathbf{z}) = u_k$ szintvonalainak ortogonális trajektóriáiról, az ún. *esésvonalakról,* a gradiensvektorok érintőgörbéiről. Ezek differenciálegyenlete nyilván

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\dfrac{\partial u}{\partial y}}{\dfrac{\partial u}{\partial x}} = \frac{P(x,y)}{Q(x,y)}, \quad \text{azaz} \quad P(x,y)\,dx - Q(x,y)\,dy = 0. \tag{39a}$$

Látható, hogy az $\mathbf{u}(\mathbf{z})$ gradiens-vektor $\hat{\mathbf{z}}$ zérushelye, vagyis a

$$P(\hat{x}, \hat{y}) = Q(\hat{x}, \hat{y}) = 0 \tag{39b}$$

sajátságú $\hat{\mathbf{z}} = (\hat{x}, \hat{y})$ pont a differenciálegyenlet *szinguláris pontja.*

---

* L. pl. *Stachó:* Felsőbb mennyiségtan.

** Utalhatunk a miskolci NME, a budapesti ÉKME és BFEM keretében végzett ilyen számítások tapasztalataira.

V°. Az algoritmus gépi programozása. A centrumprobléma folyton növekvő műszaki-gazdasági alkalmazásai érthetővé teszik, hogy több intézményben megpróbálkoztak a (31*b*) iteratív algoritmus gépesítésével.

A hazaiak közül tegyünk említést a *Budapest Főváros Elektromos Művei* (BFEM)-nél folyó figyelemre méltó kísérletekről! Az ottani műszaki fejlesztési osztály kutatói — a szerző közreműködésével — a centrumprobléma több, nagy fontosságú elektromos hálózati vonatkozását tárták fel,* s az ilyen feladatok numerikus megoldásának megkönnyítésére lépéseket tettek a (31*b*) gépesítésére.

Első lépésként a (31*b*) centrum-vektoralgoritmus (CVA) *elvi tömbvázlata* készült el, amelyet — mint igen tanulságost — ide iktatunk, magyarázó széljegyzetekkel (l. a 3. mellékletet; 310. o.).

Második lépésként a tömbvázlat nyomán megszületett a (31*b*) iteratív algoritmus *programozása* az *ALGOL-60* nevű nemzetközi programozási nyelven (l. a 4. mellékletet). Nincs terünk ismertetni iterációnk ezen ALGOL-programjának részleteit, csupán a gépi programlap másolatát mutatjuk be, tanulságul (1. melléklet). Megjegyezzük, hogy ez az ALGOL-program az egyik hazai ELLIOTT-803 elektronikus digitális számítógépen, fordítóprogram közbeiktatásával nyert numerikus kipróbálást, kedvező tapasztalattal. Ezt az alábbi számpélda gépi megoldásával szemléltetjük.

VI°. Tíz fogyasztóállomás ellátóközpontja. Legyen adva $m = 10$ állomás (pl. gyárüzem, település), jellemezve $\mathbf{s}_j = (a_j, b_j)$ helyzetvektorukkal és p_j fogyasztásukkal (pl. energiában, anyagban). Jelöljük ki az optimális ellátó központ $\hat{\mathbf{z}}$ helyét, a minimális össz-szállítás (pl. t · km, kWó · km) követelménye alapján, egyenes szállítópályák (pl. utak, vasutak, vezetékek) feltételezésével, valamint $10^{-N}.|\hat{\mathbf{z}}|$ hibakorláttal ($N = 3$—4).

Adatok:

j 1—5	a_j	b_j	p_j	a_j	b_j	p_j	j 6—10
1	20	90	20	60	50	40	6
2	80	90	20	20	40	20	7
3	50	80	10	30	20	40	8
4	10	70	30	90	20	20	9
5	90	60	10	10	10	10	10

* L. Bővebben a BFEM „A centrumprobléma elektromos hálózati alkalmazásai" c. tanulmányát (1966).

A súlypont mint *nulladik* centrumközelítés:

$$\hat{\mathbf{z}}^{(0)} = \mathbf{z}_s = (x_s, y_s) = \sum_{j=1}^{10} p_j(a_j, b_j) \Big/ \sum_{j=1}^{10} p_j =$$

$$= [20 \cdot (20, 90) + \ldots + 10 \cdot (10, 10)]/220 = (43,636364;\ 50,909091).$$

Az *első* közelítés a (31*b*) rekurzív formula felhasználásával:

$$\hat{\mathbf{z}}^{(1)} = \hat{\mathbf{z}}^{(0)} - \sum_{j=1}^{10} \frac{p_j}{\hat{d}_j} (\mathbf{z}^{(0)} - \mathbf{s}_j) \Big/ \sum_{j=1}^{10} \frac{p_j}{\hat{d}_j} =$$

$$= (x_s, y_s) - \left[\frac{20}{\sqrt{23,6^2 \ldots + 39,0^2 \ldots}} (23,636364; -39,090909) + \ldots\right] :$$

$$: \left(\frac{20}{\sqrt{23,6^2 \ldots + 39,0^2 \ldots}} + \ldots\right) = (44,350977; -49,813137).$$

Ehhez hasonlóan végezhetők a további iterációs lépések. Ennyiből is látható azonban, hogy milyen tömegű elemi műveletet (nevezetesen összeadást, kivonást, szorzást, osztást és gyökvonást) igényel az elvileg egyszerű számítás, s milyen fárasztó lenne a hagyományos módon (kézzel, logarléccel vagy akár elektromechanikus számológéppel) elvégezni. Szerencsére rendelkezésünkre áll a feladatnak az előbb bemutatott ALGOL-program alapján, fordító programos ELLIOTT-803-as gépen lebonyolított számítása*. Ebből mutatjuk be a $k = 0, 1, 2, \ldots, 10, 11$ sorszámú $\hat{\mathbf{z}}^{(k)}$ közelítő centrumok koordinátáit (l. a táblázatot; 299. o.). Az utolsó közelítést már *a centrum numerikus értékének* minősítjük, azaz

$$\hat{\mathbf{z}} \approx \hat{\mathbf{z}}^{(11)} = (45,524810;\ 49,468277),$$

lévén — a (33*a*) szerint — még elég durva számítással is

$$\delta^{(11)} = |\hat{\mathbf{z}}^{(11)} - \hat{\mathbf{z}}^{(10)}| \approx \sqrt{0,0131^2 + 0,0024^2} < 0,014 \approx 2.10^{-4} \cdot \sqrt{2}.50,$$

vagyis a *hiba* nem nagyobb mint az eredményvektor hosszának kb. ötezredrésze. Ezzel a feladat megoldását befejezettnek tekintjük.

* L. az említett BFEM tanulmány III. fejezetében *Szaniszló Mihály* kolléga gépi számítását.

CENTRUMKÖZELÍTÉSI TÁBLÁZAT

SÚLYPONT

43.636364, 50.909091 — $\hat{\mathbf{z}}^{(0)} \equiv \mathbf{z}_s$;

44.350977, 49.813137 — $\hat{\mathbf{z}}^{(1)}$

44.762557, 49.496190 — $\hat{\mathbf{z}}^{(2)}$

45.016629, 49.423075 — $\hat{\mathbf{z}}^{(3)}$

45.183182, 49.418453 — $\hat{\mathbf{z}}^{(4)}$

45.296191, 49.429317 — $\hat{\mathbf{z}}^{(5)}$

45.374204, 49.441077 — $\hat{\mathbf{z}}^{(6)}$

45.428512, 49.450499 — $\hat{\mathbf{z}}^{(7)}$

45.466474, 49.457424 — $\hat{\mathbf{z}}^{(8)}$

45.493068, 49.462358 — $\hat{\mathbf{z}}^{(9)}$

45.511719, 49.465836 — $\hat{\mathbf{z}}^{(10)}$

45.524810, 49.468277 — $\hat{\mathbf{z}}^{(11)} \approx \hat{\mathbf{z}}$

A CENTRUMVEKTOR
$\hat{x}$ KOORDINÁTÁJA:
45.524810
A CENTRUMVEKTOR
$\hat{y}$ KOORDINÁTÁJA:
49.468277
END OF PROGRAM

IRODALOMJEGYZÉK

1. *Krekó—Bacskay:* Bevezetés a lineáris programozásba. — Közgazd. és Jogi Könyvkiadó, Budapest, 1957.
2. *Krekó Béla:* Lineáris programozás. — Közgazd. és Jogi Könyvkiadó, Budapest, 1962. (Bő irodalomjegyzék!)
3. *S. I. Gass:* Linear Programming. — Mc Graw-Hill, New York, 1958.
4. *Krelle—Künzi:* Lineare Programmierung. — Verl. Industr. Organisation, Zürich, 1958.
5. *L. V. Kantorovics:* Ekonomicseszkij raszcset. — Izd. Akad. Nauk., Moszkva, 1957.
6. *S. Vajda:* Readings in Linear Programming. — Pittmann, London, 1958.
7. *Jugyin—Goldstein:* Zadacsi i metodü linyejnovo programmirovanyija. — Izd. Szovjetszkoje Radio, Moszkva, 1962. (A „magyar módszer"-t is ismerteti!)
8. *Kuhn—Tucker:* Linear Inequalities and Related Systems. — Ann. Math. Studies, Vol. 38.
9. *Arrow—Hurwicz—Uzawa:* Studies in Linear and Nonlinear Programming. — Stanford University Press, California, 1958.
10. *A. Vazsonyi:* Scientific Programming in Business and Industry. — John Wiley, New York, 1958.
11. *H. M. Wagner:* A Camparison of the Original and Revised Simplex Methods. — Operational Research, Vol. 5., No. 3. (1957).
12. *B. Korda:* Ucebnice lineárniho programováni. — Stat. Nakl. Techn. Lit., Praha, 1962.
13. *J. Egerváry:* Bemerkungen zum Transportproblem. — MTW-Mitteilung, No 5, 1958.
14. *Dr. Kádas Kálmán:* Hozzászólás Fazekas Ferenc „Áttekintés a matrixszámítás mérnöki alkalmazásairól" c. előadásához. — ÉKME Tud. Közl.
15. *Barankin—Dorfman:* On Quadratic Programming. — University of California Publication in Statistics, 2 (1958).
16. *H. Markowitz:* The Optimization of a Quadratic Function Subject to Linear Constraints. — Naval Research Logistics Quarterly, 3 (1956).
17. *Frank—Wolfe:* An Algorithm for Quadratic Programming. — Naval Research Logistics Quarterly, 3 (1956).
18. *P. Wolfe:* The Simplex Method for Quadratic Programming. — Rand Report P-1205, Santa Monica, California, 1957.
19. *Kuhn—Tucker:* Nonlinear Programming. — Proceedings of the Second Berkeley Symposium on Mathematical Statistics and Probability, 1951.
20. *E. M. L. Beale:* On Minimizing a Convex Function Subject to Linear Inequalities. — Journal of the Royal Statistical Society (Ser. B) 17 (1955).
21. *C. Hildreth:* A Quadratic Programming Procedure. — Naval Research Logistics Quarterly, 4 (1957)
22. *R. E. Gomory—W. J. Baumol:* Integer Programming and Pricing. — Econometrica Vol. 28, No. 3 (1960).
23. *G. B. Dantzig:* On the Significance of Solving Linear Programming Problems with Some Integer Variables. — (Ditto) The RAND Corporation, Paper P-1486, Sept., 1958.
24. *H. M. Markowitz—A. S. Mann:* On the Solution of Discrete Programming Problems. — Econometrica, Vol. 25, Jan. 1957.
25. *R. E. Gomory:* Outline of an Algorithm for Integer Solutions to Linear Programs. — Bulletin of the American Mathematical Society, Vol. 64, Sept. 1958.

26. *R. E. Gomory:* An Algorithm for the Mixed Integer Problem. — Paper P. — 1885, Febr. 1960, RAND Corporation Report.
27. *Kuhn:* The Hungarian Method for the Assignment Problem. — Naval Res. Logistics Quarterly, Vol. 2 (1955) S. 88—97.
28. *H. W. Kuhn:* The Travelling-Salesman Problem. — Proc. of the 6th Symposium in Applied Math., New York, 1956.
29. *W. Krelle:* Ganzzahlige Programmierung. Theorie und Anwendungen in der Praxis. — Unternehmensforschung 2 (1958) 161—175.
30. *W. Dinkelbach—F. Steffens:* Gemischt ganzzahlige lineare Programme zur Lösung gewisser Entscheidungsprobleme. — Unternehmensforschung, Band 5 (1961), Heft 1, S. 3—14.
31. *Fazekas Ferenc:* Matematika I. (Lineáris algebra). — Szakmérnöki jegyzet, Mérn. Továbbk. Int., Budapest, 1961.
32. *Fazekas Ferenc:* Matematika II. (Matrixszámítás, A lineáris programozás bevezető része, stb.) — Szakmérnöki jegyzet, Mérn. Továbbk. Int., Budapest, 1962.
33. *Fazekas Ferenc:* Matematika III. (A lineáris programozás szimplex módszere). — Szakmérnöki jegyzet, Mérn. Továbbk. Int., 1963.
34. *Fazekas Ferenc:* *n*-dimenziós vektoralgebra (lineáris és euklidesi terek). — A sorozat Vektoralgebra c. kötetének 2. kiadása, 4. §.; 1963. (Itt F. jellel hivatkozunk rá!)
35. *Fazekas Ferenc:* Gyárüzemek optimális telephelykiválasztása (3—4. rész). — Ipari munka, 1962.
36. *Fazekas Ferenc:* Mellékletek „A lineáris programozás matematikai segédeszközei és módszerei" c. előadássorozathoz. — ÉKME programozási tanfolyama, 1962—63.
37. *F. Fazekas:* Recoursing Formulas for Mathematical Programming. — Bolyai Társulat Kollokviuma, 1963.
38. *F. Fazekas:* Algorithmen zu mathematischen Programmierungsproblemen. — DDR. Mat. Társ. Tud. Ülése, Weimar, 1963.
39. *I. M. Gelfand:* Előadások a lineáris algebráról. (Ford. oroszból). — Akadémiai Kiadó, Budapest, 1955.
40. *Jándy Géza:* Kvadratikus programozás a közlekedésben. — Közl. tud. Koll., 1961; ÉKME Tud. Közl.
41. *Fazekas Ferenc:* A matematikai programozás Lagrange-feladatai és más speciális kérdései, műszaki vonatkozásokkal. — II. Kibernetikai Konferencia, Budapest, 1964.
42. *Fazekas Ferenc:* Matematikai programozás. — Előadássorozat a Mérnöki Továbbképző Intézetben, 1964.
43. *F. Fazekas:* Über nichtlineare, besonders quadratische Programmierung, in Verbindung gewisser elektrischer Netze. — 5. Verkehrswiss. Tage, Dresden, 1964.
44. *G. B. Dantzig:* Linear Programming and Extensions. — Princeton University, New Jersey, 1963.
45. *F. Fazekas:* Beiträge zu gewissen mathematischen Optimierungsproblemen. — Jahrestagung der Math. Gesell. d. DDR, Karl-Marx-Stadt, 1964.
46. *Fazekas Ferenc:* A matematikai programozás speciális módszerei és problémái. — Előadássorozat a Mérnöki Továbbképző Intézetben, 1964. őszén.
47. *F. Fazekas:* Lagrangesche Aufgaben und rekursive Verfahren in der mathematischen Programmierung. — Wiss. Tagung über Math. u. Kybernetik, Berlin, 1964.
48. *Fazekas Ferenc:* Adalékok a lineáris, az integer, a kvadratikus programozáshoz és közlekedési vonatkozásaikhoz. — Kand. disszertáció.
49. *G. B. Dantzig:* General convex objective forms. — Rand. Corp. P-1664, Santa Monica, 1959.
50. *G. B. Dantzig:* New directions in mathematical programming. — Rand. Corp. P-1646, Santa Monica, 1959.
51. *J. B. Dennis:* Mathematical programming and electrical networks. — Wiley, New York, 1959.
52. *J. Farkas:* Über die Theorie der einfachen Ungleichungen. — J. f. Reine u. Angew. Math. 124, 1902.
53. *Fazekas F.:* Fejezetek a közlekedési operációkutatásból. — Mérn. Továbbk. Int., Bpest, 1965.
54. *Fazekas F.:* Matrixalgoritmusok a matematikai programozásban. — ÉKME Tud. Közl., Bpest, 1965.

55. *Künzi—Krelle:* Nichtlineare Programmierung. — Springer, Berlin, 1962.
56. *M. Peuchot:* Research in convex program solvig. — Sec. Int. Conf. on Op. Res., Aix-en-Provence, 1960.
57. *R. W. Shepard:* Nonlinear programming 1—2. — Qual. u. Op. Res., 1960.
58. *M. Slater:* Lagrange multiplier revisited: A contribution to non-linear programming. — Rand Corp. RM-676, Santa Monica, 1951.
59. *Thrall:* Some results in nonlinear programming I—II. Rand Corp. RM-909—935, Santa Monica, 1952.
60. *St. Vajda:* Mathematical programming. — Wesley, London, 1961.
61. *A. Vázsonyi:* Optimizing a function of additively separated variables etc. — US Departm. of Comerce, 1955.
62. *J. Warga:* Convex minimization problems I—III. — Res. and Adv. Devel. Division, Wilmington (Mass., 1959).
63. *Ph. Wolfe:* Recent developments in nonlinear programming I. — Rand Corp. P-2063, Santa Monica, 1960.
64. *G. Zoutendijk:* Studies in nonlinear programming. — Kon. Shell-Lab. Amsterdam, 1957.
65. *Zuhovickij—Avdejeva:* Linejnoje i vüpukloje programirovanije. — Izd. Nauka, Moszkva, 1964.
66. *A. Lichnerovicz:* Lineare Algebra und lineare Analysis. — Deutsch Verl. d. Wiss., Berlin, 1956.
67. *Fazekas F.:* Vektoranalízis. — M. M. Gy. B.-I—II—III. kt., 3. bőv. kiadás, Tankönyvkiadó, Bpest, 1965.
68. *M. R. Hestenes—E. Stiefel:* Method of Conjugate Gradients for Solving Linear Systems. — Journal of Research of the National Bureau of Standards 49 (1952).
69. *Jándy Géza:* A szállítástervezés elemző módszerei. — Jegyzet, KÖZDOK, 1960.
70. *L. Collatz:* Optimierung und Approximation. — III. IKM, Weimar, 1965.
71. *Zuhovickij—Poljak—Primak:* Algorifm dlya resenyija zadacsi vüpuklovo csebüsevszkovo priblizsenyija. — DAN SzSzSzR 151, No 1 (1963).
72. *L. Collatz:* Funktionalanalysis und numerische Mathematik. — Springer Berlin, 1964.
73. *F. Fazekas:* Contributions to Some Problems of Mathematical Programming, with Special Respect to a Matrix Algoritmical Method (MAM). — III. IKM, Weimar, 1965.
74. *F. Fazekas:* Matrizenalgorithmen für die mathematische Optimierung, mit Beziehung auf die Interpolation. — GAMM-Tagung, Darmstadt, 1966.
75. *F. Fazekas:* Matrix Algoritmical Method (MAM) for the Mathematical Programming, with Relations to the Tschebysheff-Approximation. — World Congr. of Math., Moszkva, 1966.
76. *Fazekas Ferenc:* Matematikai programozás és approximáció. — METESZ-AIOT, Budapest, 1966.
77. *Fazekas Ferenc:* Operációkutatás I. — Szakmérn. jegyzet, Tankönyvkiadó, Budapest, 1965.
78. *Fazekas Ferenc:* Operációkutatás II. — Szakmérn. jegyzet, Tankönyvkiadó, Budapest, 1966.
79. *H. W. Kuhn:* Locational Problems and Mathematical Programming. — Coll. on Appl. of Math. to Econ., Budapest, 1963.
80. *Hosszú—Heinamann:* Egy olajvezeték-telepítési szélsőértékfeladat. — Mat. Kut. Int. Közl. VII. B. 4, 1963.
81. *M. Miller:* Über eine, für die Rechenpraxis geeignete Näherüngsmethode zur Bestimmung des Vialzentrums. — Wiss. Zeitschr. d. Hochsch. f. Verkehrsw. Dresden, 11 (1964).
82. *J. Vincze:* Über die Schwerpunkte der konvexen Kurven bei speziellen Gelegungen. — Acta Math. Szeged 9 (1938).
83. *Forrai Sándor:* Bányászati telepítések különleges feladatának analitikai megoldásához. — MTA VI. O. K. XXVIII. 1—4.
84. *Jándy Géza:* A szállítástervezés elemző módszerei. — KÖZDOK, 1960.
85. *Oltay—Rédei:* Geodézia. — Tankönyvkiadó, Budapest, 1960.
86. *Forrai Sándor:* A súlyozott távolságösszegek minimumának általános megoldása kötött elhelyezkedések esetében. — MTA VI. O. K. 32. kt. 1—4. sz.

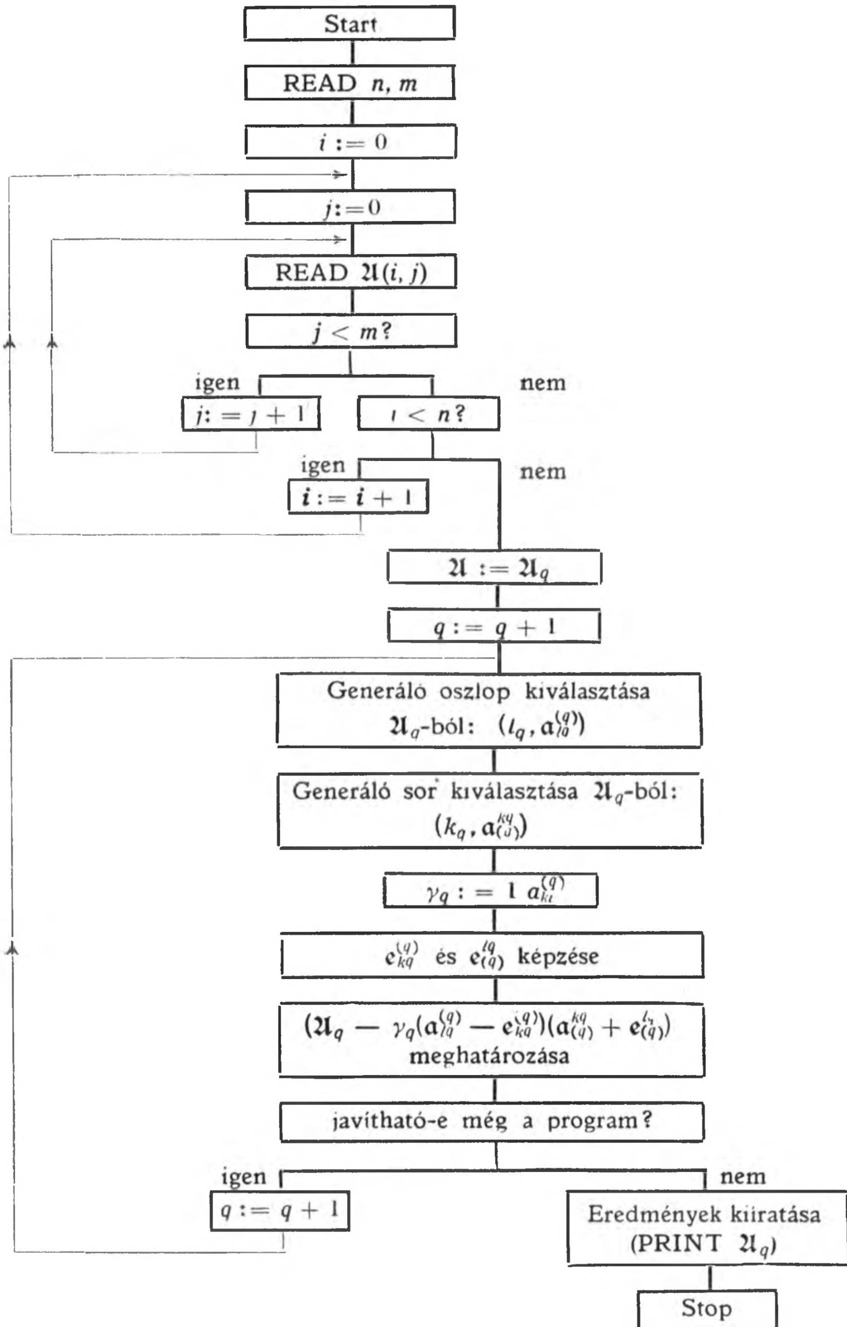
87. *Zambó János:* Súlyozott távolságok minimumösszegének törvénye. — Bányászati lapok, 1965, 8. szám.
88. *I. M. Voronkov:* K zadacse ob otüszkanii polozsenija tocski, szootvetszvujuscsej naimenysemu znacseniju szummü n-nüh sztepenej rasztojanij. — Naucs. Trudü Moszk. Gorn. Inst. vüp. No. 8. Moszkva, 1950.
89. *E. Weissfeld:* Sur le poit pour lequel la somme des distance de n points donnees est minimum. — The Tohoku Math. Journal 43 (1937).
90. *Brink—de Cani:* An Analogue Solution of the Generalized Transportation Problem with Specific Application to Markating Location. — Int. Conf. on. Op. Research, Oxford, 1957.
91. *Forrai Sandor:* Különleges, főleg centralizációs és rekonstrukciós bányászati és ipari telepítések helyének műszaki-gazdasági vizsgálata. — Kand. értekezés, Miskolc, 1963.
92. *Asszonyi—Forrai:* Ipari és bányászati létesítmények optimális telepítési helyének meghatározása a szállítási költségek minimuma alapján. — Műsz. Élet Tatabányán VII (1965) 2. sz.
93. *Jándy Geza:* Új ipari létesítmények optimális telepítésének matematikai módszerei. — ÉM. Számgép, Budapest, 1964.
94. *Fazekas Ferenc:* Számítógépek. — Jegyzet, Tankönyvkiadó, Budapest, 1966.

MELLÉKLETEK

1. A szimplex-matrixalgoritmus (SMA) elvi tömbvázlata
2. A szimplex-matrixalgoritmus (SMA) ALGOL-60-as programja
3. A centrum-vektoralgoritmus (CVA) elvi tömbvázlata
4. A centrum-vektoralgoritmus (CVA) ALGOL-60-as programja

Készültek a BFEM műsz. fejl. osztályán, a szerző részvételével folytatott kutatómunka során (1966), Szaniszló Mihály okl. villamosmérnök tervezésében.

1. A szimplex-matrixalgoritmus (SMA) elvi tömbvázlata

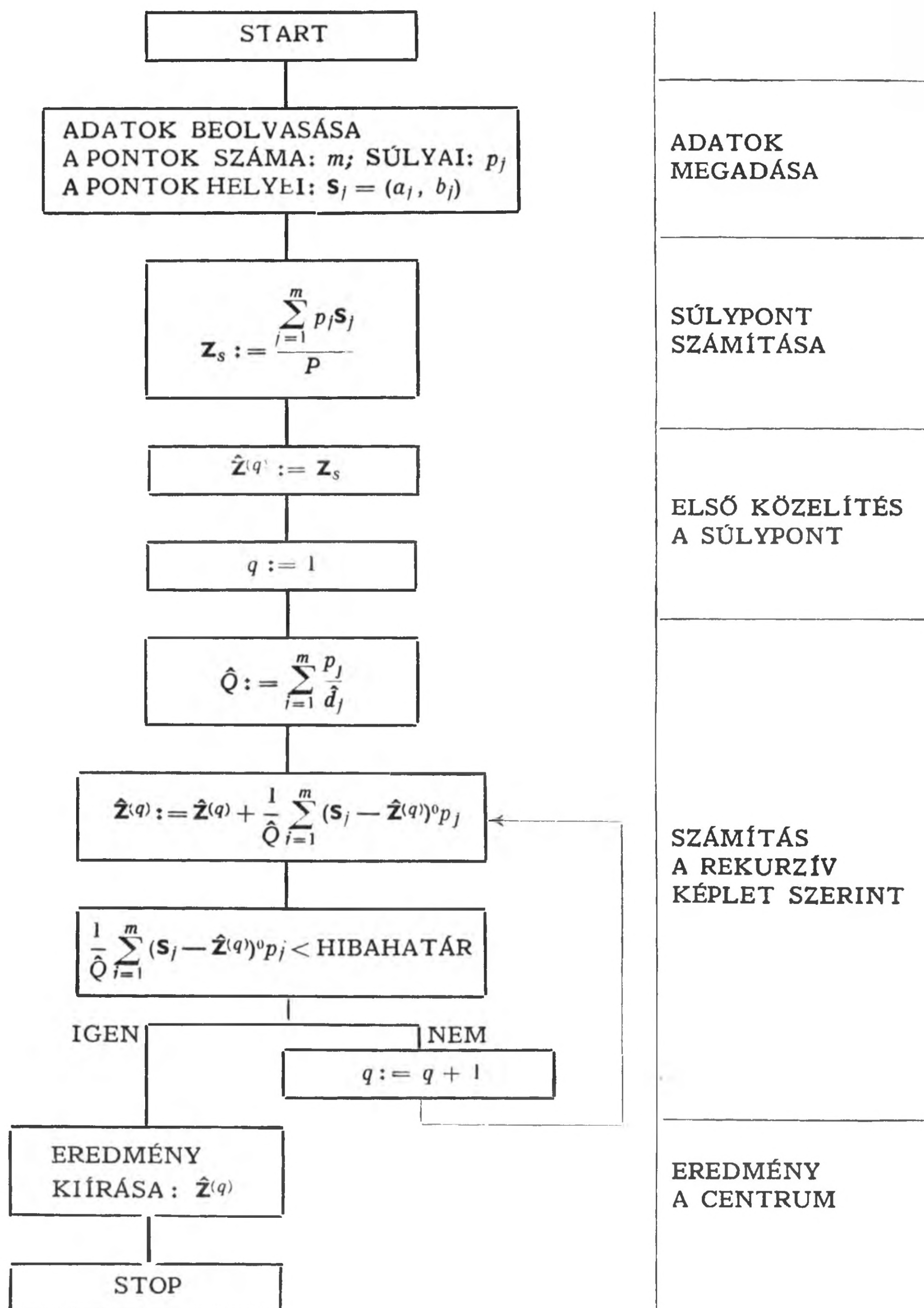


2. A szimplex-matrixalgoritmus (SMA) ALGOL-60-as programja

```
BFEM MUESZAKI FEJLESZTEESI OSZTAALY
1966 FEBRUAAR
630601012
BEGIN COMMENT ELFAJULOO ESETBEN MOODOSITANI KELL'
REAL M1, M2, M7, M5, M4, AKL GAMMA'
INTEGER M, N, M3, L, M6, K, M8, Q, I, J'
REAL ARRAY AQ(0:50, 0:50), ALQ(0:50), ALMEK(0:50),
AKQ(0:50), AKPEL(0:50)'
INTEGER ARRAY EKQ(0:50), ELQ(0:50), X(0:50)'
BOOLEAN B'
SWITCH SS:=L1'
READ N, M
FOR I:=O STEP 1 UNTIL N DO
BEGIN
FOR J:=O STEP 1 UNTIL M DO
READ AQ(I, J)'
X(I):=O'
END ADATOK BEOLVASAASA'
PRINT *BFEM MUESZAKI FEJLESZTEESI O
                LINEAARIS PROGRAMOZAAS
                HIPERMATRIXOS REKURZIV FORMULA ALAPJAAN?,
                *L8??'
Q:=O'
B:=TRUE'
FOR Q:=Q+1 WHILE B DO
BEGIN
M1:=O'
FOR J:=1 STEP 1 UNTIL M DO
BEGIN
IF AQ(O, J) LESS O THEN BEGIN
M2:=ABS (AQ(O, J))'
IF M2 GR M1 THEN
BEGIN
M1:=M2'
M3:=J
END
END
END L INDEX KIVAALASZTAASA'
L:=CHECK I(M3)'
FOR I:=1 STEP 1 UNTIL N DO
BEGIN
IF AQ(I, L) GR O THEN
M7:=AQ(I, L)
ELSE GOTO L1'
M4:=AQ(I, O)/M7'
IF I=1 THEN
BEGIN
M5:=M4'
M6:=1'
GOTO L1
END'
```

```
IF M5 LESS M4 THEN M5:=M5
ELSE
BEGIN
M5:=M4'
M6:=I
END'
L1: AQ(I, L):=AQ(I, L)
END K INDEX KIVAALASZTAASA'
K:=CHECK I(M6)'
AKL:=CHECKR(AQ(K, L))'
GAMMA:=1/AKL'
X(K+1):=L'
FOR I:=O STEP 1 UNTIL N DO
BEGIN
ALQ(I):=AQ(I, L)'
IF I=K THEN EKQ(I):=1
ELSE EKQ(I):=O'
ALMEK(I):=ALQ(I)—EKQ(I)
END'
FOR J:=O STEP 1 UNTIL M DO
BEGIN
AKQ(J):=AQ(K, J)'
IF J=L THEN ELQ(J):=1
ELSE ELQ(J):=O'
AKPEL(J):=AKQ(J)+ELQ(J)
END'
FOR J:=O STEP 1 UNTIL M DO
BEGIN
FOR I:=O STEP 1 UNTIL N DO
BEGIN
AQ(I, J):=AQ(I, J)—GAMMA*ALMEK(I)*AKPEL(J)
END
END'
M8:=O'
FOR J:=1 STEP 1 UNTIL M DO
BEGIN
IF AQ(O, J) GREQ O THEN M8:=M8+1
END'
IF M8=M THEN B:=FALSE
ELSE B:=TRUE
END Q OPTIMAALIS MEGOLDAAS MEGTALAALAASA'
PRINT *OPTIMAALIS MEGOLDAAS?, **L3??'
FOR I:=O STEP 1 UNTIL N DO
BEGIN
PRINT X(I), *A TERMELEESBE BEVONT CIKK SORSZAAMA?, **L2??'
FOR J:=O STEP 1 UNTIL M DO
BEGIN
PRINT AQ(I, J)
END'
PRINT **L5??
END
END PROGRAM'
```

3. A centrum-vektoralgoritmus (CVA) elvi tömbvázlata



4. A centrum-vektoralgoritmus (CVA) ALGOL-60-as programja

```
BFEM MUESZAKI FEJLESZTEESI OSZTAALY
1966 FEBRUAAR
630502010'
BEGIN COMMENT A HIBAHATAAR CSOEKENTHETOE'
REAL A, B, C, ZSX, ZSY, ZQX, ZQY, PP, DXOP, DYOP, KK, KKX, KKY, H'
INTEGER NN, J, I'
REAL ARRAY SX(1:300), SY(1:300), P(1:300), D(1:300), DX(1:300), DY(1:300)'
SWITCH SS:=L1, L2'
READ NN'
A:=O'
B:=O'
C:=O'
FOR J:=1 STEP 1 UNTIL NN DO
BEGIN
READ SX(J)'
READ SY(J)'
READ P(J)'
A:=A+ P(J)*SX(J)'
B:=B+ P(J)*SY(J)'
C:=C+ P(J)
END ADATOK BEOLVASAASA'
ZSX:=A/C'
ZSY:=B/C'
PRINT ✠ BFEM MUESZAKI FEJLESZTEESI O
                CENTRUM MEGHATAAROZAASA?, ✠✠L5??'
PRINT ✠ SULYPONT?, ✠✠L2??'
RINT ZSX'
PRINT Z Y, ✠✠L4??'
ZQX:=ZSX'
ZQY:=ZSY'
H:=SQRT(ZSX**2+ ZSY**2)'
H:=H/5000'
KK:=2*H'
I:=0'
FOR I:=I+ 1 WHILE KK GR H DO
BEGIN
PP:=0'
FOR J:=1 STEP 1 UNTIL NN DO
BEGIN
D(J):=SQRT((ZQX—SX(J))**2+ (ZQY—SY(J))**2)'
IF D(J) LESS 1@—8 THEN GOTO L1'
PP:=PP+ P(J)/D(J)'
DX(J):=0'
DY(J):=0'
L1: A:=A
END'
```

```
DXOP:=0'
DYOP:=0'
FOR J:=1 STEP 1 UNTIL NN DO
BEGIN
IF D(J) LESS 1@—8 THEN GOTO L2'
DX(J):=DX(J)+SX(J)—ZQX'
DY(J):=DY(J)+SY(J)—ZQY'
DXOP:=DXOP+(DX(J))/D(J)*P(J)'
DYOP:=DYOP+(DY(J))/D(J)*P(J)'
L2: A:=A
END'
KKX:=DXOP/PP'
KKY:=DYOP/PP'
ZQX:=ZQX+KKX'
ZQY:=ZQY+KKY'
PRINT ZQX'
PRINT ZQY, ✠✠L2??'
IF KKX LESS KKY THEN KK:=KKY
ELSE KK:=KKX
END A CENTRUM A HIBAHATAARON BELUEL VAN'
PRINT ✠ A CENTRUM VEKTOR X KOMPONENSE?, ✠✠L2??'
PRINT ZQX, ✠✠L2??'
PRINT ✠ A CENTRUM VEKTOR Y KOMPONENSE?, ✠✠L2??'
PRINT ZQY
END CENTRUM MEGHATAAROZAASA'
```

Tankönyvkiadó Vállalat
A kiadásért felelős: Vágvölgyi Tibor igazgató
Felelős szerkesztő: Ambrus Ferenc
Műszaki szerkesztő: Banfi Ferenc
A kézirat nyomdába érkezett: 1966. február. Megjelent: 1967. január
Példányszám: 4000. Terjedelem: 27,75 (A/5) ív.
Készült az 1964. évi első kiadás felhasználásával, íves magasnyomással,
az MSZ 5601-59 és az MSZ 5602-55 szabvány szerint
Raktári szám: 44331/C-VII.
66.238 Egyetemi Nyomda, Budapest